

日本数学コンクール2014

第25回日本数学コンクール 問題編

平成26年11月2日(日)実施

日本数学コンクール委員会
名古屋大学

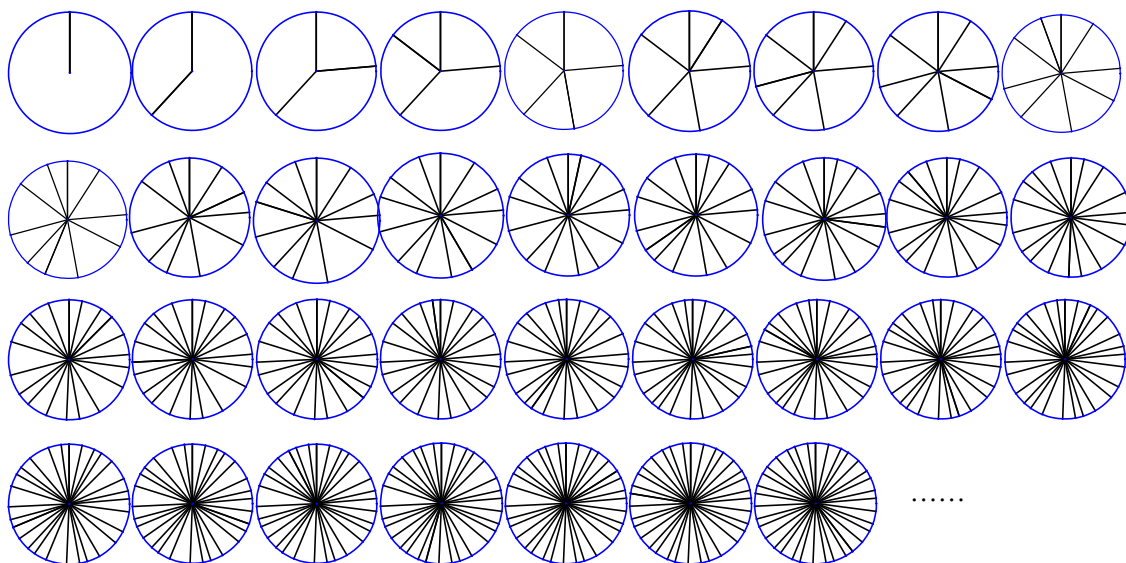
シニア問題1 キャベツの黄金比

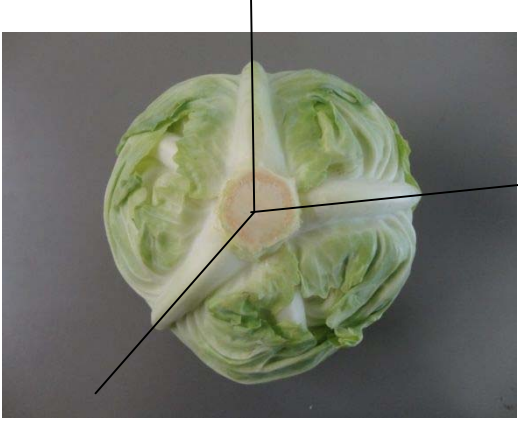
キャベツの葉を外側から順に1枚ずつ取っていき、葉の中央の太い芯どうしの角度を順に分度器で測ると常に 137.5° ぐらいであることがわかります。この角度は、円周を黄金比 $1:\phi$ (ただし $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) に

分けたときの1に相当する角、すなわち $360^\circ \times \frac{1}{1+\phi} = 137.5077641\dots^\circ$ で、黄金角と呼ばれており、

一般的に、植物は葉を1枚ずつ黄金角の間隔で付けていくと言われています。キャベツも例外ではありません。これが原因で、スーパーマーケットで売り出されているキャベツがあのような丸く引き締まったいい形になっていると考えられます。下図は写真のようにキャベツを裏側から見て、葉が内側に1枚ずつ増えていく様子を、葉の中央の太い芯の中央ラインを時間順に記入して表したものです。(キャベツは写真のように左回転ものと、逆の右回転のもの2種類がありますが、表裏を逆にすれば逆回転になり、どちらでもよいこととなります。)

- (1) もし、葉の中央の太い芯どうしの角度が 135° だったら、どんな状態になるのか解答用紙の1つの円に記入し、実験してみてください。また、気付いた点があれば、書いてください。
- (2) もし、葉の中央の太い芯どうしの角度が 138° だったら、どんな状態になるのか解答用紙の1つの円に記入し、実験してみてください。ただし、少なくとも15枚の葉は付けてください。また、気付いた点があれば、書いてください。
- (3) なぜ、キャベツの葉が1枚ずつ黄金角の間隔で付けていくと、キャベツはあのような丸く引き締まったいい形になるのでしょうか理由を説明してください。必要があれば関係式 $\phi^2 = \phi + 1$ を用いて構いません。





シニア・ジュニア共通問題 2 循環節の長さを指定した循環小数

142857 の不思議を聞いたことがあるでしょうか？

$$142857 \times 1 = 142857$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

と、1 から 6 をかけると同じ数字の並びがズレながら繰り返していき、

$$142857 \times 7 = 999999$$

となります。不思議ですね。

タネを明かすと、これは $\frac{1}{7} = 0.14285714285714285714285714 \dots$ となることから説明できます。

このように、循環小数には不思議な性質があります。今日はそれを考えてみましょう。

分数を小数に直したとき、無限に続く無限小数になるならば、それは同じ数字の並びを繰り返す循環小数であること、繰り返す数字の並びを循環節ということを知っている人も多いと思います。また、循環節の数字の桁数を循環節の長さといえます。

$\frac{1}{7} = 0.14285714285714285714285714285714 \dots$ の循環節は 142857 その長さは 6,

$\frac{1}{13} = 0.07692307692307692307692307692307 \dots$ の循環節は 076923 その長さは 6,

$\frac{1}{11} = 0.090909090909090909090909090909 \dots$ の循環節は 09 その長さは 2 です。

このように分数を小数に直せば比較的簡単に循環節とその長さを知ることができます。今日はもう少し難しい問題にチャレンジしてみましょう。

$\frac{1}{\text{素数}}$ の形で循環節の長さが 7 になる分数を 1 つ求めてください。

これができたら、 $\frac{1}{\text{素数}}$ の形で循環節の長さが 20 になる分数を全部求めることにも挑戦しましょう。

なお、おまけで 5000 以下の素数の一覧表をつけておきます。

素数の表

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,

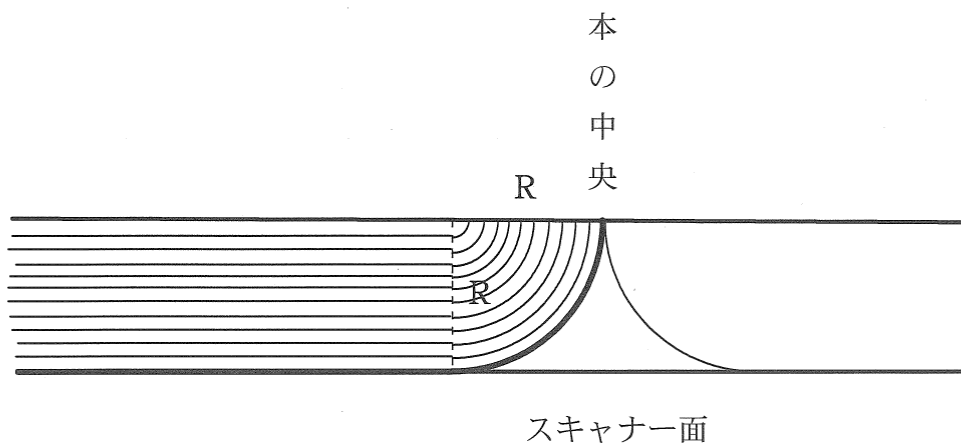
479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607, 3613, 3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719, 3727, 3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853, 3863, 3877, 3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989, 4001, 4003, 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099, 4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231, 4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349, 4357, 4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483, 4493, 4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637, 4639, 4643, 4649, 4651, 4657, 4663, 4673, 4679, 4691, 4703, 4721, 4723, 4729, 4733, 4751, 4759, 4783, 4787, 4789, 4793, 4799, 4801, 4813, 4817, 4831, 4861, 4871, 4877, 4889, 4903, 4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957, 4967, 4969, 4973, 4987, 4993, 4999

シニア問題3

曲がったものを真っ直ぐに

厚手の本をコピーするとき、本の中央部分では文字が曲がってコピーされます。何とかこれらを復元したいと思います。次の2段階で問題を解決してください。

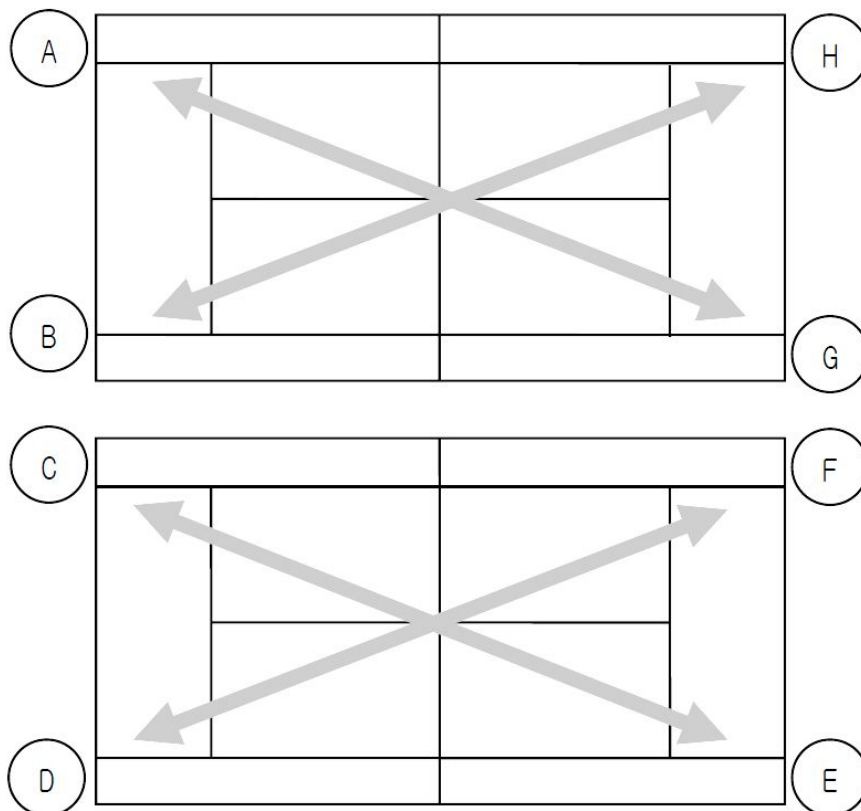
- (1) 本を開いたとき、中央部分が、径 R の円柱状の曲面であるとき、復元方法を考察しなさい（下図参照のこと）。



- (2) (1)を一般化し、本の曲がり具合を表す式（対応）を考え、復元方法を考察しなさい。

シニア・ジュニア共通問題4 効率のよいテニスの練習を行うためには

テニスでは図のようにクロス(斜め同士)のペアで練習を行うことがあります。



さて、いま図のように、2面のコートで8名が練習をするとしましょう。同じ相手と練習しても効果が薄いので、まず『全員を反時計回りに移動させる』つまり、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A$ のように移動させることで相手を変えていくことにしました。(以下、このようにぐるぐると場所を変えていくような移動のことをローテーションと呼ぶことにします。)

するとこの方法では、各自の相手は7人中2人しか変わらないことになります！
(確かめてみて下さい！)

ここで皆さんに考えてもらいたいのは、ローテーションによるできるだけ少ない移動で全ての人と練習できる方法です。

- (1)、8人で練習するとき、1人をコーチとして場所を固定し、他の7人を移動させるローテーションで全ての人と練習できるものを考えてください。
- (2)、8人で練習するとき、全員が必ず移動するようなローテーションで全ての人と練習できるものを考えてください。
- (3)、3面のコートで12人が練習するとき(2)のようなローテーションが組めるかどうか考えてください。さらに、コートの数や人数が多いときはどうでしょうか。