問題５.「立方体倍積問題の近似解」

与えられた立方体の丁度 2 倍の体積を持つ立方体を定規とコンパスだけを用いて作図せよ，という「立方体倍積問題」は，解がない問題として知られています．つまり，与えられた長さに対して，その $\sqrt[3]{2}$ 倍の長さを定規とコンパスだけを用いて作図することは不可能なことが証明されているのです．しかし，一定の操作を繰り返すことによって求めたい $\sqrt[3]{2}$ 倍の長さにいくらでも近い長さを求める（作図する）ことはできます．それを考えていきましょう．

(1) 小手調べに $\frac{1}{9} = 0.1111\cdots$ という式を考えましょう．まず $x = 0.1$ から始めて $X = 0.1(x+1)$ という操作を繰り返すと $0.11,\ 0.111,\ 0.1111,\ \cdots$ という数列が出来ますが，回数を繰り返すうちにその値は殆ど変わらなくなります．その値を a とすると $a = 0.1(a+1)$ が成り立ち, これを解いて $a = \frac{1}{9}$ が結論されるわけです．

(2) 次に $x = 2$ から始めて $X = 2 + \frac{1}{x}$ という操作を繰り返しましょう．このとき

$$2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\cdots$$

という数列が得られます．(1) と同様，回数を繰り返すうちに値が殆ど変わらなくなることが確かめられて，その値を a とすると $a = 2 + \frac{1}{a}$ かつ $a > 0$ から, $a = \sqrt{2} - 1$ が得られます．つまり

$$\sqrt{2}-1 = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

であり，これから $\sqrt{2}$ の連分数表示

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

が得られました．

操作 $X = 2 + \frac{1}{x}$ は次のように作図できます．直線 ℓ をとり, ℓ からの距離が 1 の点 O をとります．このとき O から ℓ に下ろした垂線の足を H とすると $OH = 1$ です．直線 ℓ 上に $AH = 2$ となる点 A をとります．

さて ℓ 上に H からみて A と同じ方向に点 P があるとします．このとき点 O からみて ℓ と同じ側に, O からの距離が PH と等しいような直線 ℓ' を引きます．直線 OA と ℓ' の交点を A' とし, ℓ' 上 $A'Q' = 1$ かつ $OA' < OQ'$ となるような点 Q' をとり，直線 OQ' と ℓ の交点を Q とします．このとき $PH = x$ ならば $QH = 2 + \frac{1}{x}$ となることを証明してください．これにより, P から Q を作図する操作を繰り返して, $\sqrt{2} - 1$ の近似値が（よって $\sqrt{2}$ の近似値も）得られるわけです．

(3) いよいよ $\sqrt[3]{2}$ の近似値を考えましょう．$(x, y) = (3, 3)$ から出発して $X = 3 + \frac{y}{x}$, $Y = 3+\frac{1}{x}$ という操作を繰り返します．これまでと同様, 操作を繰り返すと値が殆ど変わらなくなることは認めるとして，その値を (a, b) とします．このとき $a = 3+\frac{b}{a}$ かつ $b = 3+\frac{1}{a}$ が成り立ちます．このとき $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{a}$ であることを示してください．また, (2) にならって, (x, y) から (X, Y) を作図する方法を考案してください．これが分かれば $\sqrt[3]{2}$ の近似値を作図する方法が得られたことになります.

(4) $\sqrt[3]{3}$ など，他の無理数は (2) や (3) のように表せるか，自由に考えてください.