問題４．「鮎の養殖池」

鮎（あゆ）の養殖池を設計しよう。工法の都合で浅い円筒の池を作ることにしており、管理する水量をできるだけ少なくしたいと思います。**鮎は円形の縄張りをもつため、設計の準備として**、互いに接する円の半径について調べてみよう。円$C_0(r_0)$の境界およびその内部の領域に含まれる（内包される）円$C_1(r_1), C_1'(r_1)$を**図１a**のように配置しました。ここでr_jは円C_jの半径を表します（$j=0,1$）。円C_0には半径r_1の円をこれ以上、内包させることができないので、できるだけ半径の大きい円を円C_0に内包させることができないかを検討することにしました。ここでは、

Step1: 円C_1, C_1'の中心O_1, O_1'の垂直二等分線ℓ_1を描く(**図 1b**)。円C_0に内接して、円C_1, C_1'に外接する円$C_2(r_2)$の中心O_2をℓ_1上にみつける。

Step2: 円C_1, C_2の接点を通る共通接線ℓ_2を描く。円C_0に内接して、円C_1, C_2に外接する円$C_3(r_3)$をみつける。

という方法に従って、逐次、円$C_2(r_2)$，$C_3(r_3)$の配置を行うものとします。幾何学的な計算によって、$r_0 = 2r_1 = 3r_2 = 6r_3$となります。このとき、以下の等式①を確認することができます。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_0}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_0^2}\right) \cdots\cdots ①$$

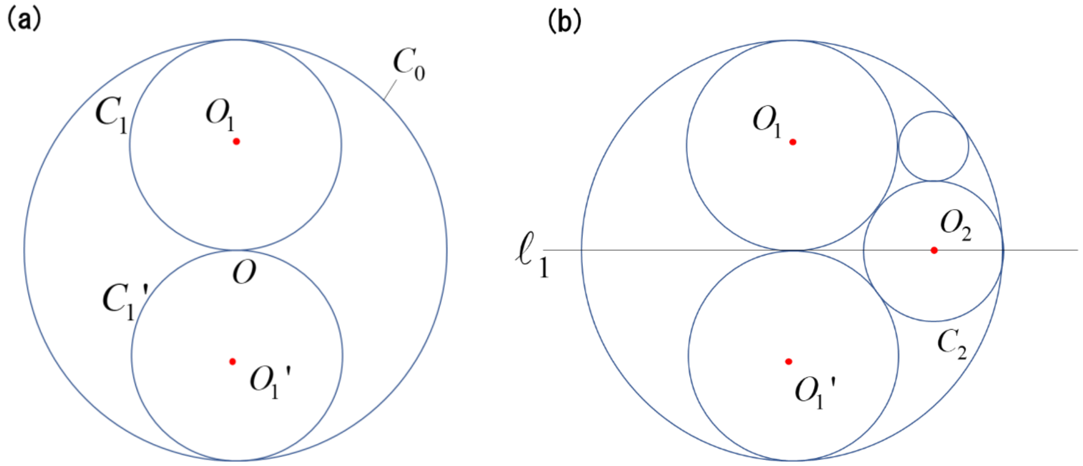

図 1. 互いに接する円。(a) Oは円C_0の中心である。(b)円C_0に内接して、円C_1, C_1'に外接する円の中心O_2は、円の対称性から、直線O_1O_1'に対して線対称の位置に置いてもよい。

さて、孵化の後、3ヶ月ごとに仔魚、稚魚、幼魚、成魚の発育段階をとり死をむかえる**鮎**は、以下のルールに従って縄張りを形成すると仮定します。そのため、縄張りの領域が重なり合うことのないように考慮して、養殖池を設計する必要があります。

（I）**鮎**の縄張りは、池の鉛直上方からみると円とみてよい。

（II）**鮎**の縄張りは発育過程の段階に依存しており、成魚、幼魚、稚魚、仔魚の段階でそれぞれ$r_1; r_2; r_3; r_4$の半径をもつ円$C_1^{(1)}(r_1),\ldots,C_1^{(n)}(r_1); C_2^{(1)}(r_2),\ldots,C_2^{(m)}(r_2); C_3^{(1)}(r_3),\ldots,C_3^{(k)}(r_3); C_4^{(1)}(r_4),\ldots,C_4^{(q)}(r_4)$となる。ここで、$n,m,k,q$は成魚、幼魚、稚魚、仔魚の個体数を表し、上述のとおり$r_1 > r_2 > r_3 > r_4$である。

（III）**鮎**の縄張りの大きさは成魚になると、ある一定の大きさとなり、それ以上は変化しない。

例えば**図 1b** は様々な成長段階の**鮎**が混在する養殖（基準）池と考えることもできます。**図 2** は**養殖池の半径に相当する**r_0**を変化**させて、$n=22$の**鮎**の成魚を(上述のような規則を定めずに)池に入れた縄張りの様子です。大きな養殖池になると、**図 2a** のように成魚の縄張りに間隙が生ずることがあります。そこで、全体

を適当に揺らせて円 $C_1^{(1)}(r_1), ..., C_1^{(22)}(r_1)$ の配置をずらせ、円 C_0 の半径の大きさを縮めることができないかを実験してみました(**図 2b**)。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 円 C_0 の面積に対して**鮎**の縄張りを表す円(この問いにおいては円 $C_1^{(1)}(r_1),...,C_1^{(22)}(r_1)$)の面積が占める割合を充填率とします。**図 2a**, **図 2b** のそれぞれにおいて r_0, r_1 を実測するなどして、充填率の<u>値</u>を求めなさい。また、円 C_0 の半径の大きさ r_0 を、さらに縮めることはできるかを検討しなさい。

(2) **図 2a** に示した円 $C_1^{(1)}(r_1),...,C_1^{(22)}(r_1)$ の配置は動かさずに、できるだけ成長過程の進んだ**鮎**を新たに入れて、同一の池で養殖したいと思います。新たに入れる**鮎**をどこに配置すればよいでしょうか。このとき、**図 2a** の矩形点線部分を拡大して単純化した**図 3** をもとに考察してください。

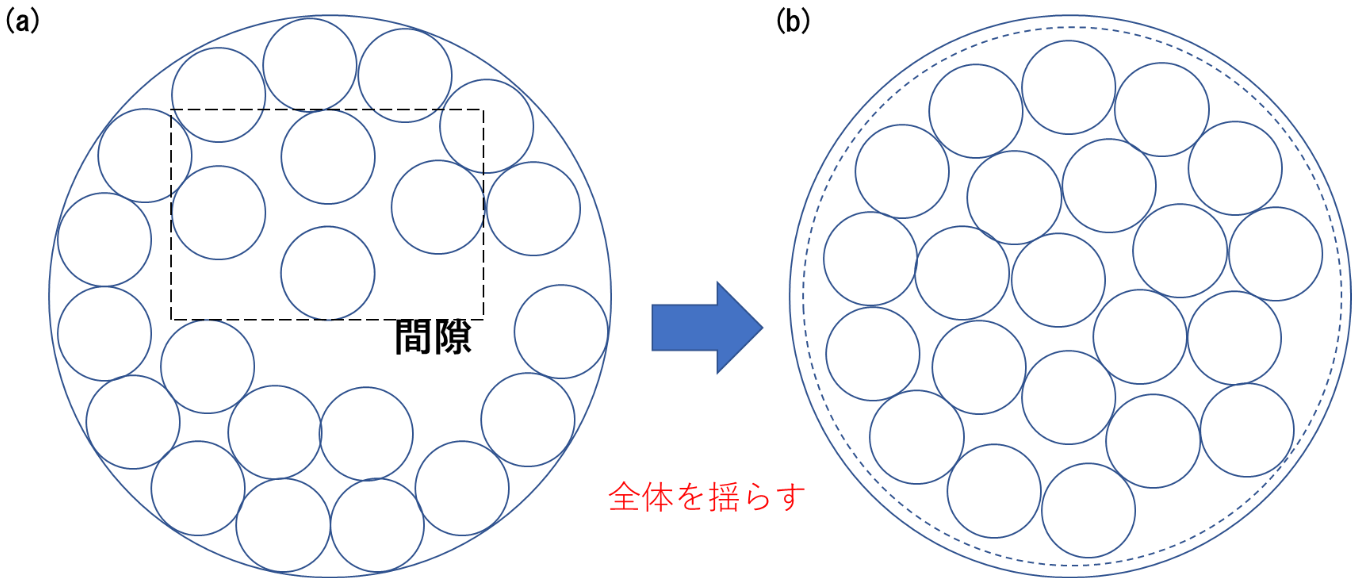

図 2. 養殖池における**鮎**の成魚の縄張り例($n=22$)。(a)初期配置。規則を置かず適当に配置させた。(b)実験後の縄張りの配置。点線の円に養殖池を縮小させることに成功した。

ここで**鮎**の成長過程を考慮に入れると、養殖池間を移動させるプロセスが必要であるようです。以下では2つの成長段階の**鮎**を同一の池で養殖することが望ましいと仮定して、ある成長段階の**鮎**と成魚が混合する養殖池を考えます。

(3) **鮎**の成魚 3 匹の縄張り(円 $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$)を内包する池 $C_0(r_0)$ を、**図 4** のように作りました。円 $C_1^{(1)}(r_1),\ C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C_4^{(1)}$ の半径 r_4 を等式①を参考にして求めなさい。また、できるだけ多くの半径 r_4 の円によって**図 4** の残りの部分を埋めていくときの充填率を求めなさい。ここで**図 4** の残りの部分とは、円 $C_0, C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1)$ で囲まれる領域、$C_0, C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域、および $C_0, C_1^{(3)}(r_1), C_1^{(1)}(r_1)$ で囲まれる領域である。

(4) **図 4** において、円 $C_0, C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C^{(1)}$ の半径 r を、等式①を参考にして求めなさい。また、できるだけ多くの半径 r の円によって**図 4** の残りの部分を埋めていくときの充填率を求めなさい。ここで**図 4** の残りの部分とは、円 $C_0, C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域、$C_0,\ C_1^{(3)}(r_1), C_1^{(1)}(r_1)$ で囲まれる領域、および $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域である。

(5) 養殖池間を移動させない期間を、できるだけ長くとる観点から、ある一定の期間、養殖池に入れた**鮎**が成長しても同一の個体数が維持できる養殖池を設計してください。ただし、上述の充填率はできるだけ大きくなるように配慮してください。

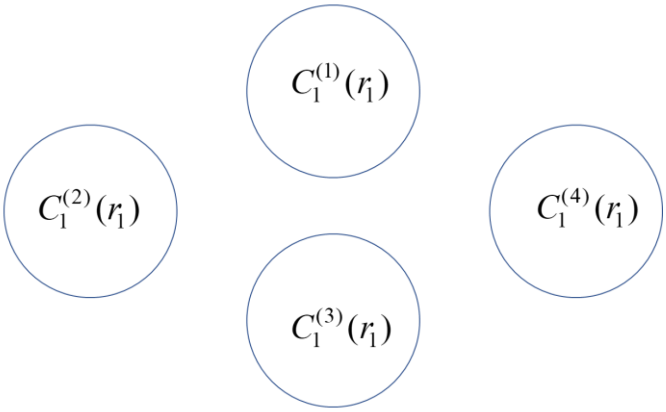

図 3. 縄張りの間隙(図 2a 矩形点線部分を拡大)

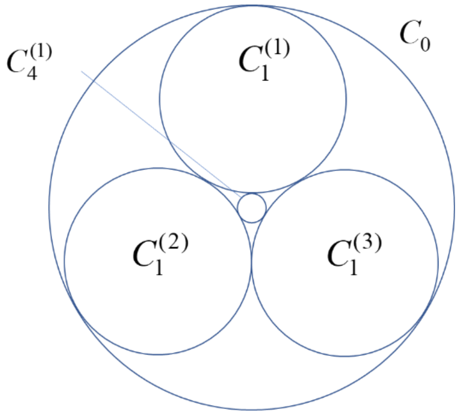

図 4. 成魚 3 匹の縄張り