2014

日本数学コンクールのまとめ

第25回　日 本 数 学 コ ン ク ー ル
第18回　日本ジュニア数学コンクール

－平成26年11月 2 日実施－

第15回　日本数学コンクール論文賞

日本数学コンクール委員会
名 古 屋 大 学

目　　　　　次

１．はじめに

ノーベル賞とフィールズ賞

日本数学コンクール委員会委員長　國　枝　秀　世
（名古屋大学研究担当理事）

2014 年 10 月 7 日、名古屋大学では赤崎先生、天野先生のノーベル物理学賞受賞で沸き立っていました。この日沖縄におられた益川敏英先生にも Skype でつないで記者会見のコメントを頂きました。その時益川先生がおっしゃったことの一つが「ノーベル賞と言って騒ぐな」でした。論拠のひとつが「フィールズ賞は 4 年に 1 度しか与えられない」ことです。ご存知の様にフィールズ賞は 40 歳以下を対象にしていることはこれから伸びて行く研究者を励ますと言う側面もありますが、数学者は早熟であることも関連しているかも知れません。これまでの受賞者は米国 13 名、フランス 12 名、ロシア（含ソ連）9 名、英国 7 名、そして日本 3 名です。名古屋の関係では 1990 年まで名大教授だった森重文先生が、京大へ異動直後に受賞されています。森先生が名古屋の高校の出身者であることを皆さんもご存知だと思います。

益川先生のお話しに戻りますが、ノーベル賞やフィールズ賞を受賞する事は決して目的や目標ではありません。数学や物理などの基礎研究の多くでは、個人の興味と探究心が基になり、時としてこれまでの壁を突破すると、「発見」や「発明」と呼ばれる事になります。重要な事は、数多くの同様な、しかし一人一人がそれぞれ独自の方向に研究を続ける中で、大部分の失敗を尻目にほんの一握りの幸運な人達が「発見」に到達できるものだと思います。本当の Breakthrough は普通の発想では予想もつかないところから現れるものです。青色 LED の赤崎先生・天野先生の研究でも、窒化ガリウムによる LED は 20 世紀中の実現は不可能だと言われる中で、赤崎先生の元で天野先生が千回以上の失敗の上で遂に成功にたどり着いたとお聞きしました。世の中には未解決の問題が沢山あります。その解決には様々なアプローチがあり得る中でどのルートを進むかは教科書には書かれていませんから、皆さん一人一人に任せられています。

数学コンクールの場合も、採点をされる先生からは、出題の際に思いもしない答えが出て来ることがあり、それが楽しみだと言われています。大学入試問題では多くの小問を用意し徐々に正解に導くケースが増えている様に見えます。特にセンター入試では穴埋め問題にならざるを得ない事情もあり、全く独立の解法を許さないことになっています。本数学コンクールではそんな制限はありませんから伸び伸びと発想の翼を広げて欲しいと思います。そのことが将来、数学だけに限らず様々な分野で本当に新しい発想に基づく研究、開発に活かして頂ければ無上の喜びとするところです。本コンクールの開催にご努力頂いた先生方に感謝するとともに、今後も若者の豊かな創造力を伸ばす様な出題を推し進めていただくことを期待致します。

２．日本数学コンクール開催の趣旨

開催の趣旨

今日世界はいろいろな意味で大きな転機に立っています。産業技術の高度化や高度情報化の技術革新は急速な進展を見せていますが，反面，人口爆発，エネルギー問題，環境汚染等人類がかつて経験したことのない複雑多岐にわたる課題に直面しています。このような問題を解決し，将来にわたって人類社会の発達と繁栄を享受していくためにも，総合的，学際的な学術研究の振興が必要です。このことは，必然的に汎科学性を有する数学の一層の飛躍とそれによる新しい科学の発展が求められており，それを支える優れた数学的思考力を持ち，探求心と創造性豊かな人材の育成が急務となっています。

このような情勢にかんがみ，新しい科学と技術の開拓を担う夢とロマンを秘めた青少年の発掘，伸長を図っていくため，中・高校生を対象に，平成 2 年度から「日本数学コンクール」を，同 9 年度からは「日本ジュニア数学コンクール」を，更に同 12 年度からは「論文賞」を開催してきました。私ども委員会は今後とも数学コンクールを実施し，もって世界の学術研究進展の基礎形成に寄与していくものです。

特　色

◎自由にゆったり考える

一題に絞っての回答も可能です。参考書やノート等の持ち込みも自由です。途中，試験会場で昼食や飲み物などを自由に取ることができます。

◎楽しい数学の発見

学校における数学の教育課程，教科書にとらわれず，数学の本質に根ざした考えていて楽しい問題を提供します。数理実験も積極的に採り入れます。

◎多彩な才能の評価

優秀な能力をもった生徒，ユニークな発想をもった生徒等様々な参加者の才能を多面的に評価します。特定の一題に集中して素晴らしい発想を出した生徒も顕彰します。

◎優れた人材の育成

日本数学コンクール参加者の数学的な能力，資質を一層高めるために，表彰式の後，中・高校生を対象に数学の公開講座「数理ウェーブ」を開催しています。

なお，「数理ウェーブ」は一般の方々の参加も認めており，多数の参加があります。

３．講評と解説

（１）２０１４年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評

日本数学コンクール実行委員会委員長　宇澤　　達
（名古屋大学多元数理科学研究科教授）

シニアの第一問
「キャベツの黄金比」
　キャベツの葉っぱの問題です。ひまわりの種のつき方など自然界には「きれい」に詰めたりするときにフィボナッチ数列、黄金比が出てくるが多いです。ここでは、実際に黄金比がでてくる様子をみてもらうのが目的です。BMW というドイツの自動車メーカーの新しい電気自動車用のブリヂストンが開発した新しいタイヤの宣伝で、さまざまな数式が登場しますが、そのときにも黄金比が出てくるのをご覧になったかたもいらっしゃると思います。新しいものを作るときに数学がでてくる一つの例です。

ジュニアの第一問
「正方形」
　この問題ではノコギリを使いましたが、数学ではハサミ合同と言われる問題です。紙でできた多角形にハサミを入れ（切るときは直線に沿って切るとします）それはまた組み合わせ直すと面積が同じ多角形ができます。では逆に面積が同じ多角形は有限回ハサミを入れ、組み替えることでお互いに移り会うことができるか、という問題が自然にでてきます。平面であれば可能だということが知られています。そのことを確かめるのがこの問題です。3 次元の場合に可能かどうかを問うたのがヒルベルトの第 3 問題です。これは不可能だということを Dehn というすぐれた幾何学者が 1900 年に証明しました。さまざまな数学の分野と関係し、今でも活発な分野です。

ジュニア、シニアの第二問
「循環節の長さを指定した循環小数」
　十進法表示したときに、10 の約数でない素数 p をとると 1/p は無限小数になることはみなさん経験上ご存知だと思います。たとえば 1/3 = 0.3333…となります。この循環節の長さを問う問題です。素数 p を法として考えた時に 10 を n 乗して 1 となる最小の n が循環説の長さとなります。そのような n は必ず p-1 の約数となることが知られています。同じことは 10 の代わりに 2 で考えたときに、無限個の素数に対して n=p-1 となるだろう、というのがアルティン予想です。暗号理論など、びっくりするようなところに応用がある問題です。

シニアの第三問
「曲がったものを真っ直ぐに」
　本などをコピーするときに、どうしても平にならないので、中心部分が歪んでしまいます。それを数学的に考えて補正しよう、という問題です。幾何的に考えれば、ページの面の法線ベクトル（面に垂直なベクトル）の動き方を見る、というアイデアが重要でガウスの曲率という概念の基礎になっています。かなり近いところまでいった人たちがいるのでびっくりしました。ここでは、展開可能な曲面のガウス写像は曲線になる、という定理の応用例となります。

ジュニアの第三問
「ＰＫ戦略」
　ゲーム理論の問題です。フォンノイマンによって開拓された分野で、ここではゼロサムゲームと呼ばれる場合を取り扱っています。現在ではさまざまな分野で活躍している考え方です。

ジュニア・シニアの第四問
「効率のよいテニスの練習を行うためには」
　実際にテニス部の顧問をされている先生が出された問題です。複雑そうな問題もグラフを考えると明快に解決できる好例です。実験計画法といった分野にも応用が利きそうですね。

以上すべての問題について、参加者の皆さん、よく頑張ってくださったと思います。

（2）日本数学コンクール問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　鈴木　紀明（名城大学理工学部　教授）
岩本　隆宏（三重県立伊勢高等学校　教頭）
奥田　真吾（三重県立津西高等学校　講師）
田邉　　篤（三重県立津高等学校　教諭）
小倉　一輝（三重県立上野高等学校　講師）

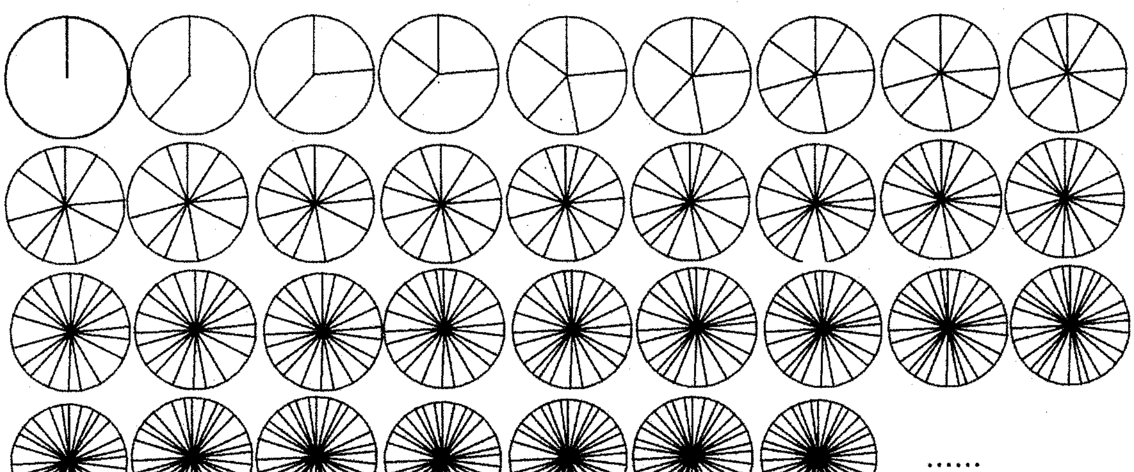
問題１．「キャベツの黄金比」

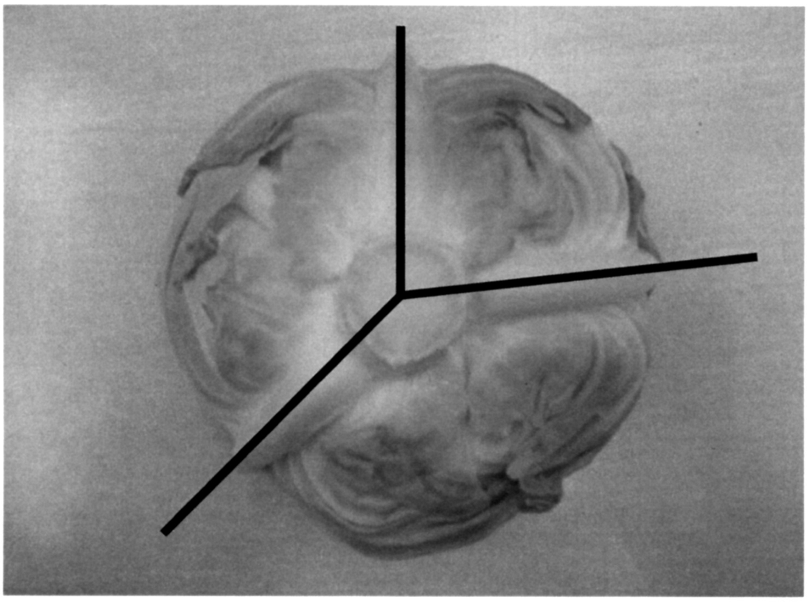
キャベツの葉を外側から順に１枚ずつ取っていき、葉の中央の太い芯どうしの角度を順に分度器で測ると常に137.5°ぐらいであることがわかります。この角度は、円周を黄金比$1:\phi$（ただし$\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$）に分けたときの１に相当する角、すなわち$360°\times\dfrac{1}{1+\phi}=137.5077641\cdots°$で、黄金角と呼ばれており、一般的に、植物は葉を１枚ずつ黄金角の間隔で付けていくと言われています。キャベツも例外ではありません。これが原因で、スーパーマーケットで売り出されているキャベツがあのような丸く引き締まったいい形になっていると考えられます。下図は写真のようにキャベツを裏側から見て、葉が内側に１枚ずつ増えていく様子を、葉の中央の太い芯の中央ラインを時間順に記入して表したものです。（キャベツは写真のように左回転のものと、逆の右回転のもの２種類がありますが、表裏を逆にすれば逆回転になり、どちらでもよいことになります。）

(1) もし、葉の中央の太い芯どうしの角度が135°だったら、どんな状態になるのか解答用紙の１つの円に記入し、実験してみてください。また、気付いた点があれば、書いてください。

(2) もし、葉の中央の太い芯どうしの角度が138°だったら、どんな状態になるのか解答用紙の１つの円に記入し、実験してみてください。ただし、少なくとも15枚の葉は付けてください。また、気付いた点があれば、書いてください。

(3) なぜ、キャベツの葉が１枚ずつ黄金角の間隔で付けていくと、キャベツはあのような丸く引き締まったいい形になるのでしょうか理由を説明してください。必要があれば関係式$\phi^2=\phi+1$を用いて構いません。

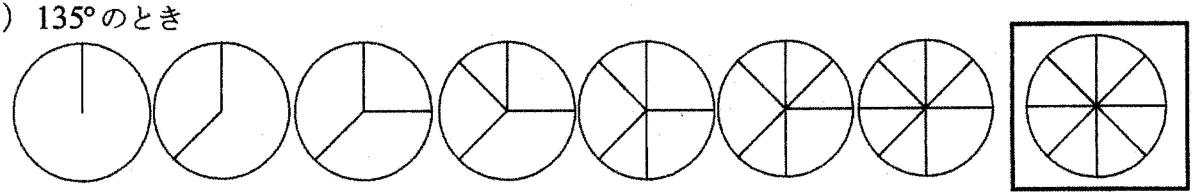




解説と講評

キャベツの葉を１枚１枚取って行くと徐々に小さくなっていきますが、商品になるまでに剥ぎ取られる枚数も考慮すれば、全部で 60 枚ぐらいになり、言うまでもなく有限枚数ですが、無限枚数として考えると、数学的意味が見えてきます。また、キャベツは人間が食物として穫り入れなければ、どんどん背も高くなり人間よりも大きくなると言われています。そして、他の植物と同様に、全ての葉に万遍無く日光が当たり、光合成ができるように１枚１枚の葉は重ならないようにバラけることが宿命付けられています。キャベツがなぜ丸くなるのかということは、なぜ黄金角であるとバラけるようになるのかを考えることになります。薔薇はなぜ美しいのかということと同じなのですが、客観的に最も認識し易く問題として最適なのがキャベツだということです。(以下のキャベツの図は、左回転で表します)

(1) 135°のとき

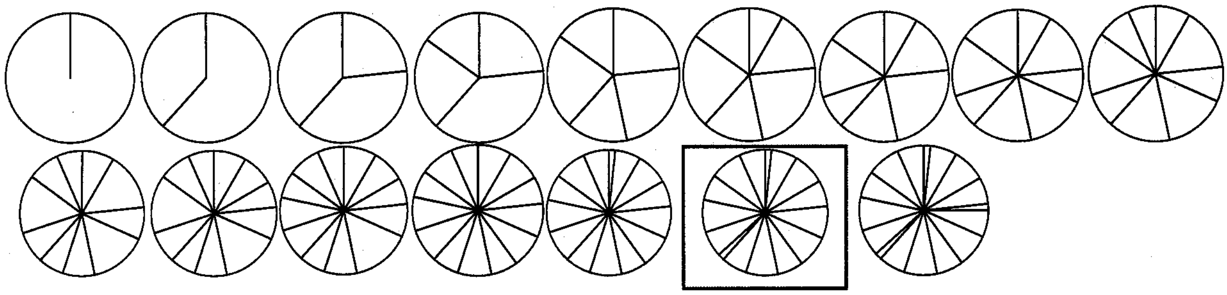


となり、この図形のまま変化せず、芯は重なり続けることになります。

n回で同じ位置に戻るとすると、$135n=360m$　となる整数mがあり、$3n=8m$となり、3と8は互いに素であるから、$n=8k$（kは整数）とおけます。すなわち、8回ごとに同じ位置に戻り、繰り返しが起こります。よって、芯は、重なり続け、芯の所だけが厚くなり、段差が起こり、丸くならないと予測できます。葉の間隔の角の変化は次のようになります。

2枚目	135°	:	225°	(1：1.666)	(135° : 360°−135°)
3枚目	135°	:	90°	(1.5：1)	(上の小さい角はそのまま：上の大きい角−上の小さい角)
5～7枚目	45°	:	90°	(1：2)	
8枚目	45°	:	45°	(1：1)	

(2) 138°のとき



14 枚目で初めて急に狭い角が現れ、15・16 枚目も同じ現象が起こり、丸くならないと予測できます。138 も 135 と同様に、有理数であるから、(1) と同様に計算してみることができるはずです。

もし、n 回で同じ位置に戻るとすると、$138n = 360m$ となる整数 m があり、$23n = 60m$ となり、23 と 60 は互いに素であるから、$n = 60k$ （k は整数）とおけます。すなわち、60 回ごとに同じ位置に戻り、繰り返しが起こります。しかし、キャベツは 60 枚程度なので、図から分かるように、14 枚目から急に狭い角が現れたことが丸くならない根拠になると思われます。葉の間隔の角の変化は次のようになります。

2 枚目	138°	:	222°	(1:1.60869)	$360° = 138° + 222° = 138° + (138° + 84°)$
3 枚目	138°	:	84°	(1.64285:1)	$= 2\times138° + 84° = 2(54° + 84°) + 84°$
5 枚目	54°	:	84°	(1 : 1.5)	$= 2\times54° + 3\times84° = 2\times54° + 3\times(54° + 30°)$
8 枚目	54°	:	30°	(1.8 : 1)	$= 5\times54° + 3\times30° = 5(24° + 30°) + 3\times30°$
13 枚目	24°	:	30°	(1 : 1.25)	$= 5\times24° + 8\times30° = 5\times24° + 8(24° + 6°)$
21 枚目	24°	:	6°	(4 : 1)	$= 13\times24° + 8\times6° = 13(18° + 6°) + 8\times6°$
34 枚目	18°	:	6°	(3 : 1)	$= 13\times18° + 21\times6° = 13(12° + 6°) + 21\times6°$
47 枚目	12°	:	6°	(2 : 1)	$= 13\times12° + 34\times6° = 13(6° + 6°) + 34\times6°$
60 枚目	6°	:	6°	(1 : 1)	$= 60\times6°$

(2～34 枚までは、フィボナッチ数列になっています。)

(3) 黄金角のとき

(1) (2) から、角度が有理数であれば必ず有限回で重なることがわかります。すなわち、葉が重ならないためには、「円周と角度の比が無理数であればよい」が第 1 必要条件です。
この点について、詳しく考察していたのは、中村悠人さん(智辯学園高 2 年)、吉田知史さん(旭丘高 1 年)、河村拓実さん(明和高 1 年)、西村祐輝さん(旭丘高 1 年)でした。特に、中村悠人さんは、白銀比の $\sqrt{2}$ についても調べていました。

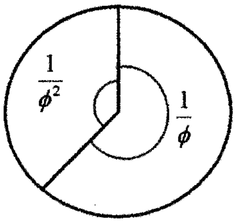
また、どんな無理数でも無限回すれば、葉はすき間が開くことなく一様に分散します。すなわち、キャベツの図は葉の芯で埋め尽くされ真っ黒になってしまいます。それはワイルの一様分布定理と呼ばれているものです。その定理は「無理数の整数倍の小数部分は区間 $[0,1)$ に一様分布する」、言い換えると、「α が無理数のとき、円の角度 $2\pi n\alpha$ の位置に点を付けていくと、点は一様に分散する」であり、証明は話題豊富な『フーリエ解析大全(上)』(ケルナー著、朝倉書店)等に載っています。

次に、「有限個でもなるべく一様に分散すること」が第 2 必要条件になります。どんな無理数でも、時間の経過とともに一様に散らばるとは限りません。では、黄金比の場合を調べてみましょう。

まず、2 枚目の葉から考えます。

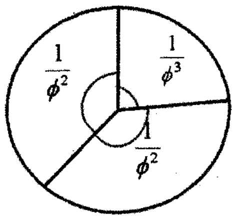
角度の変化を調べてみることにします。円周の長さを 1 に固定すると変化が分かり易くなります。

$\phi^2=\phi+1$の両辺をϕ^2で割ると、$1=\dfrac{1}{\phi^2}+\dfrac{1}{\phi}$ … ①となり、$1:\phi=\dfrac{1}{\phi^2}:\dfrac{1}{\phi}$であるから、



円周の長さを１とすると、１を$\dfrac{1}{\phi^2}:\dfrac{1}{\phi}$に内分する角の$\dfrac{1}{\phi^2}$の方を黄金角と言っていることになります。
（2πを掛ければ、弧度法(ラジアン)になります）

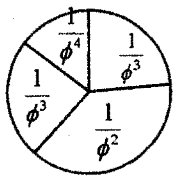
３枚目の葉を考えます。①の両辺をϕで割ると、$\dfrac{1}{\phi}=\dfrac{1}{\phi^3}+\dfrac{1}{\phi^2}$ … ② であるから、

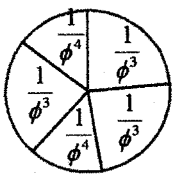


②を①に代入すると、$1=\dfrac{1}{\phi^2}+\left(\dfrac{1}{\phi^3}+\dfrac{1}{\phi^2}\right)$ よって、$1=\dfrac{2}{\phi^2}+\dfrac{1}{\phi^3}$ … ③

すなわち、$\dfrac{1}{\phi^2}$が２個、$\dfrac{1}{\phi^3}$が１個の２種類で構成されています。

次に、４・５枚目の葉を考えます。





②の両辺をϕで割ると、$\dfrac{1}{\phi^2}=\dfrac{1}{\phi^4}+\dfrac{1}{\phi^3}$ … ④ であるから、

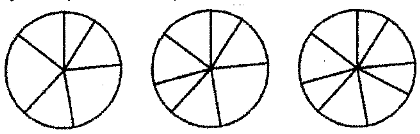
４枚目では、③の１個目の$\dfrac{1}{\phi^2}$に④を代入すると$1=\left(\dfrac{1}{\phi^4}+\dfrac{1}{\phi^3}\right)+\dfrac{1}{\phi^2}+\dfrac{1}{\phi^3}$となり、

$\dfrac{1}{\phi^4}$が１個、$\dfrac{1}{\phi^3}$が２個、$\dfrac{1}{\phi^2}$が１個の３種類で構成されています。５枚目では、

④を③に代入すると、$1=2\left(\dfrac{1}{\phi^4}+\dfrac{1}{\phi^3}\right)+\dfrac{1}{\phi^3}$ よって、$1=\dfrac{2}{\phi^4}+\dfrac{3}{\phi^3}$ … ⑤

すなわち、$\dfrac{1}{\phi^4}$が2個、$\dfrac{1}{\phi^3}$が3個の２種類で構成されています。

次に、6～8枚目の葉を考えます。



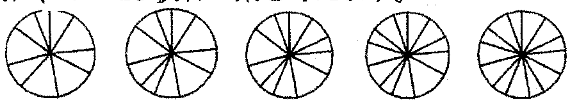
④の両辺をϕで割ると、$\dfrac{1}{\phi^3}=\dfrac{1}{\phi^5}+\dfrac{1}{\phi^4}$ … ⑥ であるから、

6・7枚目では、4枚目と同様に、$\dfrac{1}{\phi^5}$、$\dfrac{1}{\phi^4}$、$\dfrac{1}{\phi^3}$の3種類で構成されています。

8枚目では、⑥を⑤に代入すると、$1=\dfrac{2}{\phi^4}+3\left(\dfrac{1}{\phi^5}+\dfrac{1}{\phi^4}\right)$ よって、$1=\dfrac{5}{\phi^4}+\dfrac{3}{\phi^5}$ … ⑦

すなわち、$\dfrac{1}{\phi^4}$が5個、$\dfrac{1}{\phi^5}$が3個の2種類で構成されています。

次に、9～13枚目の葉を考えます。



⑥の両辺をϕで割ると、$\dfrac{1}{\phi^4}=\dfrac{1}{\phi^6}+\dfrac{1}{\phi^5}$ … ⑧ であるから、

9～12枚目では、$\dfrac{1}{\phi^6}$、$\dfrac{1}{\phi^5}$、$\dfrac{1}{\phi^4}$の3種類で構成されています。

13枚目では、⑧を⑦に代入すると、$1=5\left(\dfrac{1}{\phi^6}+\dfrac{1}{\phi^5}\right)+\dfrac{3}{\phi^5}$ よって、$1=\dfrac{8}{\phi^5}+\dfrac{5}{\phi^6}$ … ⑨

すなわち、$\dfrac{1}{\phi^5}$が8個、$\dfrac{1}{\phi^6}$が5個の2種類で構成されています。

以上から、フィボナッチ数列が非常に関係していることが分かってきました。フィボナッチ数列ごとに、角が2種類になり、それ以外は3種類になっていることが分かります。

フィボナッチ数列$\{F_n\}$とは、最初の2つは1で、その後はどの場合も、直前の2つの和となっている数の列、すなわち、1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……であり、問題のキャベツの図が34個になっているのも偶然ではありません。フィボナッチ数列に気付いた人もあるでしょう。フィボナッチ数列の漸化式は、$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\geqq 1)$ です。

> $F_{n+1}(n\geqq 1)$枚目では、①より$1=\dfrac{F_{n+1}}{\phi^n}+\dfrac{F_n}{\phi^{n+1}}$…②と変形でき、即ち、$\dfrac{1}{\phi^n}$が$F_{n+1}$個、$\dfrac{1}{\phi^{n+1}}$が$F_n$個の2種類…③で構成される。

これを、数学的帰納法で証明しましょう。

(i) $k=1$のとき、①は、②より$1=\dfrac{F_2}{\phi^1}+\dfrac{F_1}{\phi^2}=\dfrac{1}{\phi}+\dfrac{1}{\phi^2}$と一致し、③も成立している。

(ii) $n=k$のとき②が成り立つと仮定すると、

$1=\dfrac{F_{k+1}}{\phi^k}+\dfrac{F_k}{\phi^{k+1}}$ … ④ 即ち $\dfrac{1}{\phi^k}$がF_{k+1}個、$\dfrac{1}{\phi^{k+1}}$がF_k個の2種類で構成される。

①$1=\dfrac{1}{\phi^2}+\dfrac{1}{\phi}$の両辺を$\phi^k$で割ると、$\dfrac{1}{\phi^k}=\dfrac{1}{\phi^{k+2}}+\dfrac{1}{\phi^{k+1}}$となり、これを④に代入すると、

$1=F_{k+1}\left(\dfrac{1}{\phi^{k+2}}+\dfrac{1}{\phi^{k+1}}\right)+\dfrac{F_k}{\phi^{k+1}}$、 $1=\dfrac{F_{k+1}+F_k}{\phi^{k+1}}+\dfrac{F_{k+1}}{\phi^{k+2}}$、$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ より、

$1=\dfrac{F_{k+2}}{\phi^{k+1}}+\dfrac{F_{k+1}}{\phi^{k+2}}$、即ち $\dfrac{1}{\phi^{k+1}}$がF_{k+2}個、$\dfrac{1}{\phi^{k+2}}$がF_{k+1}個の2種類で構成される。

よって、　$n=k+1$ のときも②、③は成り立つ。

(i)(ii)より、すべての自然数 n について、②、③は成り立つ。　　　　　　　　Q.E.D.

この２・３種類になることは、(1)、(2)の有理数においても同じことが言えるので、これだけでは、なぜキャベツが丸くなる理由にはなりません。

また、良く見ると次のことが分かります。

２枚目は、１周を左回りに、$\frac{1}{\phi^2}:\frac{1}{\phi}=1:\phi$ に内分しています。

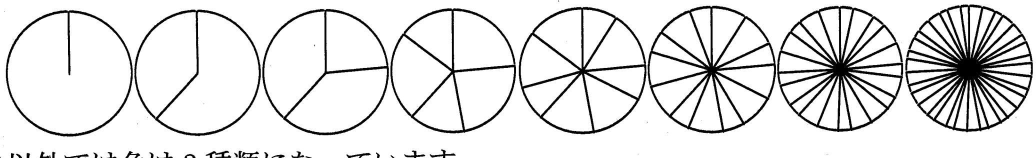
３枚目は、大きい方の角 $\frac{1}{\phi}$ を左回りに、$\frac{1}{\phi^2}:\frac{1}{\phi^3}=\phi:1$ に内分しています。

4・5 枚目は、大きい方の角 $\frac{1}{\phi^2}$ を左回りに、$\frac{1}{\phi^4}:\frac{1}{\phi^3}=1:\phi$ に内分しています。

6～8　枚目は、大きい方の角 $\frac{1}{\phi^3}$ を左回りに、$\frac{1}{\phi^4}:\frac{1}{\phi^5}=\phi:1$ に内分しています。

9～13　枚目は、大きい方の角 $\frac{1}{\phi^4}$ を左回りに、$\frac{1}{\phi^6}:\frac{1}{\phi^5}=1:\phi$ に内分しています。

一般的に、フィボナッチ数枚目ごとに、$1:\phi$ 、$\phi:1$ に交互に内分していることが分かります。即ち、

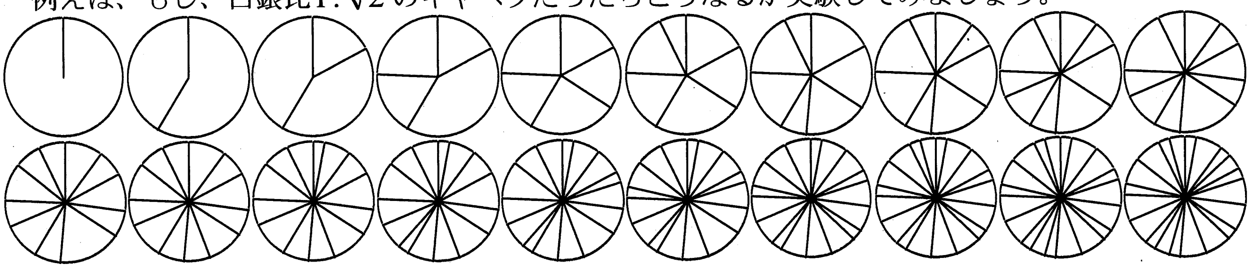
> $F_n+1 \sim F_{n+1}(n \geqq 2)$ 枚目は、２種類ある角の大きい方の角 $\frac{1}{\phi^{n-2}}$ を、$k=1, 2, 3, \cdots$ として
>
> $n=2k$ のときは $1:\phi$ に、$n=2k+1$ のときは、$\phi:1$ に内分しています。($1:\phi^{(-1)^n}$ に内分とまとめられます。)
>
> また、そのことから、フィボナッチ数 F_n 枚目では角は２種類です。
>
> 
>
> ……
>
> それ以外では角は３種類になっています。

このように、調和のとれた安定した葉の付きようをしており、急に狭い角が現れることはありません。ここに、キャベツがなぜ丸くなるのかの理由があると思われます。

宮川純一さん(鶯谷高２年)、根尾創さん(高槻高２年)は、上記の角の変化について最大角を $1:\phi$ に内分していることまで見出していました。特に、宮川純一さんは、フィボナッチ数列の場合についての角の状況を把握して n の偶数､奇数の場合分けをし、証明に挑戦していました。大変素晴らしいと思います。

葉の付きようを数学的に考察すれば、日頃見ているキャベツからは予想できない程緻密な構造になっていることに驚かされます。他の無理数ではこのようなことは起こらないようです。

例えば、もし、白銀比 $1:\sqrt{2}$ のキャベツだったらどうなるか実験してみましょう。



……

1～2 は $1:\sqrt{2}$ 、３は $1+\sqrt{2}:1$ 、4～5 は $\sqrt{2}:1$ 、6～7 は $1:1+\sqrt{2}$ 、8～12 は $1:\sqrt{2}$ 、13～17 は $1+\sqrt{2}:1$

といろいろ変化しています。黄金比と比較すれば、偏りがあると言わざるを得ません。

また、(1)、(2)と同様に、黄金角 $137.5077641\cdots^\circ$ に最も近い有理数を 137.5° として考えてみましょう。もし、n 回で同じ位置に戻るとすると、$137.5n=360m$ となる整数 m があり、$55n=144m$ となり、55と144は互いに素であるから、$n=144k$（k は整数）とおけます。すなわち、144回ごとに同じ位置に戻り、繰り返しが起こります。何と55, 144はフィボナッチ数 F_{10}, F_{12} でした。よく知られているように、フィボナッチ数列の一般項 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\phi^n-(-\phi)^{-n}\right\}$ に黄金比が含まれていることは、いかにフィボナッチ数列と黄金比が密接な関係にあるのかが分かります。

実は、時と共に最も一様に分布するのは黄金角であることが、既に証明されていることが分かってきました。H.Steinhaus が最初に推測し、1957 年に連分数を用いて Vera T. Sós（ブタペスト大）が証明しました。また、1973 年にそれを、D.E.Knuth は Vera T. Sós の論文より分かり易い形で証明を与えました。1983 年にアメリカの C.Marzec(生物学者)と J.Kappraff は論文「Properties of Maximl Spacing on a Circle Related to Phyllotaxis (葉序)and to the Golden Mean」(＊)で更に詳しく分析をしています。Knuth 著『The Art of Computer Programming Volume 3 Sorting and searching Second Edition 日本語版』(ASCII) にある定理の概要をそれを含んだ(＊)を中心にして見てみることにします。

【定理】 αを任意の無理数とする。点$\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, $\{3\alpha\}, \cdots, \{n\alpha\}$を線分$[0,\ 1]$内に配置するとき、$n+1$個の線分は多くとも 3 種類の異なった長さをもつ。さらに、次の点$\{(n+1)\alpha\}$は存在する最も大きい線分の中に入る。ただし、$\{x\}$はxの小数部分を表す。すなわち、$\{x\} \equiv x \bmod 1$。また、2 つの数$\dfrac{1}{\phi}$, $\dfrac{1}{\phi^2}$が 0 と 1 の間にあるすべてのαの中で、「最も一様に分布する数列」を与える。$\dfrac{1}{\phi}$, $\dfrac{1}{\phi^2}$を除くαにおいては、最大の区間を「悪い分割」する$\{n\alpha\}$が存在する。ただし、「悪い分割」とは、ある区間$[a,\ c]$を$[a,\ b]$と$[b,\ c]$に分割するとき、一方が他方を 2 倍より大きくなる、すなわち、$b-a>2(c-b)$またはc$-b>2(b-a)$となる分割のことを言う。結局、$\alpha=\dfrac{1}{\phi}$と$\alpha=\dfrac{1}{\phi^2}$は、黄金分割$\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac}}=\dfrac{1}{\phi}$または$\dfrac{1}{\phi^2}$により、それぞれの最大の区間を分割する根拠となる。

まず、連分数の記号について、簡単に見ておきましょう。

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots \cfrac{}{a_n}}}}=[a_0\ ;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_n]$$

とし、αは無理数であり、$0<\alpha<1$より、$\alpha=[0\ ;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots]$と無限に続く連分数に変形できる。

そこで、有限のa_kまでで切り、1つの分数にして、

$$[0\ ;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_k]=\frac{P_k}{Q_k} \qquad \text{「}k\text{ 次有理数近似」と呼ぶ。}$$

例えば、上記で黄金角$\dfrac{2\pi}{\phi^2}=137.5077641\cdots^\circ$に最も近い有理数を 137.5° として考えたが、

$\dfrac{2\pi}{\phi^2}=\dfrac{137.5077641\cdots}{360}$の連分数表示の 10 次有理数近似$[0\ ;\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]=\dfrac{55}{144}$となっている。

また、$k \geqq 1$のとき、$\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{(-1)^k}{Q_{k-1}Q_k}$, $k \geqq 2$のとき、$\dfrac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}-\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-2}}a_k$

そして、$k \geqq 2$のとき、$\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{P_{k-2}+a_kP_{k-1}}{Q_{k-2}+a_kQ_{k-1}}$が成り立つ。

2つの有理数近似、$\dfrac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$と$\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$に対応して、中間分数と呼ばれる

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}},\ \frac{P_{k-2}+P_{k-1}}{Q_{k-2}+Q_{k-1}},\ \cdots,\ \frac{P_{k-2}+a_kP_{k-1}}{Q_{k-2}+a_kQ_{k-1}}=\frac{P_k}{Q_k}\ \text{が存在する。}$$

また、中間分数の分母を中間近似と呼ぶことにする。

【Knuth の証明の概要】(具体例を考え、実験をして確認して見てください)

任意の無理数αを、$\alpha=[0\ ;\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_k,\cdots]$とすると、各正の整数$n$は、

$n=tQ_k+Q_{k-1}+s\ \cdots$ ① と表せ、ただ一通り決まる。

①において、Q_k, Q_{k-1}はそれぞれαのk次、$(k-1)$次近似である。

整数$k,\ t,\ s$は$k \geqq 0,\ 1 \leqq t \leqq a_{k+1},\ 0 \leqq s < Q_k$となる。ある組合せ$n,\ t,\ k,\ s$が①を満たしているなら、$n$が 1 ずつ増加するとき、$s$は 1 ずつ増加する。ただし、$s<Q_k-1$。

しかし、$s=Q_k-1$ならば、$s=0$になり、tは 1 ずつ増加する。ただし、$t<a_{k+1}-1$。

だが、$s=\mathrm{Q}_k-1$ かつ $t=a_{k+1}$ のとき、$s=0,\ t=0$ になり、k は1ずつ増加する。
これらの法則は、n がある近似かある中間近似に等しい場合、$s=0$ という結果になる。
点 $\{n\alpha\}$ を挿入する直前の n 個の区間は、次のように、3種類の区間に分類される。
1種類目は長さ $\left\{(-1)^k(t\mathrm{Q}_k+\mathrm{Q}_{k-1})\alpha\right\}$ の最初の s 個の区間があり、2種類目は長さ $\left\{(-1)^{k+1}\mathrm{Q}_k\alpha\right\}$ の最初の $n-\mathrm{Q}_k$ 個の区間があり、3種類目は長さ $\left\{(-1)^k((t-1)\mathrm{Q}_k+\mathrm{Q}_{k-1})\alpha\right\}$ の最後の Q_k-s 個の区間がある。
$\alpha=[0\,;\,a_1,\,a_2,\,a_3,\cdots]$、$\alpha_k=[0\,;\,a_{k+1},\,a_{k+2},\cdots]$ のとき、$q_k=\mathrm{Q}_k+\mathrm{Q}_{k-1}\alpha_{k-2}$ とおく。もし、$a_1>2$ ならば、最初の段階で「悪い分割」になってしまう。3種類の間隔の長さは、それぞれ
$\dfrac{1-t\alpha_{k-1}}{q_k},\ \dfrac{\alpha_{k-1}}{q_k},\ \dfrac{1-(t-1)\alpha_{k-1}}{q_k}$ となり、1番目と2番目の比は、$(a_k-t)+\alpha_k$ となる。この比は、$t=a_k$ かつ $a_{k+1}\geqq 2$ のとき、$\dfrac{1}{2}$ より小さくなる。ゆえに、「悪い分割」(上記(2)の 4：1，3：1、白銀比の $1+\sqrt{2}:1$ 等) にならないようにするならば、$\{a_2,a_3,\cdots\}$ は、すべて1にならなければならない。
すなわち、$\dfrac{1}{\phi}=[0\ ;\ 1,\ 1,\ 1,\cdots],\ \dfrac{1}{\phi^2}=[0\ ;\ 2,\ 1,\ 1,\cdots]$ のみである。
なぜなら、ϕ は、$x^2-x-1=0$ の解より、$x=1+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{1+x}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$

よって、$\dfrac{1}{\phi}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}=[0\ ;\ 1,\ 1,\ 1,\cdots],\quad \dfrac{1}{\phi^2}=\dfrac{1}{1+\phi}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}=[0\,;\,2,\ 1,\ 1,\cdots]$

宮本大輔さん(灘高3年)は、連分数を用いて議論をしており、証明に果敢に挑戦していました。大変素晴らしいと思います。また、ブルーバックス B1770 『連分数のふしぎ』(木村俊一著、講談社)には、黄金角がベストであることが連分数を用いて直感的にわかるように図解入りの説明があるので参照してください。その本にある、「有理数による近似が最も悪い無理数は、黄金比である。もしかしたら植物はそのことを知っていて、黄金比回転で葉っぱや松ぼっくりの鱗片を配置しているので、植物の渦巻きの腕の本数にフィボナッチ数が出てくるのかも知れない。」「黄金比は無理数の中でも最も無理数らしからぬ数だ」という言葉が印象的でした。
問題作成当初は、ベストな角は黄金角であることを数学的に証明する問題を考えていましたが、それが上記のように論文になるほどの超難問であることがわかり、(3)のような問題になりました。その点に関して、生物学者の近藤滋教授が植物の葉のバラけ具合を描くシミュレーションから消去法によって絞り込み、黄金角がベストであることをインターネットや著書で示されていました。問題作成のいい刺激を戴いたことは言うまでもありません。また、なぜ植物は黄金角に関係するのか、その理由の生物学者の観点からの解説は非常に読み応えがありますので、是非お読みください。他の参考文献も紹介しておきます。

・「こんどうしげるの生命科学の明日はどっちだ！？」
12:すべての植物をフィボナッチの呪いから救い出す
www.fbs.osaka‐u.ac.jp/skondo/.../ashitahadocchida.html
・「波紋と螺旋とフィボナッチ」　近藤　滋著　秀潤社　2013.9.(上記と同じ内容が8章です)
(『細胞工学』Vol.31 No.7　826-835　秀潤社 2012.6.)
・「The Art of Computer Programming Volume 3 Sorting and searching Second Edition 日本語版」ドナルド・E. クヌース著　ASCII　490, 519, 520, 696　(名古屋大学理学図書室所蔵)
・C.Marzec and J.Kappraff,　Properties of maximl spacing on a circle related to phyllotaxis and to the golden mean,　*J. Theor. Biol.* 103(1983), 201-226　(名古屋大学中央図書館所蔵)
・Vera Turán Sós, On the thory of Diophantine approximations. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957), 461-471 ;　On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$,　*Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 1 (1958), 127-134　(名古屋大学理学図書室所蔵)
・「黄金比とフィボナッチ数」　R.A.ダンラップ著　日本評論社　80-86
・「ファーブル植物記上・下」　J-H・ファーブル著　平凡社ライブラリー
・「幾何学入門上・下」　H.S.M.コクセター著　ちくま学芸文庫
・「シンメトリー」　ヘルマン・ヴァイル著　紀伊国屋書店

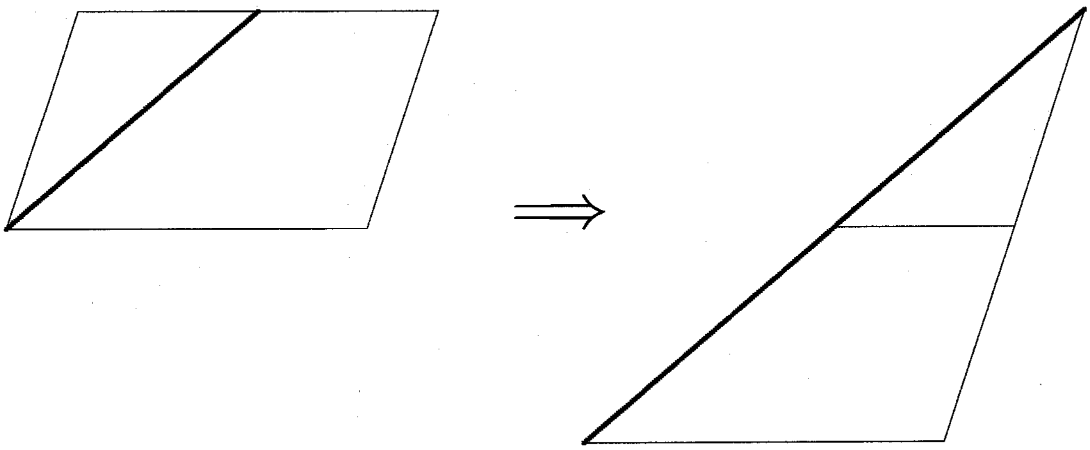
他にも関係文献はたくさんありますから、色々探求して見てください。新しい発見をするかも知れません。

（３）日本ジュニア数学コンクール問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
村田　英康（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）

問題１．「正方形」

切れ味は抜群ながら真っ直ぐにしか切れないノコギリがあります．このノコギリで色々な形の木板を切って，木片を別の形に並び変えることを考えます．たとえば，下図の左の平行四辺形を太線 (辺の中点と頂点を結んだ線分) のように切れば，右のように三角形に並び変えることができます．



(1) 面積 1 m^2 の平行四辺形の木板を切って，木片を正方形に並び変えてください．ただし，切る回数はなるべく少なくなるように工夫してください
(2) どんな多角形も何回か切ることによって，正方形に並び変えられることを証明してください．

解説と講評

(1) 以後，平行四辺形 $ABCD$ について $AB \geq AD$ かつ $\angle DAB \geq 90^\circ$ とし，辺 AB の長さを a とします．
(ア) $a = 1$ のとき．
$\angle DAB = 90^\circ$ ならば $ABCD$ は既に正方形なので，切る必要はありません．$\angle DAB > 90^\circ$ とし，点 A から辺 CD に降ろした垂線の足を E とします (図 1)．平行四辺形

$ABCD$ の面積 $AE \times AB$ は 1 に等しく $a = AB = 1$ だから $AE = 1$. よって図 2 のように直角三角形 ADE を切り取って三角形 BCF に移動することで, 正方形 $ABFE$ が出来ます.
(イ) $a > 1$ のとき.
辺 AB 上に $AP = 1$ となる点 P をとります. 平行四辺形 $ABCD$ の面積は 1 だから, 点 A から 辺 CD に降ろした垂線 AR の長さは $1/a < 1$. 線分 AR の延長上に $AQ = 1$ となる点 Q をとります. このとき A を中心とする半径 1 の円は P, Q を通り, 辺 BC または辺 CD と交わります. ここでは辺 CD と交わるものとし, その交点を E とします (辺 BC と交わるときも同様の議論ができるが, 省略). さらに点 B から線分 AE に降ろした垂線の足を F とします (図 3). このとき図 4 のように三角形 ADE を切り取って三角形 BCG に移動することで, 平行四辺形 $ABGE$ が出来ます. ここで $AE = 1$ ですから, (ア) の場合に帰着されることになりました. すなわち図 5 のように三角形 ABF を切り取って三角形 EGH に移動させれば, 正方形 $BGHF$ が出来ます.
(イ') (イ) と同じ状況で次のような別解もあります (切る回数は 1 回多い). 点 A から辺 CD に降ろした垂線の足を R とし, 線分 RC 上に $RS = PB = a - 1$ となるように点 S をとり, S を通る CD の垂線と PR との交点を T とします (図 6). このとき直角三角形 APR と SRT は相似だから $ST : SR = AR : AP$ より $ST = SR \times AR \div AP = (a-1) \times \frac{1}{a} \div 1 = 1 - \frac{1}{a}$ となります. 図 7 のように直角三角形 ADR を切り取って三角形 BCU に移動させることによって長方形 $ABUR$ が出来ます. 次に図 8 のように直角三角形 APR を切り取って三角形 VWT に移動させると, $VW = AP = 1$ であり,

$$VS = VT + TS = AR + ST = \frac{1}{a} + (1 - \frac{1}{a}) = 1$$

だから, 四角形 $VWUR$ は正方形をなします. さらに $RS = PB$ だから直角三角形 RST と PBW は合同です. したがって図 9 のように三角形 RST を切り取って PBW に移動させることによって正方形 $VWUR$ が出来上がります.

(2) まず多角形の面積を 1 として考えましょう. この多角形を幾つかの三角形に分割します. そして各々の三角形は問題文の操作を逆にする（すなわち二辺の中点を結ぶ線分で切る）ことによって平行四辺形に並び変えられます. さらに各々の平行四辺形は (イ) と類似の操作によって, 1 辺の長さが 1 の長方形に並び変えることができます. これらを集めて一つの大きな長方形ができますが, 全体の面積は 1 となるので, これは一つの正方形になります.

面積が一般の場合は, 面積が 1 である相似な多角形に対して上述の操作をし, それと相似な操作でもって元の多角形も正方形に並び変えられます.

小問 (1) については, (ア) の場合 ($a = 1$) には多くの人が解いていました. 一般の

場合, まずは (イ') のように長方形に並び変えるのは自然ですが, 長方形を正方形にするのが存外難しく, とにかく細かく切っていけば, いつかは正方形になるという議論が多くみられました. 実用的な解法としては理解できますが, 数学的には無限に操作が続く可能性があるので, この問題の解答としては不十分です. 小林尚暉君（暁中学校２年）は (イ) の方法で (1) を解き, (2) についても丁寧な議論で解答を与えていました. 中島拓巳君（大阪教育大学附属天王寺中学校２年）は（イ'）の方法で (1) を解き, (2) も簡潔な議論で解いていました. 伊藤利太朗君（暁中学校３年）, 高井万葉さん (本巣中学校３年), 森下龍之介君（日吉中学校３年）は (2) の解答に評価すべきアイディアがみられました.

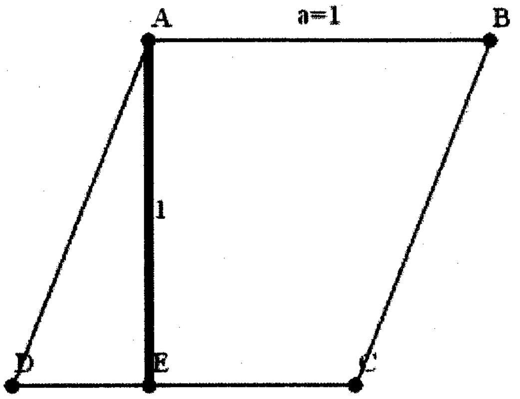


図１

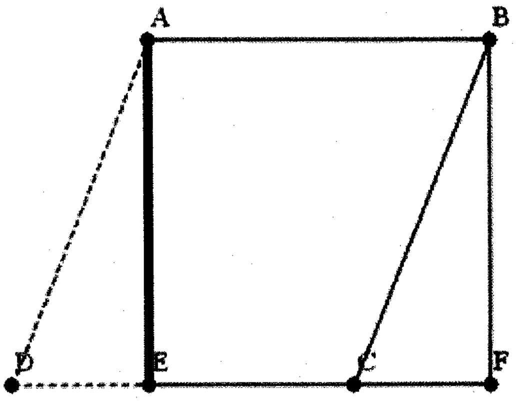


図２

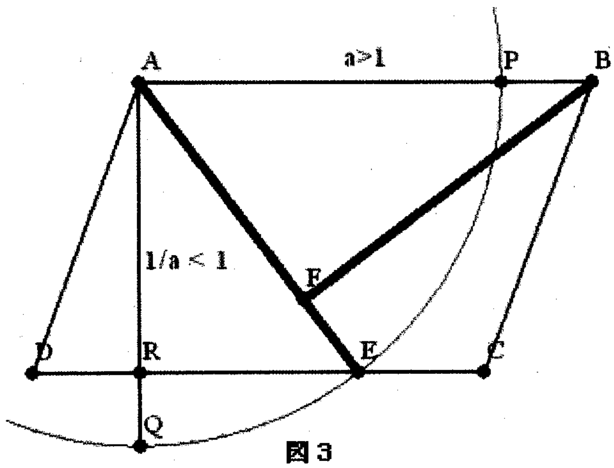


図３

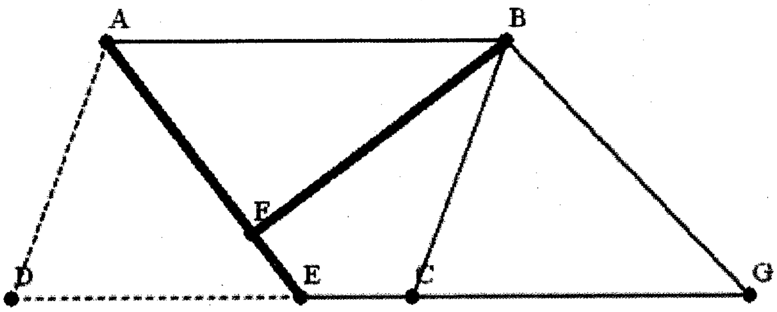


図４

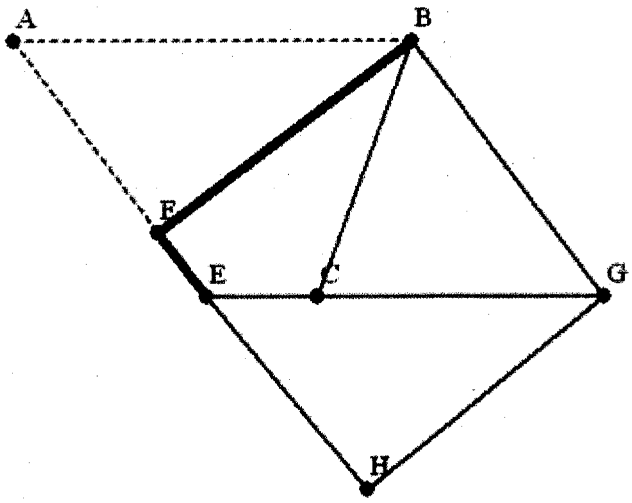


図５

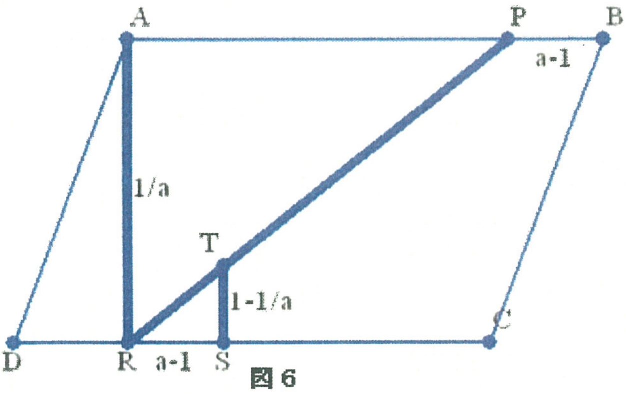


図6

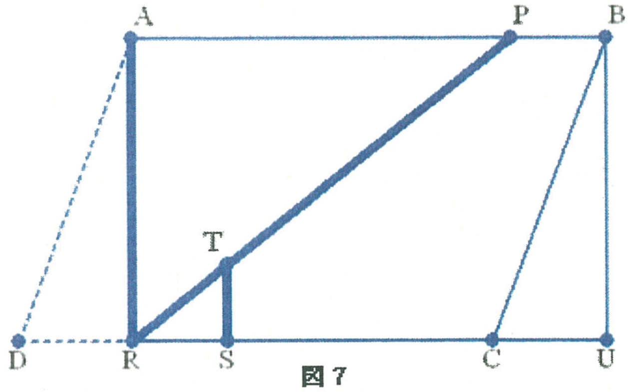


図7

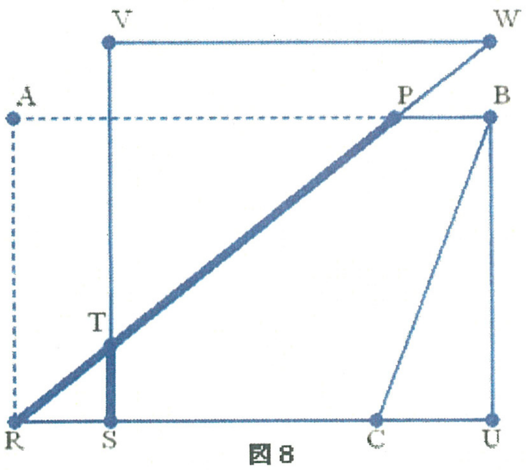


図8

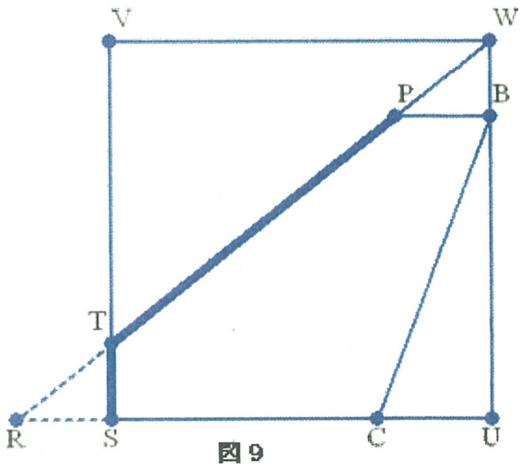


図9

(4) 日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール共通問題 第２問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　高原　文規（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
林　正人（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
野村　昌人（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
渡辺　喜長（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
大須賀裕貴（愛知県立時習館高等学校　教諭）

問題２．「循環節の長さを指定した循環小数」

142857 の不思議を聞いたことがあるでしょうか？

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 6 = 857142$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$

と、1 から 6 をかけると同じ数字の並びがズレながら繰り返していき、

$$142857 \times 7 = 999999$$

となります。不思議ですね。

タネを明かすと、これは $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857142857\cdots\cdots$ となることから説明できます。

このように、循環小数には不思議な性質があります。今日はそれを考えてみましょう。

分数を小数に直したとき、無限に続く無限小数になるならば、それは同じ数字の並びを繰り返す循環小数であること、繰り返す数字の並びを循環節ということを知っている人も多いと思います。また、循環節の数字の桁数を循環節の長さといいます。

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857142857\cdots\cdots$ の循環節は 142857 その長さは 6,

$\frac{1}{13} = 0.076923076923076923076923076923076923\cdots\cdots$ の循環節は 076923 その長さは 6,

$\frac{1}{11} = 0.090909090909090909090909090909090909\cdots\cdots$ の循環節は 09 その長さは 2 です。

このように分数を小数に直せば比較的簡単に循環節とその長さを知ることができます。今日はもう少し難しい問題にチャレンジしてみましょう。

$\frac{1}{素数}$ の形で循環節の長さが 7 になる分数を 1 つ求めてください。

これができたら、$\frac{1}{素数}$ の形で循環節の長さが 20 になる分数を全部求めることにも挑戦しましょう。

なおおまけで 5000 以下の素数の一覧表をつけておきます。

素数の表

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211,
223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347,
349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,
479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617,
619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761,
769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919,
929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051,
1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187,
1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303,
1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453,
1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579,
1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709,
1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867,
1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999,
2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131,
2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281,
2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399,
2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557,
2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699,
2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833,
2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971,
2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163,
3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307,
3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457,
3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581,
3583, 3593, 3607, 3613, 3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719,
3727, 3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853, 3863, 3877,
3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989, 4001, 4003, 4007, 4013, 4019,
4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099, 4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159,
4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231, 4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327,
4337, 4339, 4349, 4357, 4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483,
4493, 4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637, 4639, 4643,
4649, 4651, 4657, 4663, 4673, 4679, 4691, 4703, 4721, 4723, 4729, 4733, 4751, 4759, 4783, 4787, 4789, 4793,
4799, 4801, 4813, 4817, 4831, 4861, 4871, 4877, 4889, 4903, 4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957,
4967, 4969, 4973, 4987, 4993, 4999

解説と講評

今回の問題は電卓の持ち込みを前提とした問題です。もちろん試験時間が5時間半あるので電卓無しでも計算はできますが、循環節の長さが 20 になる分数を求めるときに時間がかなりかかってしまいます。また、電卓を使うにしても、最後の段階ではいかに効率よく答えにならない素数を省くかを考えることが大切です。

では、一緒に考えていきましょう。

I　循環小数の循環節の長さと分母の関係を考えます。

分数 $\dfrac{1}{p}$ が循環節の長さが n である循環小数になるとして、その n 個の数字の並びである循環節を R と表します。

$$\frac{1}{p} = 0.RRRRRRRR\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

両辺に $1\overbrace{000\cdots0}^{n\text{個}}$ をかけると、$\dfrac{1\overbrace{000\cdots0}^{n\text{個}}}{p} = R.RRRRRRRR\cdots\cdots \quad \cdots\cdots ②$

② − ① を計算して、$\dfrac{\overbrace{999\cdots9}^{n\text{個}}}{p} = R$　すなわち、$\overbrace{999\cdots9}^{n\text{個}} = pR$ となり、R は整数であるから、

$\overbrace{999\cdots9}^{n\text{個}}$ の約数の素数を見つければ良い。

と言えます。

ただし、同様にして、循環節 R' の長さが n の約数 k であるとき, $n = km$ となる自然数 m があるから,

$$\frac{1\overbrace{000\cdots0}^{n\text{個}}}{p} - \frac{1}{p} = \frac{\overbrace{999\cdots9}^{n\text{個}}}{p} = \overbrace{R'R'\cdots R'}^{m\text{個}}$$

も言えるので、$\overbrace{999\cdots9}^{n\text{個}}$ の約数の素数から, $\dfrac{1}{\text{素数}}$ を作っても、循環節の長さが n にならずに、n の約数 k になる場合もあるので、最後に、循環節の長さが n になる ことを確かめる必要があります。

II　次に分母の素数と循環節の長さの関係を考えます。

p を素数とすると,

$\dfrac{N}{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{\mathrm{p}} \times N$ であるから, $\dfrac{N}{\mathrm{p}}$　$(N = 1, 2, 3, \cdots, \mathrm{p}-1)$ の循環節の長さはすべて同じになる。

循環節の長さを n とすると、同じ数字の並びがずれた循環節は n 個ある。

すなわち, $p-1$ 個の $\dfrac{N}{p}$ は、n 個ごとの同じ数字の並びがずれた循環節の系列に分けられるから $p-1$ は n の倍数。

よって、適当な自然数 k を使って、$p = kn + 1$ と表される。

この、I, II が問題を解く鍵でした。

多くの人が I を見つけてくれました。村松美悠加さん、服部源太郎君、井澤俊弥君、後藤颯汰君、内田翔君などがこれを使って 999, 9999 や 9999, 9999, 9999, 9999, 9999 の素因数分解をしてくれました。

II を見つけてくれた人は少なかったのですが、中村佑匡君はこれを使ってきちんと解いています。

では実際に解いてみましょう。

(1) 循環節の長さが 7 になる分数

I より、999,9999 を素因数分解したときに出てくる素数です。

$999,9999 = 3^2 \times 111,1111$ ですから、111,1111 を素因数分解することになります。

II より、適当な自然数 k' を使って $7k'+1$ の形にかける素数ですが、k' が奇数のとき、$7k'+1$ は偶数になるので素数ではなくなります。

したがって、$k' = 2k$ となるときだけを考えればよく、素数は $14k+1$ とかけるものだけを考えます。

この条件で、$14k+1$ の数が素数かどうか判定するところから始めると大変なので素数の表をつけました。

素数の表からこの条件を満たす素数は、29, 43, 71, 113, 127, 197, 211, 239, ……

実際に割り算をすると、

$$\frac{1111111}{29} = 38314 + \frac{5}{29}$$
$$\frac{1111111}{43} = 25839 + \frac{34}{43}$$
$$\frac{1111111}{71} = 15649 + \frac{32}{71}$$
$$\frac{1111111}{113} = 9832 + \frac{95}{113}$$
$$\frac{1111111}{127} = 8748 + \frac{115}{127}$$
$$\frac{1111111}{197} = 5640 + \frac{31}{197}$$
$$\frac{1111111}{211} = 5265 + \frac{196}{211}$$
$$\frac{1111111}{239} = 4649$$

と 8 番目の候補の素数 239 が 111,1111 の約数になります。

商の 4649 も素数の表から素数であることがわかり、

$$\frac{4649}{14} = 332 + \frac{1}{14}$$

より、 $4649 = 14 \times 332 + 1$ で II の条件も満たすことがわかります。

実際に計算すると、

$$\frac{1}{239} = 0.0041841004184100418410041841\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{4649} = 0.0002151000215100021510002151\cdots\cdots$$

となり、確かに循環節の長さが 7 になる $\dfrac{1}{\text{素数}}$ の分数です。

さらに言うと、このような分数はこの 2 つしかありません。

(2) 循環節の長さが 20 になる分数

同様に考えればいいのですが、今度は 20 桁の数を扱わなくてはいけません。一般の電卓は 8 桁までしか扱えませんから、20 桁を 8 桁以下にする工夫が必要になります。
I より、答の素数は 9999,9999,9999,9999,9999 を素因数分解したときに出てくる素数です。

$9999,9999,9999,9999,9999 = 3^2 \times 1111,1111,1111,1111,1111$ ですから、1111,1111,1111,1111,1111 を素因数分解することになります。

さらに、20 の約数の、2 桁、4 桁、5 桁、10 桁の循環節を持つものもこの約数の中には有るはずです。

実際に、

$$9999,9999,9999,9999,9999 = 99 \times 101,0101,0101,0101,0101$$
$$9999,9999,9999,9999,9999 = 9999 \times 1,0001,0001,0001,0001$$
$$9999,9999,9999,9999,9999 = 9,9999 \times 1000,0100,0010,0001$$
$$9999,9999,9999,9999,9999 = 99,9999,9999 \times 100,0000,0001$$

となります。

これを踏まえてなるべく約数を出すと、

$$9999,9999,9999,9999,9999 = 3^2 \times 1,1111 \times 10,0001 \times 100,0000,0001$$

このうち、3 は循環節の長さ 1 です。

$1,1111 \times 10,0001 = 11,1111,1111$ は循環節の長さ 10 になりますから、循環節の長さ 5 の 1,1111 (この問題の解答には直接関係ありませんが、$1,1111 = 41 \times 271$ と素因数分解できて、これらを分母にもつ分数はどちらも循環節の長さは 5 になります。)、循環節の長さ 2 の 11 を約数に持ちます。

実際に割ってみると、

$$11,1111,1111 = 41 \times 271 \times 11 \times 9091$$

であり、41, 271 は循環節の長さ 5, 11 は循環節の長さ 2, 9091 は循環節の長さ 10 になります。

残る 100,0000,0001 の約数の中に、循環節の長さ 4 になる素数が入っているはずですが、$1111 = 11 \times 101$ で、101 は循環節の長さ 4 になる唯一の素数です。これを用いて、

$$100,0000,0001 = 101 \times 9900,9901$$

以上より、9900,9901 を素因数分解した中に求める素数があります。

これでようやく 8 桁の電卓で計算できる数になりました。
II より、適当な自然数 k を使って $20k+1$ とかける素数だけを考えます。

素数の表からこの条件を満たす素数は、41, 61, 101, 181, 241, 281, 401, 421, 461, 521, 541, 601, 641, 661, 701, 761, 821, 881, 941, 1021, 1061, 1181, 1301, 1381, 1481, 1601, 1621, 1721, 1741, 1801, 1861, 1901, 2081, 2141, 2161, 2221, 2281, 2341, 2381, 2441, 2621, 2741, 2801, 2861, 3001, 3061, 3121, 3181, 3221, 3301, 3361, 3461, 3541, ……

実際に割り算をすると、

$$\frac{99009901}{41}=2414875+\frac{26}{41} \quad \frac{99009901}{61}=1623113+\frac{8}{61} \quad \frac{99009901}{101}=980296+\frac{5}{101}$$
$$\frac{99009901}{181}=547016+\frac{5}{181} \quad \frac{99009901}{241}=410829+\frac{112}{241} \quad \frac{99009901}{281}=352348+\frac{113}{281}$$
$$\frac{99009901}{401}=246907+\frac{194}{401} \quad \frac{99009901}{421}=235177+\frac{384}{421} \quad \frac{99009901}{461}=214772+\frac{9}{461}$$
$$\frac{99009901}{521}=190038+\frac{103}{521} \quad \frac{99009901}{541}=183012+\frac{409}{541} \quad \frac{99009901}{601}=164741+\frac{560}{601}$$
$$\frac{99009901}{641}=154461+\frac{400}{641} \quad \frac{99009901}{661}=149788+\frac{33}{661} \quad \frac{99009901}{701}=141240+\frac{661}{701}$$
$$\frac{99009901}{761}=130104+\frac{757}{761} \quad \frac{99009901}{821}=120596+\frac{585}{821} \quad \frac{99009901}{881}=112383+\frac{478}{881}$$
$$\frac{99009901}{941}=105217+\frac{704}{941} \quad \frac{99009901}{1021}=96973+\frac{468}{1021} \quad \frac{99009901}{1061}=93317+\frac{564}{1061}$$
$$\frac{99009901}{1181}=83835+\frac{766}{1181} \quad \frac{99009901}{1301}=76102+\frac{1199}{1301} \quad \frac{99009901}{1381}=71694+\frac{487}{1381}$$
$$\frac{99009901}{1481}=66853+\frac{608}{1481} \quad \frac{99009901}{1601}=61842+\frac{859}{1601} \quad \frac{99009901}{1621}=61079+\frac{842}{1621}$$
$$\frac{99009901}{1721}=57530+\frac{771}{1721} \quad \frac{99009901}{1741}=56869+\frac{972}{1741} \quad \frac{99009901}{1801}=54974+\frac{1727}{1801}$$
$$\frac{99009901}{1861}=53202+\frac{979}{1861} \quad \frac{99009901}{1901}=52083+\frac{118}{1901} \quad \frac{99009901}{2081}=47578+\frac{83}{2081}$$
$$\frac{99009901}{2141}=46244+\frac{1497}{2141} \quad \frac{99009901}{2161}=45816+\frac{1525}{2161} \quad \frac{99009901}{2221}=44578+\frac{2163}{2221}$$
$$\frac{99009901}{2281}=43406+\frac{815}{2281} \quad \frac{99009901}{2441}=40561+\frac{500}{2441} \quad \frac{99009901}{2621}=37775+\frac{1626}{2621}$$
$$\frac{99009901}{2741}=36121+\frac{2240}{2741} \quad \frac{99009901}{2801}=35348+\frac{153}{2801} \quad \frac{99009901}{2861}=34606+\frac{2135}{2861}$$
$$\frac{99009901}{3001}=32992+\frac{909}{3001} \quad \frac{99009901}{3061}=32345+\frac{1856}{3061} \quad \frac{99009901}{3121}=31723+\frac{2418}{3121}$$
$$\frac{99009901}{3181}=31125+\frac{1276}{3181} \quad \frac{99009901}{3221}=30738+\frac{2803}{3221} \quad \frac{99009901}{3301}=29993+\frac{3008}{3301}$$
$$\frac{99009901}{3361}=29458+\frac{1563}{3361} \quad \frac{99009901}{3461}=28607+\frac{1074}{3461} \quad \frac{99009901}{3541}=27961$$

と 51 番目の候補の素数 3541 が 9900, 9901 の約数になります。

商の 27961 が素数であるかどうかは、167 までの 39 個の素数で割り切れるかどうかを確かめればよく、実際に割ってみると割り切れないので、27961 も素数であることがわかり、$27961 = 20 \times 1898 + 1$ で II の条件も満たすことがわかります。

実際に計算すると、

$$\frac{1}{3541} = 0.000282406099971759390002824060999717593900028240609997175939\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{27961} = 0.000035764099996423590000357640999964235900003576409999642359\cdots\cdots$$

となり、確かに循環節の長さが 20 になる $\frac{1}{\text{素数}}$ の分数です。

さらに言うと、このような分数はこの 2 つしかありません。

最後に

実際に 51 回の割り算を、電卓を使わずにやってみたところ、1 時間前後の時間がかかりました。

この解答では、条件 I、II だけを使って、素数をしぼりましたが、ここに書いていない条件を見つければ 51 回より少ない回数で答を見つけることができるでしょう。

また、割り算を計算するとき、間違いが少なく、効率よくできる方法を見つけるのもこの問題を解く方法でしょう。

これで一応の解答ですが、より良い方法はないか探してくれることを期待します。

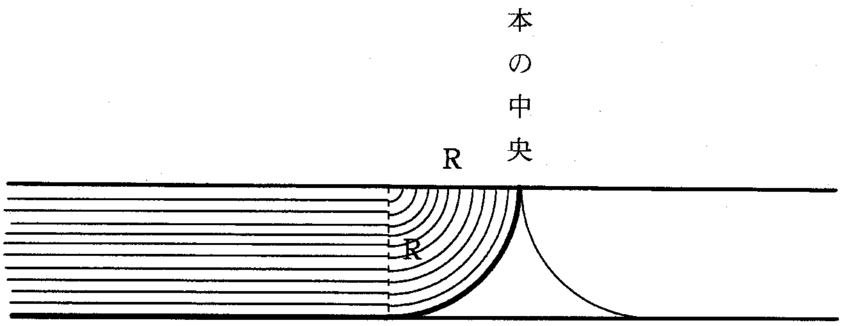
（5）日本数学コンクール問題第３問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　宇澤　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
小島　彰二（名古屋高等学校　教諭）
伊藤　慎吾（愛知県立明和高等学校　教諭）
服部　展之（愛知県立明和高等学校　教諭）

問題３．「曲がったものを真っ直ぐに」

厚手の本をコピーするとき、本の中央部分では文字が曲がってコピーされます。何とかこれらを復元したいと思います。次の２段階で問題を解決してください。

(1)本を開いた時、中央部分が、径Rの円柱状の曲面である時、復元方法を考察しなさい。
（下図参照のこと。）



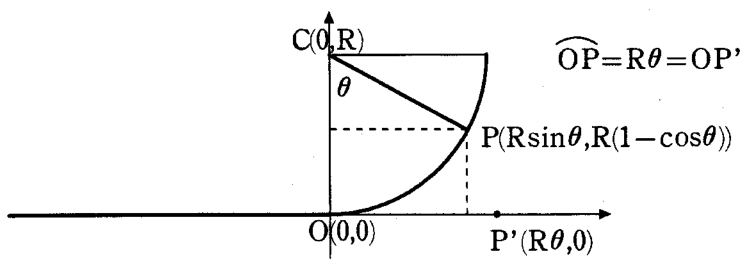
スキャナー面

(2) (1)を一般化し、本の曲がり具合を表す式(対応)を考え、復元方法を考察しなさい。

解説と講評

問題３番(1)の解説

右図のように各点、角度を定める。



従って、求める対応（或は関数）をfとすれば、f:P→P' つまり
f:R$\sin\theta \to R\theta$　となるので、$f(\sin\theta)=\theta$。これより、求める対応（或は関数）は
$f=\sin^{-1}\theta$ である。

問題3番の(2)の解説。

(1)の結果を踏まえれば、一般の場合も次のように考えることができる。

曲線がもし$y=f(x)$と表されたとすれば、それまでの曲線の部分の長さを求め、それを真っ直ぐに伸ばせばよいことになる。これが、求める対応である。

詳細は、数研出版、チャート式「基礎からの数学Ⅲ」P407,「41 曲線の長さ、速度と道のり」

基本事項　曲線の長さ②直交座標 曲線$y=f(x)(a\leqq x\leqq b)$の長さLは

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

によって求められる。

ここで、(1)の場合を検証しよう。（←(2)の特別な場合が(1)であることの確認作業）

4分の１円を表す式は、$y=f(x)=R-\sqrt{R^2-x^2}=R-(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$である。これを微分し、

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$ （合成関数の微分法）

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^x\sqrt{1+\{f'(t)\}}\,dt\\
&=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{t}{\sqrt{R^2-t^2}}\right)^2}\,dt\\
&=\int_0^x\sqrt{1+\frac{t^2}{R^2-t^2}}\,dt\\
&=\int_0^x\sqrt{\frac{R^2}{R^2-t^2}}\,dt\\
&=\int_0^x\frac{R}{\sqrt{R^2-t^2}}dt\\
&=\int_0^{\sin^{-1}\frac{x}{R}}\frac{R}{R\cos\theta}R\cos\theta\,d\theta\\
&=R\int_0^{\sin^{-1}\frac{x}{R}}d\theta\\
&=R\sin^{-1}\frac{x}{R}\\
&=R\theta
\end{aligned}$$

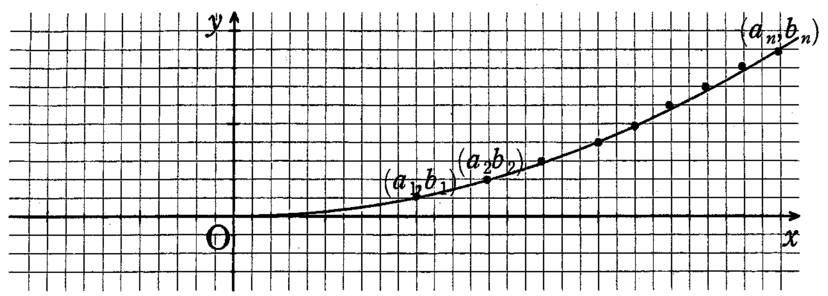
途中、$t=R\sin\theta$と変数変換を実行した。以上より、(1)は(2)の特別な場合であることが検証できた。

しかし、もう一歩踏み込んで、「では、どうやって、$y=f(x)$を知ることが出来るだろうか？」と、考察 をより一歩、深めて欲しかった。

問題の本質は「近似の精度をどれだけ上げることができるか。」にあることを、理解できたであろうか。しかも、実時間内（実用的な時間内）に、所期の目的が果たせる、具体的な処理手順を実現することが、要求されているのである。

スキャナー面に垂直な面で、かつ本の上面から正対する方向で、ページの曲線を計測する。

計測には、コピー機の（水平方向）スキャナーと連動する垂直方向スキャナーを使用する。スキャナー結果はグリッド単位で処理されるとする。



次のn個のデーターセットが得られたとする。$\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)\}$

$f(a_k)=b_k$となるような、関数$f(x)$を求めることが主題となる。具体的に多項式を求めようとすれば、実用上、よく使われるのは、B−スプライン曲線である。では、他に方法はないのだろうか。

以下は、高校数学の範囲を逸脱するが、極めて重要な定理なので、紹介しよう。
それは、クロード･シャノンの標本化定理（Sampling theorem）と呼ばれるものである。
岩波数学辞典（P.1325 415 G 415 フーリエ変換)によれば、

F. 標本化定理（サンプリング定理）

$f\in L_2(-\infty,\infty)$がR 上で連続で，ある正数K が存在し、$\hat{f}(\xi)=0$ (a.e. $\xi\in$R＼[−K,K]) であるとする．このとき$T=\pi/K$T とすると，任意の$t\in$Rに対て

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin K(t-nT)}{K(t-nT)}$$

が成立する．ただし右辺の級数はR 上で一様収束、かつ ノルム収束している．

これを標本化定理あるいはサンプリング定理という（Shannon，Whittaker，Kotel'nikov, 染谷ほか）．標本化定理は[−K,K] に帯域制限された連続信号が離散的なデータ$\{f(nT)\}_{n\in Z}$から復元できることを示している．

Shannonの原論文タイトルは「Communication in the Presence of Noise」である。
タイトルで検索すれば、pdfファイルで入手可能である。（Stanford大学：shannonpaper.pdf)

シャノンは「情報科学の父」と言われれるだけあって、現在の情報化社会の理論的背景を大方形成した人物と言える。情報の圧縮と復元、誤り訂正等、コンピュータと通信技術分野で多大の貢献を果たしたシャノン。bit、entropyの概念もシャノンを端緒とする。

intel4004の開発にはじまり、世の中全体が急速に情報化された。インターネット、携帯電話、携帯端末（i−pad等）の普及は人類の知識の集約と体系化を実現しつつある。電子書籍も普及し、既存の書籍を電子化（pdf化）する機会は多い。業者に頼まずに、「自炊」する場合、必ずと言ってよいほど、今回のテーマである「文字の彎曲コピー」に悩まされる。そこで「在ったらいいな、こんなコピー機」を発想して出来たのが本問だ。筆者が嘗てコピーをする際に最も苦労したNo.1書籍は、ZygmundのTrigonometric Seriesだった。電話帳より分厚い書籍を前に格闘する若き学生の私を、傍らで、パイプ煙草を燻らせ、にこやかにご覧になる、老教授。「年寄りの私より、若い君の方が時間を大切にしなくては。」と、ご自分のコピーより、学生のコピーを優先して下さった。ダンディーな河田龍夫先生のご配慮に、思わず頭が下がる思であった。河田先生の解析学演習はいつもどっさりと、課題の問題プリントを用意して下さり、解きごたえのある、充実した時間だった。爾来、幾霜雪を重ねても、なかなか師の領域には近づけぬ思いをする毎日である。

（6）日本ジュニア数学コンクール問題第３問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　花薗　　誠（名古屋大学経済学研究科　准教授）
柴田　好章（名古屋大学教育発達科学研究科　准教授）

問題３．「ＰＫ戦略」

サッカーの PK 戦略を、単純化して考えてみましょう。キッカーはキーパーから見て左、中、右から蹴り、同時にキーパーも左か右に飛ぶ、中に留まる、というそれぞれ 3 つの行動があります。行動の組合せに対するゴール成功率は、次の表で決まっているとしましょう。

キッカー\キーパー	左に飛ぶ	中に留まる	右に飛ぶ
左に蹴る	10%	80%	100%
中に蹴る	70%	0%	70%
右に蹴る	100%	80%	10%

つまり、キッカーが左にけり、同時にキーパーが左に飛ぶなら、成功率は 10%(10 回に 1 回ゴール)です。キッカーが左にけり、キーパーは中に留まるなら、成功率は 80%です。他の組み合わせも同様です。キッカー、キーパーの体格、巧さ、心理戦等は考慮しません。

キーパーは、最悪の状況におけるゴール成功率によって自分の戦略を評価し、その成功率の低い戦略を望みます。たとえば、キーパーの「左に飛ぶ」という戦略に対しては、キッカーが右に蹴るのが最悪の状況で、成功率 100%です。キーパーの「中に留まる」という戦略に対しては、キッカーが右（または左）に蹴るのが最悪で、成功率 80%です。よって、キーパーにとって中に留まる戦略の方が左に飛ぶより良い、といえます。

問 1：キーパーが**キッカーに分からないように**左右 50%の割合で選ぶという戦略が取るとき、ゴール成功率は最悪何%でしょうか。
[コインを投げ表裏に応じて行動すると、相手に知られずに 50%の割合で左右を選べます。]

問 2：キーパーが最悪の状況におけるゴール成功率を最小にするために、左中右の割合をどう選ぶ戦略を取ればよいでしょうか。

問 3：キッカーの戦略について考えます。キッカーにとっての最悪は、ゴール成功率が最低になるようキーパーが行動する状況です。最悪の状況でのゴール成功率を最大にするために、キッカーは左中右に蹴る割合をどう選ぶ戦略を取ればよいでしょうか。

問 4：問 2，3 の答えにどのような関係があるか考察し、理由とともに述べてください。

解説と講評

問1：70%。

「キッカーに分からないように」ということが鍵です。

キーパーがどちらに飛ぶかの選択はコイントスをして決めると考えましょう。もしコイントスの結果がキッカーにバレてしまっているなら、キッカーはキーパーの飛ぶ方向がわかるため、逆方向に蹴り PK を100%成功させることができますが、もともとキーパーは「キッカーに分からないように」飛ぶ方向を選んでいるので、実際にはこのような想定は不可能です（なお、たまたま PK がすべて成功する場合はありますが、いつでも起きることではないので、100%、つまり 100 発 100 中で成功する、とは言えません）。キッカーができることは、**キーパーが実際に取る行動を知らずに**、右、中、左のいずれかの方向に蹴ることです。したがって、これらの中からキーパーにとって最悪の結果をもたらすものを考えるしかありません。

1. **キッカーが右に蹴る場合**：
   キッカーが蹴る方向とキーパーが飛ぶ方向の組合せは、50%が【右、右】、50%が【右、左】です。各組合せが起きたときのゴールの成功率は、表から 10%、100%です。ゴールの成功率は、組合せ発生割合でこれらを加重して 50%×（10%＋100%）＝55%。
2. **キッカーが左に蹴る場合**：
   50%の割合で【左、右】、【左、左】の組合せがあらわれるので、ゴールの成功率は 55%。
3. **キッカーが中に蹴る場合**：
   同様に、ゴールの成功率は 50%×(70%＋70%)＝70%。

従って、**キーパーにとって最悪なのはキッカーが中に蹴る場合で、成功率 70%**です。

注意：キッカーが右、中、左を蹴る割合を選ぶと考えることもできますが、実はキーパーにとっての最悪の状況の判定には影響しません。たとえば、キッカーの蹴る方向のうち、中に蹴ることが、右・左よりもゴールの成功率が高いとします。すなわち、キーパーにとってはキッカーの蹴る 3 つの方向のなかでは、中が最悪の結果です。このような状況では、3つの方向へある割合で蹴り分けるような戦略（例えば、右、中、左を 1/3 ずつ）と比べると、中に確実に蹴る戦略のほうが、ゴールの成功率が高くなります。したがって、キーパーにとっての最悪の状況とは、キッカーがける右、中、左のうち最もゴールの成功率が高いものを蹴られたときと考えることができます。ゴールの成功率が最も高くなるものが二つ以上ある場合には、それらを任意の割合で蹴るような戦略を考えても構いませんが、結局ゴールの成功率はそのうちの一つを確実に選んだ場合と同じです。

問2：**左：中：右を 8：3：8 の割合。**

1. **最悪のゴール成功率を最小にするために、左右の割合を同じ値にしなければならない。**
   キーパーが左と右に飛ぶ割合をそれぞれ x, y とおきます（$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x+y \le 1$）。キッカーの蹴る方向に応じ、ゴールの成功率は以下の式で表されます。

左：①$10x+80(1-x-y)+100y = 80+20y-70x$

中：②$70(x+y)+0(1-x-y)$

右：③$100x+80(1-x-y)+10y = 80+20x-70y$

$x \neq y$ なら、最悪のゴール成功率が決して最小にならない事を示しましょう。$x<y$ とします（$x>y$ の場合も議論は同様です）。このとき①＞③となるため、最悪の値は①または②のどちらかです。x,y を調整すると、最悪のゴールの成功率を下げられることしめすために、いま(a,b)を

$$70(a+b)=20b-70a \Leftrightarrow a=-5b/14$$

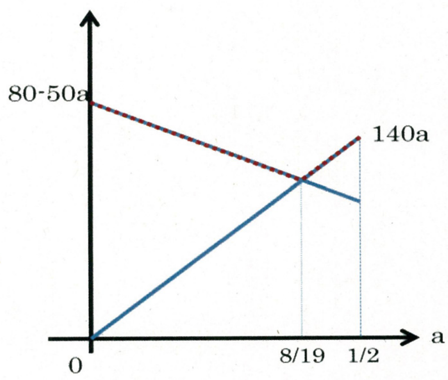
を満たすように選びます。左と右に飛ぶ割合をそれぞれ（x+a,y+b)にすると、①，②，③はそれぞれ $20b-70a=70(a+b)$, $70(a+b)$, $20a-70b$ だけ変化しますが、

$$20a-70b = -(5/7)70(a+b) - (20b-70a) = -(12/7)70(a+b) = -120(a+b)$$

となることに注意しましょう。したがって、$a+b<0$, $a=-5b/14$ を満たすように(a,b)を取ると、①と②はともに小さくなります。また、絶対値｜a+b｜が小さい範囲では[1]、①＞③の関係が維持される点にも注意してください。そのような範囲で(x+a,y+b)を用いる場合の最悪のゴールの成功率は①または②になり、(x,y)の場合と比べて下がります。つまり、(x,y)は最悪の成功率の最小値を決して達成しません。ここから、最小値を求めるためには x=y でなければならないことがわかりました。

2. **キーパーの左、中、右の割合を**(a, 1−2a, a), 0≤a≤1/2 **とします**。キッカーの蹴る方向に応じて、ゴールの成功率は

左または右：$(10+100)a+80(1-2a)=80-50a$、中：$(70+70)a+0(1-2a)=140a$



ここから、{80-50a , 140a}のうち大きい方（上図の赤い点線）を最小にする a 求めれば最悪のゴール成功率を最小にすることができます。つまり $80-50a=140a$ を解いて $a=8/19$ を得ます。従って、左：中：右は 8：3：8 です。

なお、この時ゴールの成功率は $140\times8/19=58.9\%$ です。

[1]具体的には 190｜a+b｜< 90(y-x)の範囲。

問 3：**左：中：右を 7：5：7 の割合。**

問 2 と同様に、キッカーの蹴る方向に関して左、中、右の割合を(b,1-2b,b)とします。キーパーの行動に応じて以下のようにゴールの成功率が計算できます。

左または右：(10+100)b+70(1-2b)=70-30b

中：160b

ここでキッカーは、ゴールの成功率の最悪のケース（{70-3b,160b} の小さい方）を最大化しようとしますが、これは問 2 と同様、70-30b=160b を解いて求められます。すなわち、b=7/19。したがって、7：5：7 です。

なお、この時のゴールの成功率は 160×7/19＝58.9%

問 4：**どちらの選手にとっても、最悪の状況を最小にする戦略を用いる際のゴールの成功率は等しくなります。**

理由：キーパーの戦略は結局、対戦相手のキッカーが右、中、左のどの方向に蹴ってきたとしても、ゴールの成功率が等しくなるように自分が飛ぶ方向の割合を決めたのでした。同様にして、キッカーの戦略もキーパーの行動に関わらずゴールの成功率が等しくなるように、自分が蹴る方向の割合を決めました。ここから、次のことが言えます。

1. キーパーが問 2 の戦略を使うとすると、キッカーが左、中、右をどんな割合で取ってもゴールの成功率が同じになります。特にキッカーが問 3 で求めた戦略を使ったとしても、やはりゴールの成功率は変わりません。
2. キッカーが問 3 の戦略を使うとすると、キーパーが左、中、右をどんな割合で取ってもゴールの成功率が同じになります。特にキーパーが問 2 で求めた戦略を使ったとしても、やはりゴールの成功率は変わりません。
3. キーパーとキッカーが問 2、問 3 で求めた戦略を取り合っている場合を考えてみましょう。この状況におけるゴールの可能性は、それぞれの選手にとって 1、2 の場合と同じでなければなりません。ここから、それぞれの戦略を取ることによるゴールの成功率は等しくなければならないことがわかります。

講評：この問題に取り組んだ人は少なくなく力作も多かったのですが、全体的に言って、「最悪の状況におけるゴールの可能性」の評価の仕方や、その可能性を選手の戦略によって変化させるというアイデアを理解することが、なかなか難しかったようでした。その一方で優れた答案も見られました。特に、中島拓巳君は代数的に問題に取り組み、明快かつエレガントに全問とも正解に到達していて、大いに感心させられる解答でした。森下龍之介君もほぼ全問正解でしたが、対称性に着目して変数を減らし、適切な形に問題を簡単化している点、図解や直観を伴った説明も分かりやすい点など、大変優れていました。また、小林尚暉君、西浦響君の解答も、問題の本質を十分につかんでいることがよくわかる、優れたものでした。

解説：この夏サッカー・ワールドカップが開催され、日本代表の戦い、世界の強豪チームやスター選手の真剣勝負に興奮を味わった人も多かったことでしょう。ワールドカップの決勝トーナメントでは、延長でも勝負が決まらないと、PK（ペナルティキック）戦で決着します。この問題は純粋に選手の戦略の読みあいの観点から PK 戦を捉える試みです。お互いに相手の戦略を読み合いながら、それぞれ自分の戦略を立てるという**相互連関のある意思決定**の研究をする分野は「**ゲーム理論**」と呼ばれます。

PK 戦のような勝ち負けがはっきりと決まるような状況は、「**ゼロサムゲーム**」と呼ばれ、ゲーム理論の黎明期に数学者フォン・ノイマンによって定式化されました。ゼロサムゲームは 2 人で行うゲームで、一方が得点を x 点得たときに他方が-x 点得る状況を考えていて、常に得点の和が 0 点（zero-sum）となることから名付けられています。PK 戦では、キーパーとキッカーがゴールの可能性の認識を共有しているとすると、その可能性が x%の時に、キーパーの得点が-x 点、キッカーの得点は x 点を見ることができます。したがって、PK 戦をゼロサムゲームと見なすことができます。

最良の戦略を立てる際に、相手がこちらの戦略を読んで反応することを織り込みましょう。ゼロサムゲームでは、相手が合理的に反応すると、こちら側の得点を下げる行動を取ろうとするはずです。これが、相手が自分にとっての最悪の反応をする予想をする理由です。これを踏まえて、自分にとっての最良を選ぶ必要があります（「最悪の状況を最良にする」）。このような戦略を、ゼロサムゲームの**マキシミン戦略**（Max-min strategy）と呼びます。プレーヤー1 のマキシミン戦略は、$P_1(a_1,a_2)$をプレーヤー1 の得点、a_1 a_2 をそれぞれプレーヤー1、2 の戦略とおくと、

$$\textbf{max\_}\boldsymbol{a_1}\,\{\textbf{min\_}\boldsymbol{a_2}\,\boldsymbol{P_1(a_1,a_2)}\}$$

の解によって表すことができます。すなわち、プレーヤー1 が選ぶ a_1 に対してプレーヤー2 は得点 $P_1(a_1,a_2)$を最小にするように a_2 を選んでくると想定し、それを織り込んだ得点 {min_a_2 $P_1(a_1,a_2)$}を最大にするように a_1 を選びなさい、というものです。お互いにマキシミン戦略を取り合うことが、合理的なプレーヤーによるゼロサムゲームの帰結になります。

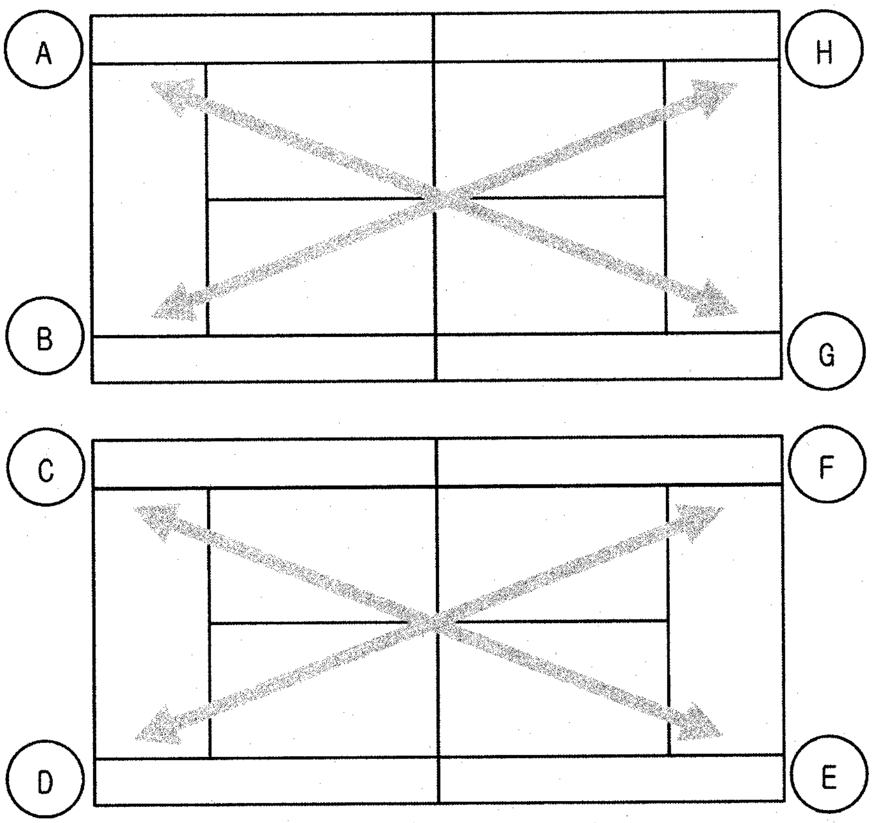
<u>Ignacio Palacios-Huerta による論文（“Professional Play Minimax” *Review of Economic Studies*, 79, pp.395-415）では、ヨーロッパの主要リーグの 1995 年から 2000 年までのサッカー選手の PK データ（試合中に相手の反則によって与えられた PK 限定）から、マキシミン戦略が選手に採択されている事実が有力であることを実証しています</u>（より正確にいえば、マキシミン戦略を棄却することが統計的に有意にならないことを実証）。本問題とは少し設定が異なり、利き足によって蹴りやすい方向を考慮していますが、統計的に導かれるゴールの決定率と、マキシミン戦略で取るべき行動の割合（蹴りやすい方向と蹴りにくい方向の割合）がほぼ等しいことが示されています。サッカー選手がゲーム理論を知っているかどうかはわかりませんが、一流の選手は合理的に行動の選択をしていて、ゲーム理論による分析や予測が可能であることを示唆するものとして非常に興味深い研究内容です。

（7）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール共通問題 第４問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　小倉　一輝（三重県立上野高等学校　講　師）
田地　宏一（名古屋大学工学研究科　准教授）
服部　保孝（愛知県立松蔭高等学校　校　長）
矢野　秀樹（愛知県立東海商業高等学校　教　諭）

問題４．「効率のよいテニスの練習を行うためには」

テニスでは図のようにクロス(斜め同士)のペアで練習を行うことがあります．



さて，いま図のように，2 面のコートで 8 名が練習をするとしましょう．同じ相手と練習しても効果が薄いので，まず『全員を反時計回りに移動させる』つまり，A→B→C→D→E→F→G→H→A のように移動させることで相手を変えていくことにしました．(以下，このようにぐるぐると場所を変えていくような移動のことをローテーションと呼ぶことにします．) するとこの方法では，各自の相手は 7 人中 2 人しか変わらないことになります！
(確かめてみて下さい！)

ここで皆さんに考えてもらいたいのは，ローテーションによるできるだけ少ない移動で全ての人と練習できる方法です．

(1)　8 人で練習するとき，1 人をコーチとして場所を固定し，他の 7 人を移動させるローテーションで全ての人と練習できるものを考えてください．
(2)　8 人で練習するとき，全員が必ず移動するようなローテーションで全ての人と練習できるものを考えてください．
(3)　3 面のコートで 12 人が練習するとき(2)のようなローテーションが組めるかどうか考えてください．さらに，コートの数や人数が多いときはどうでしょうか．

解説と講評

まずは，ローテーションをちゃんと定義しましょう．ここで言うローテーションとは

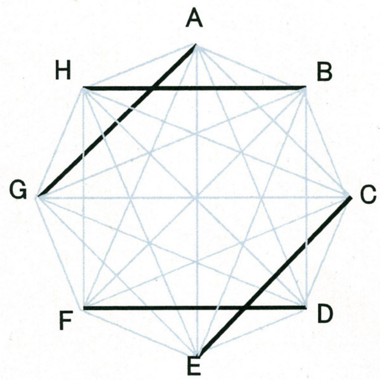
全員が同じ順序でコートの場所を移動する

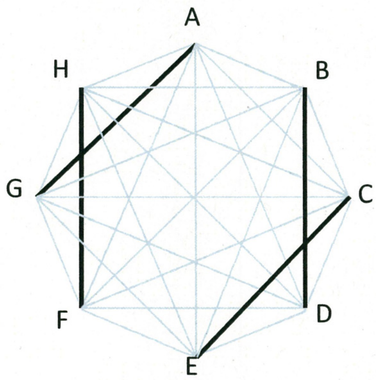
ということにします．したがって，はじめに A の場所にいたプレイヤーが A→B→C→D→E→F→G→H→A の順にコートを移動するのであれば，はじめに E にいたプレイヤーは E→F→G→H→A →B→C→D→E のようにコートを移動します．すると，この問題は

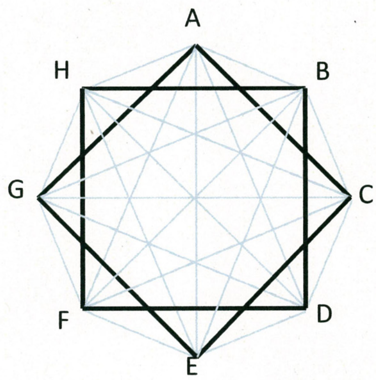
コートのすべての場所をちょうど 1 回訪れたときに，他のすべてのプレイヤーと少なくとも 1 回対戦できるローテーションが存在するか

という問題に書き換えられます．この問題を考えるために，以下のような，**グラフ理論**に基づく考えかたを示します．わかりやすいように，まずは小問(2)を取り上げます．

まず，各プレイヤーを正八角形の頂点に時計回り（または反時計回り）に置き，最初の対戦となっている辺，または対角線を塗りつぶします．もともとの問題の例では右図のようになります．A→B→C→. . . の順にローテーションすることは，塗りつぶした線を八角形上で反時計回りに回転させることになるので，一回ローテーションすると下の図（左）のようになります．これを繰り返していくと，塗りつぶされる線は増えていきますが，この例では，一周させても下の図（右）のようにしかなりません．対戦の相手は，黒の太線で結ばれているプレイヤー同士なので，結局この例では，それぞれ 2 名しか相手をしないことがわかります（グラフ用語では，**マッチング**と呼びます）．



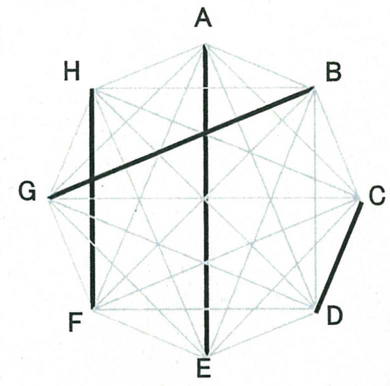




上と同じ手順で，八角形の辺と対角線を塗りつぶしたとき，全ての辺と対角線が黒の太線となれば，全てのプレイヤーが他の全てと相手をすることになります（そのようなグラフを完全グラフといいます）．すると問題は以下のように書き換えることができます．

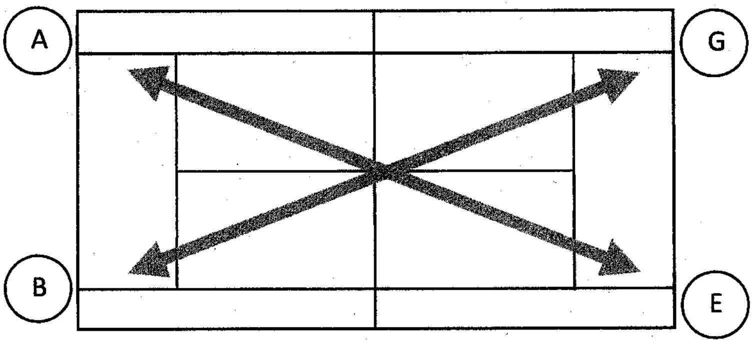
ローテーションしたときに，完全グラフとなるようなマッチング（最初の対戦相手）が作れるか？

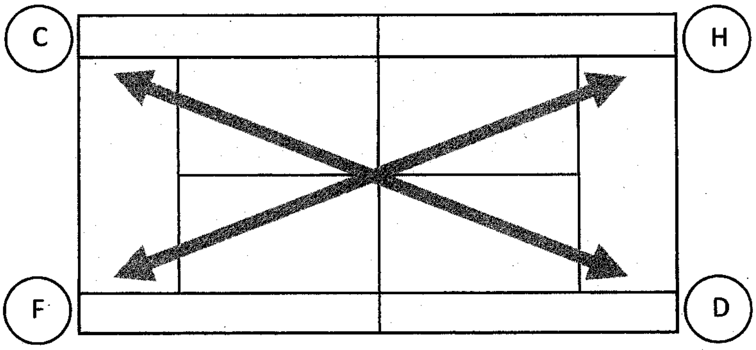
ところで，八角形の辺と対角線は以下の 4 つに分類できます．



1. AB のように隣り合う頂点をつなぐ辺（距離 1 と呼ぶ）
2. AC のように，間に一つの頂点をつなぐ対角線（距離 2 と呼ぶ．例えば AG も距離 2 である）
3. AD のように，間に二つの頂点をつなぐ対角線（距離 3 と呼ぶ）
4. 一番遠い頂点同士をつなぐ対角線（AE のように距離 4 となる）

そこで，この 4 種類の辺と対角線がそれぞれ一つずつ，またどの頂点からも 2 本出ないように結ぶことができれば（つまりそのような最初の対戦相手の組を見つければ），それを一周させることにより，全ての辺と頂点を塗りつぶすことができます．八角形の場合はそれが可能で，その一つの例を右上の図に示します．この図に基づいてそれぞれのプレイヤーをコートに割り当てると，

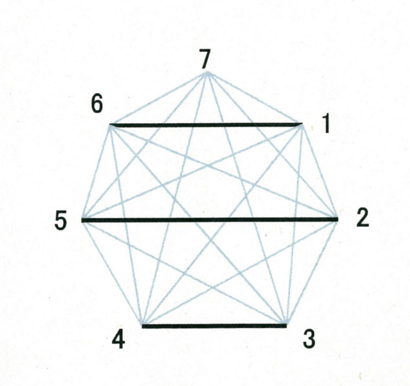




となり，それぞれのプレイヤーは，A の次は B，F の次は G，H の次は A というように A→B→C→D→E→F→G→H→A の順にローテーションすると，それぞれのプレイヤーが A から H の全ての場所を巡ったところで（8 回のローテーション），全てのプレイヤーと対戦していることになります（**小問(2)の解答例**）．

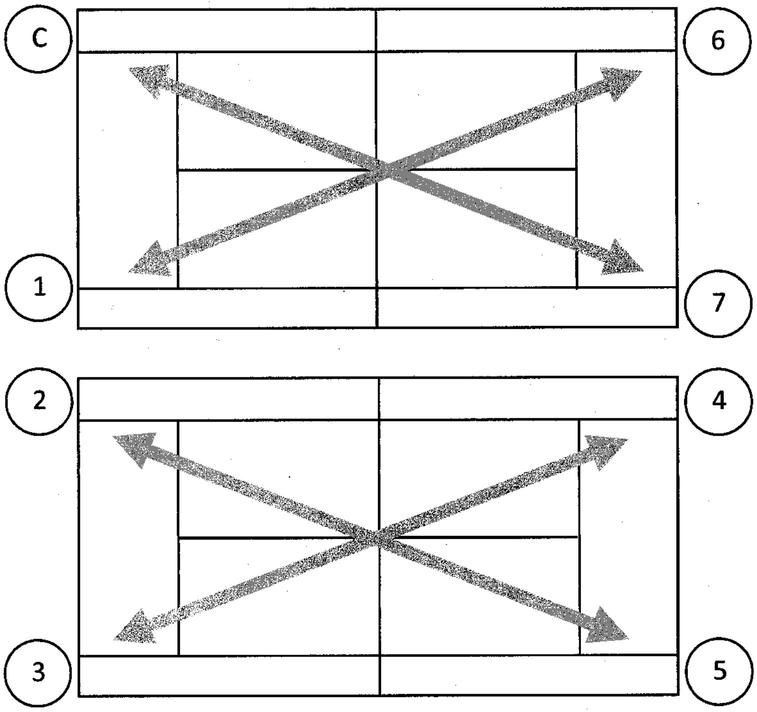
以下では，説明の都合上 A,B,C．．． をそれぞれ1，2，3．．．で表記することにします．

小問(1)の解答(簡単な場合)

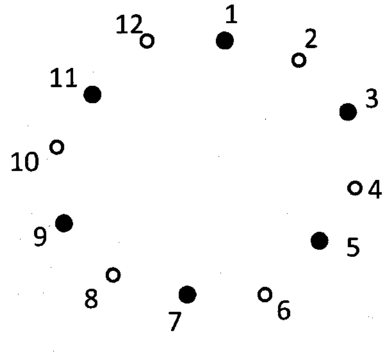


これまで説明したように考えれば，七角形(頂点 7 にいるプレイヤーはコーチと対戦する)において距離 1，2，3 の対角線(辺も対角線と呼ぶ)が引ければ，題意を満たすローテーションが作れます．実はこれは非常に簡単で，一般に$2n+1$人のプレイヤーと一人のコーチがいた場合，最初の対戦相手を「1 と$2n$，2 と $2n-1$，．．．，n と $n+1$」となるように組めば(このとき $2n+1$ のプレイヤーはコーチと対戦することとする)，コートを一周するとコーチを含め全員と対戦することができます．

実際，七角形では右図のように，1 と 6，2 と 5，3 と 4 の対角線を引くとそれぞれの距離は 2，3，1 となるので，最初の対戦相手がそれと同じように割り当てれば(7 にいるプレイヤーはコーチと対戦することとする)ローテーションによってコーチを含む全てのプレイヤーと対戦できます．8 人の場合のそのようなローテーションの例は以下の通り(C はコーチです)．



小問(2)(3)の解答(難しい場合)



考えかたは上述したとおりであり，小問(2)の解答例もすでに示しました．そこで，3 面 12 人でのローテーションが可能かどうかについて考えましょう．実は，非常に簡単な方法で不可能であることが示されます．これまで述べた考えかたに基づくと，12 角形において距離 1，2，3，4，5，6 の対角線が引ければ，題意を満たすローテーションが可能です．

ところで，右図のように奇数を黒丸で，偶数を白丸で表しましょう．題意を満たすローテーションができるためには，距離 1，3，5 と 2，4，6 のペアが必要ですが，距離 1，3，5 のペアは右図から●と○のペアになり，一方，距離 2，4，6 のペアは○どうし，または●どうしとなるのですが，距離 1，3，5 のペアを取

り除くと，残りは○が 3 個と●が 3 個となり距離 2，4，6，のペアを作ることは不可能です．したがって 3 面 12 人では題意を満たすようなローテーションは不可能です．

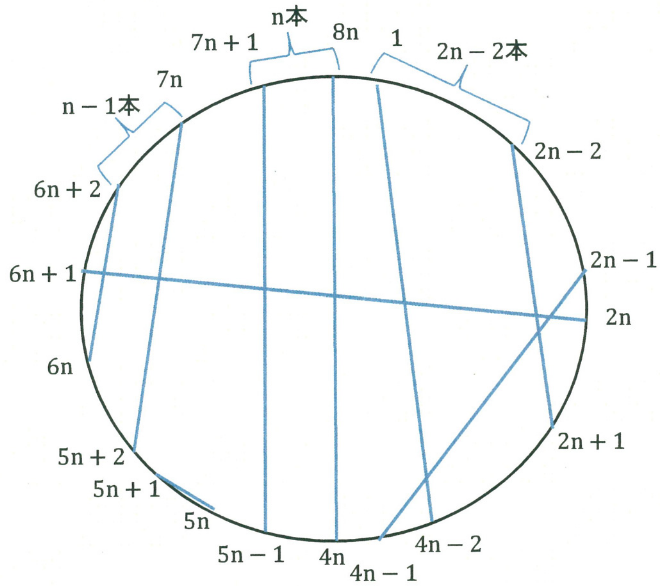
この考えかたを拡張すると，一般に人数が$8n+4$ または$8n+6$ $(n=0,1,\ldots)$ のときには題意を満たすローテーションが存在しないことが示せます（この解答は，森下龍之介 君によるものです．宮川純一 君，中谷 凱 君からも同様の解答がありました．）

表彰式の時点でわかっていたのはここまでで，人数が $8n$ または$8n+2$ $(n=1,2,\ldots)$ のときに題意を満たすローテーションが作れるかは未解決でした（計算実験の結果 $n=5$ までは実現可能なことが示されてはいました）．その後，三重県立津西高等学校の奥田真吾先生より以下のようにポジティブな解答を頂きましたのでそれを紹介します．

(1) 人数が$8n$ $(n=1,2,\ldots)$ の場合

この場合の $8n$ 個の頂点の結び方を左下の表にまとめました．また，そのイメージ図は右下のようになります．

頂点のペア	距離	本数
$(4n,8n)$ $(4n+1,8n-1)$ ⋮ $(5n-1,7n+1)$	$4n$ $4n-2$ ⋮ $2n+2$	n
$(2n-1,4n-1)$	$2n$	1
$(5n+2,7n)$ $(5n+3,7n-1)$ ⋮ $(6n,6n+2)$	$2n-2$ $2n-4$ ⋮ 2	$n-1$
$(2n,6n+1)$	$4n-1$	1
$(1,4n-2)$ $(2,4n-3)$ ⋮ $(2n-2,2n+1)$	$4n-3$ $4n-5$ ⋮ 3	$2n-2$
$(5n,5n+1)$	1	1

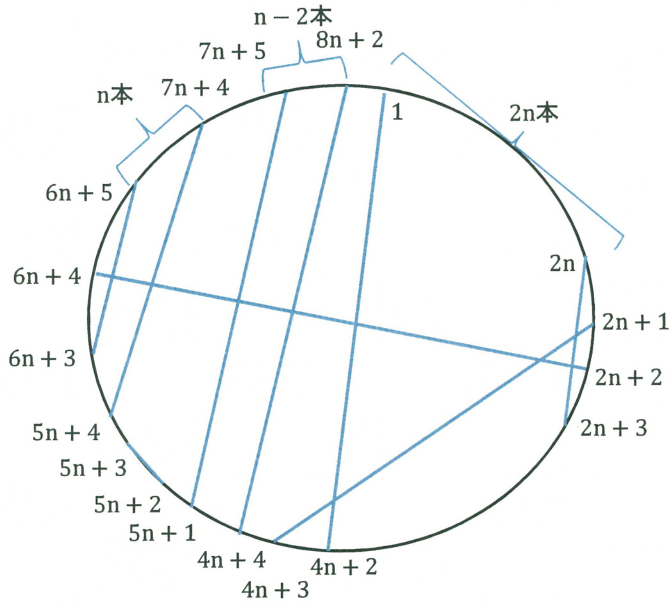


$n=1$（8 人）の場合は，上の表中で本数が 0 となるものを除いた 4 本で構成でき，前述した小問 (2) の解答例と同じもの（グラフとしては左右反転）になります．

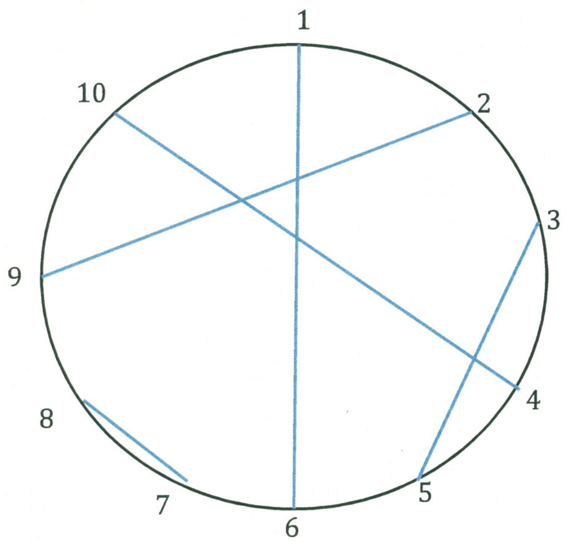
(2) 人数が$8n+2$ ($n=1,2,\ldots$) の場合

まず，$n=2,3,\ldots$ の場合の $8n+2$ 個の頂点の結び方を左下の表にまとめ，そのイメージ図を右下に示します．

頂点のペア	距離	本数
$(1,4n+2)$ $(2,4n+1)$ $\vdots$ $(2n,2n+3)$	$4n+1$ $4n-1$ $\vdots$ 3	$2n$
$(5n+2,5n+3)$	1	1
$(2n+2,6n+4)$	$4n$	1
$(4n+4,8n+2)$ $(4n+5,8n+1)$ $\vdots$ $(5n+1,7n+5)$	$4n-2$ $4n-4$ $\vdots$ $2n+4$	$n-2$
$(2n+1,4n+3)$	$2n+2$	1
$(5n+4,7n+4)$ $(5n+5,7n+3)$ $\vdots$ $(6n+3,6n+5)$	$2n$ $2n-2$ $\vdots$ 2	n



なお$8n$人の場合と違い，こちらは$n=1$（10 人）のときは上の表からは作ることはできませんが，実際は可能で以下のようになります．



8 人と 10 人の場合については，本質的にここで示した解答の一通りしかないのですが，16 人以上ではその他の解がありますので，それらを調べてみるのも面白いと思います．

謝辞：問題の原案は，三重県立上野高等学校の小倉一輝先生によるものです．12 人の場合の不可能の証明は，川崎市立日吉中学校の森下龍之介君によるものです．また，$8n$ または$8n+2$ ($n=1,2,\ldots$) のときの解答例は三重県立津西高等学校の奥田真吾先生によるものです．面白い問題の提供，およびエレガントな解答を頂いた方々に深く感謝します．

（８）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール論文賞の解説

テーマ１．「ホワイトアウト」

PM2.5 や猛吹雪の話題がありましたが、直径 1 mmの雪が 1 立方m中にどれだけあると 100 m先が見えなくなるでしょうか？直径 2.5 μmの PM2.5 なら、1 立方m中にどれだけあると 100 m先が見えなくなるでしょうか?

解　説

日本数学コンクール実行委員会委員　伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
高原　文規（愛知県立瑞陵高等学校　教　諭）

今回の問題は高等学校理系で数学 III を学習していれば途中の計算を省略できる問題です。ところが、中学生の２人がチャレンジしてくれました。大変だったと思いますが、いいところまで考えてくれました。

では、一緒に考えていきましょう。

まず、空気中に漂っている粒子によって、向こうが見えないということは単純に、目と対象物の間に粒子があって光線を遮っていると考えます。

粒子の見える面積を s 粒子がある範囲の面積を S とすると、粒子が遮る光線の割合は、$\frac{s}{S}$ です。これは、1 つの粒子が光線を遮る確率ですから、視線が遮られず光線が見える確率は $1-\frac{s}{S}$ です。

面積 S 内にある粒子が n 個の場合、光線が遮られず向こうが見える確率は、$\left(1-\frac{s}{S}\right)^n$

これは粒子がある面積 S の範囲の中で見える部分の割合を表すと考えることができます。

ほとんどの光線が遮られれば向こうの風景は見えない（何があるかわからない）がある程度見えれば何があるかわかる。そこで、全体の 5% しか見えなければわからなくなるとして議論を進めます。

また、最終的な答は $1\mathrm{m}^3$ にどれだけあるかで答え、100m 先のものが見えなくなることを基準としているので、$1\mathrm{m}^3$ 中に粒子が x 個あるとして、粒子が均等に散らばっているとすると、100m 先までは $100x$ 個の粒子がある。

以上の仮定より、

$$\left(1-\frac{s}{S}\right)^{100x}=\frac{5}{100}$$

となる x を求めます。

粒子がある範囲の面積は $S=1\mathrm{m}^2$ で、直径 1mm の雪が球形だとすると、粒子の見える面積は、
$s=\pi(0.5mm)^2=\frac{\pi}{4}mm^2=0.000000785\cdots m^2$ ですから, $\frac{s}{S}=0.000000785\cdots$

ここで、上に書いた数学 III の教科書に書いてある知識を使います。

もし、 r が正の数で、だんだん 0 に近づいていくならば, $(1-r)^{\frac{1}{r}}$ は $\frac{1}{2.718281828459\cdots}$ に近づくことが知られています。長くて面倒なので、$2.718281828459\cdots=e$ とかきます。$\left(\lim_{r\to+0}(1-r)^{\frac{1}{r}}=\frac{1}{e}\right)$

$\dfrac{s}{S} = 0.000000785\cdots$ は0に近い数字なので、$\left(1-\dfrac{s}{S}\right)^{\frac{S}{s}} = \dfrac{1}{e}$ と考えてよいのです。

$100x = \dfrac{S}{s} \times k$ とすると、

$$\left(1-\frac{s}{S}\right)^{100x} = \left(1-\frac{s}{S}\right)^{\frac{S}{s}\times k} = \left\{\left(1-\frac{s}{S}\right)^{\frac{S}{s}}\right\}^{k} = \left(\frac{1}{e}\right)^{k}$$

ですから、$\left(\dfrac{1}{e}\right)^{k} = \dfrac{5}{100}$ つまり、$e^k = 20$ となる k が必要になります。

$e^3 = 20.085536923\cdots$ ですから、$k = 3$ となります。

したがって、直径 1mm の雪の場合、$x = \dfrac{k}{100} \times \dfrac{S}{s} = 38197$ (粒) が答えになります。

とても多い数ですが、、$\dfrac{S}{s}$ は（球形で隙間ができることを無視すれば）$1\mathrm{m}^2$ に粒子を敷き詰めた個数ですから、$x = \dfrac{k}{100} \times \dfrac{S}{s}$ は $1\mathrm{m}^2$ の $\dfrac{3}{100}$ つまり、$300\mathrm{cm}^2$ に敷き詰められる粒子の個数です。

$300\mathrm{cm}^2$ は、A5 の用紙 (この冊子の 1 ページの半分) より少し小さい面積です。案外少ない量で、100m 先は見えなくなります。

また、以上の議論より、直径 1 mmの雪でも直径 2.5 μmの PM2.5 でも、それを敷き詰めたときに $300\mathrm{cm}^2$ に敷き詰められる粒子の個数であることは変わりません。

遠くにあるものは小さく見えますが、これは上の議論に影響を与えないのでしょうか？

1m 先の面積が S であるとき、目で見て同じ大きさ（同じ視野角）になるためには 100m 先では $100^2S = 10000S$ になります。粒子がすべて 100m 先にあるとすると、100m 先で必要な個数 x' は、$x' = \dfrac{10000S}{s} \times 3$ となり、面積 S あたりの個数は $\dfrac{x'}{10000} = \dfrac{S}{s} \times 3$ で粒子がすべて 1m 先あるとしたときに必要な個数と変わりません。

これより、「遠くになると同じ視野角で見える面積が増える。」言い換えると、「粒子 1 個の視野角が小さくなる。」ことは、一定の面積（体積）の中に何個あるかという設問では考えなくていいことがわかる。

最後に、PM2.5 の場合の個数も計算してみましょう。

$s = \pi \times \left(\dfrac{2.5}{2 \times 1000000}\right)^2 \mathrm{m}^2$ ですから、$x = \dfrac{k}{100} \times \dfrac{S}{s} = 6111549814$ (粒)。つまり約 61 億粒になります。

仲渡千遼君の議論は、数学 III の部分の知識がありませんが、その代わり、計算機を用いて計算してくれました。全体の 5% しか見えない場合の数値は、上の計算と一致します。

高井万葉さんの議論は、１つの面に敷き詰める形になっていて、奥行きの中で同じ光線を２つ以上の粒子が遮る位置にある部分の考察がされていませんが、いろいろに条件を変えて考えてくれています。

このレポートを含めて、どの議論も全体の何％しか見えなくなったとき、向こうが見えなくなるのかをきちんと検証していません。

どんな実験をすればそれがわかるのか考えて、実験で確かめることも必要だと思いませんか？

問題や現象の捉え方はいろいろあります。自分なりに考えて、結論を見つけ、誰もが納得してくれるように説明したものが論文です。また来年、意欲的な論文で応募してください。

テーマ２．「三角形」

直角二等辺三角形は辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ で, 角度の比が $45:45:90=1:1:2$ です. このように三辺の長さと三つの角度の比が両方簡単であるような三角形はどのくらいあるでしょうか.

解　説

日本数学コンクール実行委員会委員　伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）

三角形 ABC について, 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とします. 正弦定理より $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$ だから

$$a:b:c=\sin\angle A:\sin\angle B:\sin\angle C$$

が成り立ちます. よって問題は, 角 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさの比と $\sin\angle A, \sin\angle B, \sin\angle C$ の比の両方が「簡単」であるような三角形を求めることと同値になります. **ここで言う「簡単」の意味は各自が自由に設定してよい**というのがポイントです. たとえば「簡単な比」を整数の比のこと設定するのは一つの自然な考え方です. しかし, この場合は条件に該当する三角形は正三角形 (両方の比が $1:1:1$) のみとなります (後述の議論を応用して分かる). したがって, より面白く問題を解くためには条件を緩める, すなわち「簡単な比」の定義を少し広くとる必要があります.

「角度については整数の比であり, 辺の比は整数と平方根で表せる」ということにすれば, 問題文にあるような直角二等辺三角形も条件を満たすことになるので, 良さそうな設定です. 角度の比 $\angle A:\angle B:\angle C$ が互いに素な整数 p,q,r の比 $p:q:r$ に等しいとします. このとき $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ だから $\theta=\frac{180°}{p+q+r}$ とおくと $\angle A=p\theta$, $\angle B=q\theta$, $\angle C=r\theta$ です. よって加法定理を繰り返し用いることにより $\sin\angle A, \sin\angle B, \sin\angle C$ は $\sin\theta$ および $\cos\theta$ の多項式として表されます. このことから $\theta=\frac{180°}{p+q+r}$ は限られた形のものであることが従います. たとえば $\theta=\frac{180°}{7}$ とすると $\cos\theta$ は三次方程式 $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の解で, これを表すには立方根が必要です. そして $\sin\angle A:\sin\angle B:\sin\angle C$ にも立方根が表れることになり, 辺の比が「簡単」でなくなるのです. 他方, $\theta=\frac{180°}{2^N}$ のとき, 半角の公式を繰り返し用いることにより $\cos\theta$ および $\sin\theta$ は整数と平方根を用いて表され, よって $\sin\angle A:\sin\angle B:\sin\angle C$ も整数と平方根を用いて表されます. 言い換えると $p+q+r=2^N$ であれば辺の比が「簡単」になるので, 条件を満たす三角形は無数にあることになります. しかし, 平方根を際限なく使って表される比を「簡単」と呼ぶのは無理があります. 結局, 平方根を使える回数を制限して条件を満たす三角形を有限個に収めるというのが, 一つの適切な設定といえるでしょう.

山口颯仁君 (佐賀大学文化教育学部附属中学校 3 年) は, 辺の比の各項が整数または整数の平方根という条件のもとでは三角形の角には 30° または 45° の倍数のみが表れるという事実を洞察し, 可能な三角形 (4 個) を全て決定しました. 良い問題設定のおかげで, 綺麗な結果になったのは素晴らしいことです. 木太久稜君 (久留米工業高等専門学校 3 年) は, 辺の比の各項には高々 2 個の平方根が表れる (2 重根号も可) という条件を「簡単」の定義としました. 上述の議論によって $\theta = \pi/7$ の可能性を除外するなど, 興味深い考察を積み重ねて, 24 個の三角形を見出しました. それらが条件をみたす三角形の全てであることを厳密に示すには至りませんでしたが (それは相当難しい問題と思われます) 十分評価に値する興味深い研究です.

テーマ３．「自由課題」

解　説

日本数学コンクール実行委員会委員　伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
宇澤　　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教　授）

今回の自由課題で受賞された論文は優れたものが多く、選考に苦労しました。今年の傾向としては、以前に数学コンクールで出題した問題を一般化して考察を加えたもの（名古屋大学教育学部附属中学校・高等学校の皆さんの「7面体の種類」）、昨年度の論文賞の問題で受賞した自身の研究を深化させ、四角形の頂点を最短の長さで結ぶ経路を求めるシュナイダー問題について，より洗練した議論を展開したもの（佐賀大学文化教育学部附属中学校3年の山口颯仁さん四角形におけるエレガントなシュタイナー問題の証明」）、また独自に問題を設定したものがありました。

愛知県立岡崎高等学校の近藤彪生さんは「何乗しても下 n 桁がかわらない数」についてすぐれた考察を行い、桐蔭学園高等学校女子部の皆さんは、「ギャンブルと確率論」実験を交えた考察を行っております。確率論は数学の分野としては新しい分野で 1933 年にコルモゴロフが初めて公理的な展開をした分野です。

4. 受賞者一覧

第25回日本数学コンクール受賞者一覧

大賞（1名）

S-11	宮 川　純 一	岐阜	鶯谷高等学校	高2	1,3,4

優秀賞（2名）

OS-1	宮 本　大 輔	兵庫	灘高等学校	高3	1
OS-21	中　谷　凱	大阪	府立四條畷高等学校	高1	4

優良賞（5名）

S-19	岩 橋　秀 公	愛知	県立横須賀高等学校	高3	3,4
S-33	野々山　敬 介	愛知	県立明和高等学校	高1	4
S-34	西 村　祐 輝	愛知	県立旭丘高等学校	高1	1,2
OS-2	岡 本　姫 奈	兵庫	雲雀丘学園高等学校	高1	3,4
OS-7	根　尾　創	大阪	高槻高等学校	高2	1,2

奨励賞（8名）

S-18	吉 田　知 史	愛知	県立旭丘高等学校	高1	1
S-21	武 内　太 輝	愛知	県立千種高等学校	高3	2
S-29	星　野　創	愛知	県立明和高等学校	高2	3
S-37	北 川　健 太	愛知	県立旭丘高等学校	高1	3
S-42	河 村　拓 実	愛知	県立明和高等学校	高1	1
OS-8	縄 手　孝 央	大阪	府立大手前高等学校	高1	2
OS-22	橋 本　健 人	大阪	近畿大学附属高等学校	高3	3
HS-1	中 村　悠 人	奈良	智辯学園高等学校	高2	1

＊問題　1. キャベツの黄金比　2. 循環節の長さを指定した循環小数
3. 曲がったものを真っ直ぐに　4. 効率のよいテニスの練習を行うためには

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第18回日本ジュニア数学コンクール受賞者一覧

大　賞(1名)

OJ-4	中 島　拓 巳	大阪	大阪教育大学附属天王寺中学校	中2	1,3

優秀賞(3名)

J-7	森 下　龍 之 介	神奈川	川崎市立日吉中学校	中3	1,3,4
J-9	中 村　佑 匡	静岡	浜松市立中部中学校	中2	2
J-20	小 林　尚 暉	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	1,3

優良賞(2名)

J-22	西　浦　響	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	3,4
J-23	松 岡　信 人	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	3,4

奨励賞(8名)

J-2	村 松　美 悠 加	東京	白百合学園中学校	中3	2
J-21	辻　清　龍	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	3
J-24	小 山　和 紀	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	4
J-25	服 部　源 太 郎	三重	暁学園 暁中学校・高等学校	中3	2
J-27	前 田　凌 佑	愛知	東海中学校	中2	4
J-49	井 澤　俊 弥	愛知	愛知教育大学附属岡崎中学校	中3	2
OJ-1	後 藤　颯 汰	奈良	東大寺学園中学校	中1	2
OJ-2	内　田　翔	大阪	大阪市立咲くやこの花中学校	中3	2

＊問題　1. 正方形　2. 循環節の長さを指定した循環小数　3. PK戦略
4. 効率のよいテニス練習を行うためには

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第15回日本数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

新井　一希（中２） 河井　亮（高１） 堀江　孝文（中２）	愛知	名古屋大学教育学部附属中学高等学校	中･高 3名	七面体の種類
近藤　彪生	愛知	愛知県立岡崎高等学校	3年	何乗しても下n桁が変わらない数

銀賞

大川　ゆきこ 菱沼　あかり 池田　実樹 松岡　沙恵 清永　深津紀 関沢　理沙 松岡　万理恵 三平　祐理子 森　葉月	神奈川	桐蔭学園高等学校女子部	3年 9名	ギャンブルと確率論

銅賞

木太久　稜	福岡	久留米工業高等専門学校	3年	立方体の頂点

＊テーマ　１. ホワイトアウト　２. 三角形　３. 自由課題

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象のテーマ。

第15回日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

該 当 者 な し

銀賞

仲 渡	千 遼	広島	広島大学附属東雲中学校	2年	ホワイトアウト
山 口	颯 仁	佐賀	佐賀大学文化教育学部附属中学校	3年	四角形におけるエレガントなシュタイナー問題の証明

銅賞

高 井	万 葉	岐阜	本巣市立本巣中学校	3年	ホワイトアウト

＊テーマ 1. ホワイトアウト　2. 三角形　3. 自由課題

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象のテーマ。

日本数学コンクール応募状況

(1)シニア

応募数 66

会場	地域	学校所在地	性別	高校生 1		2		3		小計	
名古屋大学	中部	愛知	男	16	18	8	8	3	4	27	30
			女	2		0		1		3	
		岐阜	男	0	0	5	5	3	3	8	8
			女	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	16	18	14	14	6	7	36	39
			女	2		0		1		3	
大手前高校	近畿	大阪	男	11	14	3	3	1	1	15	18
			女	3		0		0		3	
		兵庫	男	0	1	1	1	1	1	2	3
			女	1		0		0		1	
	小計		男	11	15	4	4	2	2	17	21
			女	4		0		0		4	
津	中部	三重	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	2	1	1	0	0	1	3
			女	2		0		0		2	
		奈良	男	0	0	2	2	0	0	2	2
			女	0		0		0		0	
	小計		男	0	2	3	3	0	0	3	5
			女	2		0		0		2	
合計			男	27	35	22	22	8	9	57	66
			女	8		0		1		9	

第25回日本数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学校名
愛知県	愛知工業大学名電高等学校
	旭丘高等学校
	栄徳高等学校
	刈谷工業高等学校
	時習館高等学校
	瑞陵高等学校
	椙山女学園高等学校
	大成高等学校
	千種高等学校
	半田高等学校
	明和高等学校
	横須賀高等学校
岐阜県	鶯谷高等学校
	恵那高等学校
	岐山高等学校
	岐阜東高等学校
三重県	暁学園中学高等学校
	鈴鹿高等学校

学校所在都道府県	学校名
大阪府	大手前高等学校
	近畿大学附属高等学校
	四條畷高等学校
	高槻高校
奈良県	智辯学園高等学校
兵庫県	雲雀丘学園高校
	灘高等学校
和歌山県	橋本高等学校

(2)ジュニア　　　　応募数　75

会場	地域	学校所在地	性別	小学生	中学生 1		中学生 2		中学生 3		合計	
名古屋大学	中部	愛知	男	2	7	9	13	15	15	16	37	42
			女	0	2		2		1		5	
		岐阜	男	0	0	0	2	2	2	2	4	4
			女	0	0		0		0		0	
		三重	男	0	1	1	2	2	10	11	13	14
			女	0	0		0		1		1	
		静岡	男	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0		0		0		0	
	関東	東京	男	0	0	0	0	0	0	1	0	1
			女	0	0		0		1		1	
		神奈川	男	0	1	1	0	0	1	1	2	2
			女	0	0		0		0		0	
	小計		**男**	**2**	**9**	**11**	**18**	**20**	**28**	**31**	**57**	**64**
			女	**0**	**2**		**2**		**3**		**7**	
大手前高校	近畿	大阪	男	0	0	0	1	1	1	1	2	2
			女	0	0		0		0		0	
		京都	男	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0		0		0		0	
		奈良	男	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0		0		0		0	
	九州	佐賀	男	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0		0		0		0	
	小計		**男**	**0**	**2**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**5**	**5**
			女	**0**	**0**		**0**		**0**		**0**	
津高校	中部	三重	男	0	2	2	0	0	0	1	2	3
			女	0	0		0		1		1	
	小計		**男**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**3**
			女	**0**	**0**		**0**		**1**		**1**	
橋本市	近畿	和歌山	男	2	1	1	0	0	0	0	3	3
			女	0	0		0		0		0	
	小計		**男**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3**	**3**
			女	**0**	**0**		**0**		**0**		**0**	
合計			男	**4**	**14**	**16**	**19**	**21**	**30**	**34**	**67**	**75**
			女	**0**	**2**		**2**		**4**		**8**	

第18回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	市町村	学校名
愛知県	名古屋市	愛知教育大学附属名古屋中学校
		猪高中学校
		一柳中学校
		志段味中学校
		椙山女学園中学校
		東海中学校
		八王子中学校
		森孝東小学校
	岩倉市	岩倉南小学校
	岡崎市	愛知教育大学附属岡崎中学校
	春日井市	知多中学校
	豊橋市	石巻中学校
	蒲郡市	海陽中等教育学校
		蒲郡中学校
		三谷中学校
	小牧市	光ヶ丘中学校
	豊川市	代田中学校
		南部中学校
京都府	京都市	洛北中学校

学校所在都道府県	市町村	学校名
岐阜県	郡上市	白鳥中学校
	中津川市	苗木中学校
	本巣市	本巣中学校
三重県	津市	西郊中学校
		三重大学教育学部附属中学校
	四日市市	暁学園暁中学校
佐賀県	佐賀市	佐賀大学文化教育学部附属中学校
神奈川県	鎌倉市	鎌倉学園中学校
静岡県	浜松市	中部中学校
大阪府	大阪市	大阪教育大学附属天王寺中学校
		咲くやこの花中学校
東京都	千代田区	白百合学園中学校
奈良県	奈良市	東大寺学園中学校
和歌山県	橋本市	応其小学校
		隅田小学校
		橋本中学校

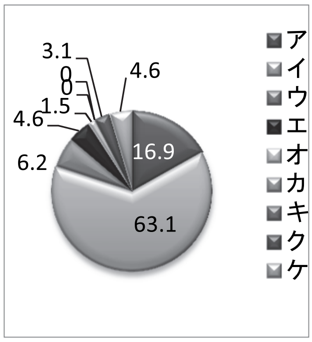
6. 参加者アンケート調査結果

第25回日本数学コンクール

アンケート総数　66

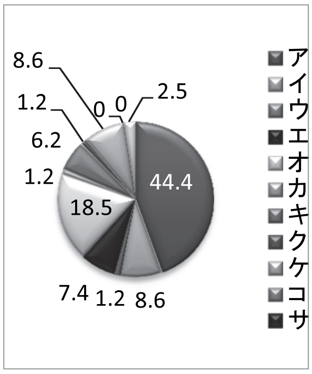
1. 今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	11 人	(16.9 %)
イ 先生から	41 人	(63.1 %)
ウ 友人から	4 人	(6.2 %)
エ 両親から	3 人	(4.6 %)
オ 兄弟姉妹から	1 人	(1.5 %)
カ 新聞で	0 人	(0.0 %)
キ 雑誌で	0 人	(0.0 %)
ク 日本数学コンクールのホームページから	2 人	(3.1 %)
ケ その他	3 人	(4.6 %)
○ 部活動	2 人	
○ 去年まで参加していたので	1 人	



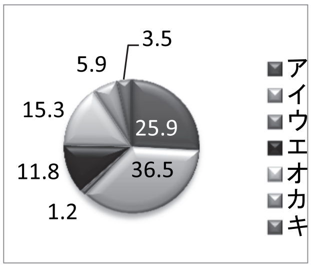
2. 今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	36 人	(44.4 %)
イ 数学が好きになりたいと思ったから	7 人	(8.6 %)
ウ 数学が苦手だから	1 人	(1.2 %)
エ 以前参加して有意義だったから	6 人	(7.4 %)
オ 先生に勧められたから	15 人	(18.5 %)
カ 両親に勧められたから	1 人	(1.2 %)
キ 友人に誘われたから	5 人	(6.2 %)
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	1 人	(1.2 %)
ケ 何となく興味があったから	7 人	(8.6 %)
コ 参考書持参が自由だから	0 人	(0.0 %)
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	0 人	(0.0 %)
シ その他	2 人	(2.5 %)
○ 友人代理	1 人	
○ 数学に没頭したかったから	1 人	



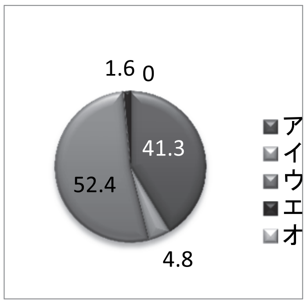
3. 今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	22 人	(25.9 %)
イ 問題は難しいけれど楽しかった	31 人	(36.5 %)
ウ 問題が難しいと思わなかった	1 人	(1.2 %)
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	10 人	(11.8 %)
オ 数学の学問的広さを感じた	13 人	(15.3 %)
カ 問題文の意味が分かりにくい	5 人	(5.9 %)
キ その他	3 人	(3.5 %)
○ 気がくるいそうになった	1 人	
○ 楽しかった	1 人	
○ まあまあ	1 人	



4. 今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	26 人	(41.3 %)
イ 今後の進路を考える参考になると思った	3 人	(4.8 %)
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	33 人	(52.4 %)
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	1 人	(1.6 %)
オ その他	0 人	(0.0 %)



5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

12名 物理
11名 化学
4名 情報

＊ その他（各1名ずつ）
経済、弁論、生物、科学、宇宙、哲学
大学の学部レベルの数学、問題が英語で書いてある数学（辞書持込自由）

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

5名 数学ガール
3名 浜村渚の計算ノート
2名 フェルマーの最終定理
2名 ニュートン
2名 数の悪魔

＊ その他（各1名ずつ）
三角形と円の幾何学、ゼロから学ぶ線形代数、面白くて眠れなくなる数学、超面白くて眠れなくなる数学、超超面白くて眠れなくなる数学、世にも美味しい数学、オイラーの贈り物、黄金比の謎、微分積分学、集合位相入門、線型代数学、代数概論、可換体論、ルベーグ積分入門、The IMO Conpendium、Proofs From THE BOOK、数学ノート、超々難問数理クイズ、幾何入門、不完全定理とは何か、暗号解読、博士の愛した数式

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

【開催日】4月26日（土）「多面体のとんがり度とオイラー数」、「安定性と特異点」
5月24日（土）「結び目のかたちと多項式」、「予測不能性の数理」
6月28日（土）「準結晶、その美しさと不思議」、「双曲平面の3次元ユークリッド空間へのはめ込みに

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	18 人	（ 27.3 ％）
②知らない	43 人	（ 65.2 ％）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	12 人	（ 18.2 ％）
②ない	7 人	（ 10.6 ％）
③わからない	42 人	（ 63.6 ％）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

〇 2次曲線
〇 素数
〇 楕円関数
〇 折り紙で作る正多角体
〇 渋滞学
〇 フーリエ変換
〇 ゼータ関数
〇 結び目
〇 コンウェイ多項式
〇 ジョーンズ多項式
〇 ライデスイスター移動
〇 不変量
〇 P-彩色
〇 巨大な数
〇 カオスと気象モデル
〇 フラクタルの話
〇 四以上の高次元の話
〇 トポロジー
〇 ミウラ折り

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

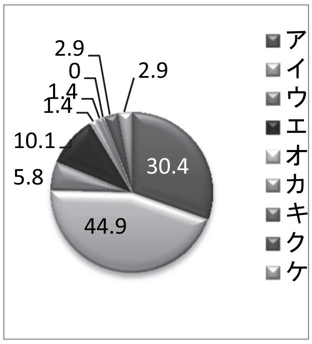
- ○ とても難しかったです。身近なことにも数学で考えることができるのに驚きました。
- ○ すごく難しかったけれど、5時間考えることができ、解けなかったけど楽しかったです。
- ○ 解法の糸口が掴めない複雑な問題
- ○ 電卓が使えて便利さを改めて知った。循環小数についてもっと知りたくなった。一つのことに集中できてとても楽しかった。
- ○ ありがとうございました。
- ○ こういった複雑な問題で難しいものを解くのは初めてだったので、とても大変でした。でも考えて少しでもわかると楽しかったです。そういった問題も解けるようになっていきたいと思いました。
- ○ 自分はまだまだだと悟った。
- ○ 机の上に落書きらしきものが多かった。
- ○ 循環小数の問題がとても楽しかったです。まさか4,649×239=1,111,111だとは思わなかったです。正解しているかわからないけど、とても満足しました。
- ○ 楽しく問題に取り組めました。
- ○ 今回の数学コンクールの問題は難しかったけど、楽しかった。
- ○ これからも数学を愛します！！
- ○ 楽しかったです。
- ○ 今回は2回目の参加で、一年分力をつけてきたつもりでいたが、まだまだ力不足だと感じた。
- ○ 予想していたのと全然問題の傾向が違って驚いた。難しい･･･
- ○ 高校になり、中学のときより一層考えさせられました。楽しかったです。
- ○ 今回の数学コンクール、おもしろかったけどとても難しかった。
- ○ 基本的に何から手をつけていいか分からないような問題ばかりで難しかったのですが、このような問題にたくさんあたっていきたいです。
- ○ 面白かったです。
- ○ とても難しかったので、全然解けませんでしたが、こんなことも数学で表せるのだなと深く思いました。また、これから、数学の見方が変わりました。
- ○ シニア問題3の意味がわからなかったです。
- ○ 計算用紙があればうれしい。問題が他のコンテスト等とは違い、とても楽しかった。
- ○ 自分の応用力の衰えを感じた。冒頭の、高校生の頃一つの問題を2か月考え続けた人の話には驚いた。最近自分がそういうことをやっていないのに気づいた。
- ○ とても楽しかったです！またうけようと思います！！
- ○ なかなかどうやってとけばいいかなどの考えがでてこなかった。

第18回日本ジュニア数学コンクール

アンケート総数　75

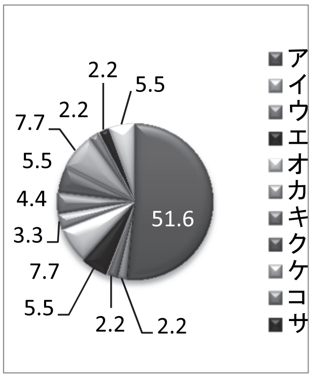
1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	21 人	（ 30.4 %）
イ 先生から	31 人	（ 44.9 %）
ウ 友人から	4 人	（ 5.8 %）
エ 両親から	7 人	（ 10.1 %）
オ 兄弟姉妹から	1 人	（ 1.4 %）
カ 新聞で	1 人	（ 1.4 %）
キ 雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ク 日本数学コンクールのホームページから	2 人	（ 2.9 %）
ケ その他	2 人	（ 2.9 %）
○ 学校の講座で	1 人	
○ 論文賞の表彰式で	1 人	



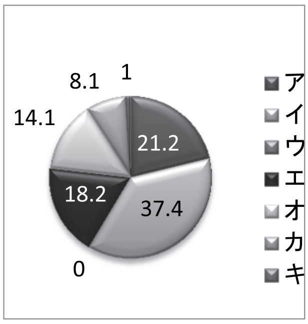
2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	47 人	（ 51.6 %）
イ 数学が好きになりたいと思ったから	2 人	（ 2.2 %）
ウ 数学が苦手だから	2 人	（ 2.2 %）
エ 以前参加して有意義だったから	5 人	（ 5.5 %）
オ 先生に勧められたから	7 人	（ 7.7 %）
カ 両親に勧められたから	3 人	（ 3.3 %）
キ 友人に誘われたから	4 人	（ 4.4 %）
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	5 人	（ 5.5 %）
ケ 何となく興味があったから	7 人	（ 7.7 %）
コ 参考書持参が自由だから	2 人	（ 2.2 %）
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	2 人	（ 2.2 %）
シ その他	5 人	（ 5.5 %）
○ 考えることが好きだから	1 人	
○ どのような問題が出てくるか楽しみだから	1 人	
○ 経験のため	1 人	
○ 前回賞を取ったが都合が悪く、表彰式に行けなかったから	1 人	
○ 自分の実力を確かめたかった	1 人	



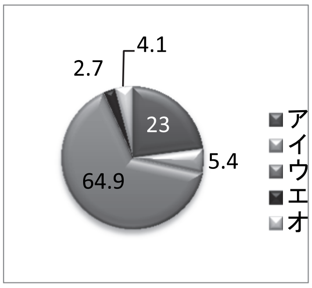
3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	21 人	（ 21.2 %）
イ 問題は難しいけれど楽しかった	37 人	（ 37.4 %）
ウ 問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	18 人	（ 18.2 %）
オ 数学の学問的広さを感じた	14 人	（ 14.1 %）
カ 問題文の意味が分かりにくい	8 人	（ 8.1 %）
キ その他	1 人	（ 1.0 %）
○ ③の問題文の意味が分かりにくかった	1 人	



4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	17 人	（ 23.0 %）
イ 今後の進路を考える参考になると思った	4 人	（ 5.4 %）
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	48 人	（ 64.9 %）
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	2 人	（ 2.7 %）
オ その他	3 人	（ 4.1 %）
○ 焦りを感じた	1 人	
○ またやってみたい	1 人	
○ やはり数学は面白い	1 人	



5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

11名 歴史
8名 物理
7名 科学
5名 化学
3名 英語
3名 地理
3名 計算
2名 社会
2名 現象
2名 生物

＊ その他（各1名ずつ）
公民,日本史、理科,医学,地史,古典,パズル,自由研究,情報科学

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

6名 数の悪魔
5名 フェルマーの最終定理
2名 高校への数学
2名 世にも美味しい数学
2名 博士の愛した数式
2名 浜村渚の計算ノート
2名 ニュートン
2名 数学オリンピック

＊ その他（各1名ずつ）
もっと数学が好きになる本、素数のひみつ、アインシュタイン、微分積分、虚数の情緒、数学物語、マンガでわかる微分積分、御子紫岳人、チャート式、面積迷路、そしてFになる、数学ガール、Q.E.D、中学への算数、世界でもっとも美しい数学パズル、とっておきの数学パズル、ガロアの遺言、計算力に強くなる、やさしくわかる数学のはなし77、世界は2乗でできている

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

【開催日】4月26日（土）「多面体のとんがり度とオイラー数」、「安定性と特異点」
5月24日（土）「結び目のかたちと多項式」、「予測不能性の数理」
6月28日（土）「準結晶、その美しさと不思議」、「双曲平面の3次元ユークリッド空間へのはめ込みについて」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	9 人	（ 12.0 %）
②知らない	54 人	（ 72.0 %）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	8 人	（ 10.7 %）
②ない	4 人	（ 5.3 %）
③わからない	51 人	（ 68.0 %）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
○ 光ファイバーについて
○ 無理数などの実数について
○ 図形関係のもの（特に円）
○ いろいろな定理の証明
○ ピタゴラス数
○ ラッセル卿がやった「1＋1＝2」の証明についての説明
○ 自分の実際の生活に役立てることができるもの
○ フェルマーの最終定理
○ トランプゲームのブラックジャックにおける確率→絵札を0、2～6は-1、7～9は1とおいて、ナチュラルブラックジャックが出る確率を求めていく。（ジョーカーはなし）
○ 立体図形について
○ 平均曲率一定曲面（極小曲面を含む）について

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- ○ 頭をフル回転させても出来ない問題が沢山ありました。これからはもっと思考力を鍛えたいです。
- ○ 学校で習う問題の応用みたいな感じで、思考が広がっていく、みたいなのが良いと思った。
- ○ 今回初めてこのようなところに来て、とても有意義な経験になったなぁと思った。
- ○ 文章をわかりやすくしてほしい。
- ○ 今回のコンクールは、わかりずらかったり、おもしろいものがたくさんあったので、また来てみたいと思いました。
- ○ 今後も数学コンクールを続けてほしい。
- ○ 4問ともはじめて見る問題でした。ですが、こんな問題があるんだなどの新しい発見もありました。今後もこのようなイベントを行ってほしいです。
- ○ 難しかったです。
- ○ 問題をあと1、2個増やしてほしい。
- ○ もう少し簡単なものもいれてほしかった。でも、難しい問題にチャレンジできて楽しかった。
- ○ 団体戦にした方がおもしろい。
- ○ 数学の本質をついた問題が多くあり、大変良いコンクールでした。今までに習ってきた、算数、数学の応用が試され、基礎的なこととは遠い、考えを巡らせる必要がありました。約5時間、4つの課題に真剣に取り組むことができ、とても良い経験ができたと感じます。今後、このようなコンクールがあればぜひ参加したいと思います。
- ○ かなり楽しかった。大学もきれいだった。
- ○ とても難しい問題ばかりで途中で考えるのが嫌になってきましたが、それも全部含めて数学の楽しさ、奥深さだということが今日でよくわかりました。また機会があれば参加したいと思います。
- ○ 自由にできる感じが大学らしくていいです。でも、さすがに立ち座り自由で、この会場で、さすがに他の人の解答が見えやすい。でもがんばって見ないようにしました。あと、1問程度にして下さい。この時間の量は長くて数学がいやになりようです。（まぁそれはないです。）
- ○ これまで見たことのないような問題でとても難しく、焦りを感じました。これを期に、もっと努力をしていきます。
- ○ シャーペンが使いやすい。問題は、数学というか、文学＋数学という感じ。
- ○ 学校でやる数学と違って、どう考えればいいのかというところから考える必要がある問題だった。
- ○ 全て解けるとは思っていなかったけど、こんなに難しいとは思わなかった。数学の世界の広さを今日知ることができたので、家や学校でもっと勉強したい。
- ○ 予想してた問題と違ったけど、全4問全てがとても難しい問題だった。
- ○ 数学はできても、応用力がなければだめだと感じた。
- ○ 数学コンクールは1人でやるのですが、チームでやるようなものがあっても良いのではないでしょうか。
- ○ 問題は難しかったが、楽しかった。また機会があれば受けてみたいです。
- ○ 証明から確立まで、幅広く問題があったので、解いていて楽しかった。だけど、もう少し計算の要素を増やしてほしい。
- ○ 思ったより時間を短く感じ、楽しめました。
- ○ 問題にもう少しヒントがあればあと少しは問題が楽に解けたと思う。イスがあんまりよくなかったと思う。
- ○ 問題は普段学校で習わないようなもので、とても難しいと感じました。
- ○ すごく楽しかったけど、こういう問題はどういう練習やひらめきをすれば解けるか知りたいです。
- ○ とても難しく、長いものだったけれど、とても楽しかった。また参加してみたい。
- ○ 教科書での勉強が全てではないんだなと改めて気づかされた。
- ○ 問題はとても難しかったが、解けたときの喜びも大きかった。とても楽しかった。
- ○ 全体的に去年よりも難しかった。
- ○ 長い時間をかけて問題がとけて面白かった。
- ○ 図形や規則性などの問題があってとても自分のためになったと思います。来年も参加したいです。今回で自分の苦手分野がはっきりと分かったので、来年はこの苦手分野をなくして挑みたいです。
- ○ 問題は全然解けませんでしたが、わからないなりに考えるのは楽しかったです。
- ○ 難しかったし長かったですが、面白かったです。中止になったけれど、できて良かったです。ありがとうございました。
- ○ 今回の会場の座席がとても座りにくかった。
- ○ このアンケートの集計結果を全て（省略することなしに）公開する必要はないと思った。この意見がそちらにとって有益であると判断された場合もそうでない場合もそちらはこの意見を公開するだろうから、私はこの意見の価値を判断することができない。という意見は（少なくともコンクールにとっては）無益なので、私はやっと最初の意見の価値がどのように捉えられているかを判断できる。
- ○ 解答欄が狭いです。
- ○ 5時間30分でやるには少々難しすぎると思った。
- ○ 有意義な時間でした。
- ○ 5時間も1つの問題に費やしたのに、結局解けなくて悔しかった。
- ○ 参考書を持ってきてもいいといったかなり自由な大会だなと思ったが、かなり問題が難しかった。来年も参加できたら参加したい。
- ○ かなり難しいです。
- ○ とても難しかったけど楽しかった。またやってほしい。

日本数学コンクール実行委員会委員名簿

学内委員	宇　澤　　　達	（多元数理科学研究科　教授）
	林　　　正　人	（多元数理科学研究科　教授）
	伊　師　英　之	（多元数理科学研究科　准教授）
	吉　川　浩　史	（理学研究科　助教）
	佐　藤　潤　也	（情報科学研究科　准教授）
	花　薗　　　誠	（経済学研究科 准教授）
	田　地　宏　一	（工学研究科　准教授）
	柴　田　好　章	（教育発達科学研究科　准教授）
	渡　辺　武　志	（教育学部附属高等学校　教諭）
	大　羽　　　徹	（教育学部附属高等学校　教諭）
学外委員	鈴　木　紀　明	（名城大学理工学部　教授）
	松　川　和　彦	（元愛知江南短期大学　元工学部総務課長）
	高　田　宗　樹	（福井大学大学院工学研究科　准教授）
	丹　羽　一　雄	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	服　部　展　之	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	野　村　昌　人	（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
	児　玉　靖　宏	（愛知県立一宮商業高等学校　教諭）
	村　田　英　康	（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
	小　島　洋　平	（愛知県立幸田高等学校　教諭）
	服　部　保　孝	（愛知県立松蔭高等学校　校長）
	渡　辺　喜　長	（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
	青　木　勝　人	（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
	高　原　文　規	（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
	樋　口　英　次	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	矢　野　秀　樹	（愛知県立東海商業高等学校　教諭）
	山　内　真澄美	（愛知県立豊明高等学校　教諭）
	伊　藤　慎　吾	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	小　島　彰　二	（名古屋高等学校　教諭）
	土　岐　慎　一	（岐阜県立多治見北高等学校　講師）
	奥　田　真　吾	（三重県立津西高等学校　講師）
	岩　本　隆　宏	（三重県立伊勢高等学校　教頭）
	堀　川　　　浩	（鈴鹿中学校・高等学校　教諭）
	田　所　秀　明	（元三重県立伊勢高等学校　教諭）
	小　倉　一　輝	（三重県立上野高等学校　講師）
	深　川　　　久	（雲雀丘学園中学校・高等学校　教諭）
	市　川　　　敏	（椙山女学園高等学校　教諭）
	鈴　木　道　彦	（愛知県立一宮高等学校　教諭）
	大須賀　裕　貴	（愛知県立時習館高等学校　教諭）
	青　木　健一郎	（愛知県立刈谷高等学校　教諭）
	田　邉　　　篤	（三重県立津高等学校　教諭）
協力者	宮　本　典　昭	（和歌山県立田辺高等学校　教諭）

日本数学コンクール委員会委員名簿

委員長	國　枝　秀　世	（理事・副総長）
委　員	菅　野　浩　明	（多元数理科学研究科長）
	神　保　雅　一	（情報文化学部長）
	根　本　二　郎	（経済学研究科長）
	篠　原　久　典	（理学研究科長）
	松　下　裕　秀	（工学研究科長）
	坂　部　俊　樹	（情報科学研究科長）
	竹　下　典　行	（理事・事務局長）
	塩　原　耕　次	（研究協力部長）
	宇　澤　　　達	（多元数理科学研究科　教授）

主　　　催

名　古　屋　大　学
日本数学コンクール委員会
名古屋市千種区不老町

後　　　援

愛知県教育委員会	岐阜県教育委員会
三重県教育委員会	大阪府教育委員会
大阪市教育委員会	名古屋市教育委員会
和歌山県橋本市教育委員会	愛知県高等学校数学研究会
岐阜県高等学校数学教育研究会	三重県高等学校数学教育研究会
大阪高等学校数学教育会	中日新聞社
テレビ愛知株式会社	東海テレビ放送株式会社

■■■ 編　集　後　記 ■■■

数学コンクールはついに第２５回という節目を迎えました。ところが、今年は台風による延期という前例のない出来事のため、表彰式が終わるまではとにかく無事にやりおおせることで頭がいっぱいで、節目については余り意識が向かなかったように思います。結果として万事が問題無く進んだのは関係者各位の尽力のおかげですが、積み上げてきた２５年間の実績と経験の賜物であるともいえ、図らずもコンクールの長い歴史を深く実感することになりました。次の節目である３０回目や５０回目に思いを馳せつつも、まずは２６回目を全力で成し遂げることが現在の目標です。