2018

日本数学コンクールのまとめ

第29回　日本数学コンクール
第22回　日本ジュニア数学コンクール

-平成30年8月5日実施-

第19回　日本数学コンクール論文賞

日本数学コンクール委員会
名古屋大学

１．はじめに

日本数学コンクールを開催して

日本数学コンクール委員会委員長　髙橋　雅英
（名古屋大学研究担当理事）

平成30年8月に、名古屋大学主催の第29回日本数学コンクールおよび第22回日本ジュニア数学コンクールを無事開催することができ、ご尽力いただいた関係者の皆様に心より感謝申し上げます。今回も昨年度に続き500名を超える中高生の皆さんが参加してくれ、活気と熱気に満ちたコンクールになりました。本コンクールには個人戦、団体戦、論文賞という3つのカテゴリーがあり、本年は個人戦に93名、団体戦に121チーム420名、論文賞には45本の応募がありました。毎年、仲間と一緒に協力して問題を解く団体戦に多くの生徒が参加してくれています。

本コンクールは学校での数学の試験とは異なり、5時間半という持ち時間の中で、自由な発想、独創的な発想で問題を解いてもらうことが特色です。特定の1問だけに集中しても良いし、複数の問題にチャレンジしても良く、参加者の個性を大事にするコンクールとして企画されています。本年の出題問題も１．畳の敷き方　２．靴ひもの結び方　３．返品保証の有効活用４．鮎の養殖池　５．立方体倍積問題の近似解など、身の回りの題材を取り上げたものから、数学の本質を問いかけるものまで幅広く、数学の楽しさを実感してもらう工夫がちりばめられています。参加者からは「問題は難しかったけど楽しかった」という感想が多く寄せられ、いつもと違う考え方で数学の問題を解く面白さを味わってもらう機会になったものと思います。

また、本年度初めての取り組みとしてクラウドファンディングを実施いたしました。大学も財政状況が厳しくなる中、このようなコンクールを継続していく上で、独自の運営費を獲得する努力が必要になっています。今回は46名の方々から計56万5千円のご寄附を賜り、表彰者への記念品の費用などに使用させていただきました。ご寄附をいただきました皆様にこの誌面をお借りして、心より御礼申し上げます。来年度以降も寄附の取り組みを続けていく予定でありますので、皆様のご支援を何卒宜しくお願い致します。

本コンクールを通じて数学が楽しいと思う若者が育ち、将来数学で学んだことを様々な分野で応用でき、活躍する人材の育成につながれば、私たちとしても嬉しい限りです。受賞した人も、残念ながら受賞を逃した人も引き続き数学の面白さを追求していってください。最後に、お忙しい中で問題を考え、作成していただいた先生方、解答の評価をしていただいた先生方に心より御礼を申し上げます。来年度も多くの小中高生の参加を期待しています。

２．日本数学コンクール開催の趣旨

開催の趣旨

今日世界はいろいろな意味で大きな転機に立っています。産業技術の高度化や高度情報化の技術革新は急速な進展を見せていますが，反面，人口爆発，エネルギー問題，環境汚染等人類がかつて経験したことのない複雑多岐にわたる課題に直面しています。このような問題を解決し，将来にわたって人類社会の発達と繁栄を享受していくためにも，総合的，学際的な学術研究の振興が必要です。このことは，必然的に汎科学性を有する数学の一層の飛躍とそれによる新しい科学の発展が求められており，それを支える優れた数学的思考力を持ち，探求心と創造性豊かな人材の育成が急務となっています。

このような情勢にかんがみ，新しい科学と技術の開拓を担う夢とロマンを秘めた青少年の発掘，伸長を図っていくため，中・高校生を対象に，平成 2 年度から「日本数学コンクール」を，同 9 年度からは「日本ジュニア数学コンクール」を，同 12 年度からは「論文賞」を開催してきました。そして同 27 年度からは，協力して解を導き出せる人材の発掘・育成のため「団体戦」を導入しました。私ども委員会は今後とも数学コンクールを実施し，もって世界の学術研究進展の基礎形成に寄与していくものです。

特　色

◎自由にゆったり考える

一題に絞っての解答も可能です。参考書やノート等の持ち込みも自由です。途中，試験会場で昼食や飲み物などを自由に取ることができます。

◎楽しい数学の発見

学校における数学の教育課程，教科書にとらわれず，数学の本質に根ざした考えていて楽しい問題を提供します。数理実験も積極的に採り入れます。

◎多彩な才能の評価

優秀な能力をもった生徒，ユニークな発想をもった生徒等様々な参加者の才能を多面的に評価します。特定の一題に集中して素晴らしい発想を出した生徒も顕彰します。

◎優れた人材の育成

日本数学コンクール参加者の数学的な能力，資質を一層高めるために，定期的に，中・高校生を対象に数学の公開講座「数理ウェーブ」を開催しています。

なお，「数理ウェーブ」は一般の方々の参加も認めており，多数の参加があります。

３．講評と解説

（１）２０１８年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評

日本数学コンクール実行委員会委員長　宇澤　達
（名古屋大学多元数理科学研究科教授）

共通問題１　「畳の敷き方」
　畳の敷き方、同じ形のもので平面といったものを敷き詰める問題は、タイルにみたてて、英語ではタイル張りの問題とよんでいます。ここでは、半畳のたたみを一つだけ混ぜることにより変化を出しました。古くからある問題も少し変化させるといろいろな発展がでてくる一つの例です。

共通問題２　「靴ひもの結び方」

　結び目の問題です。結び目は昔からあるものですが、数学の対象となったのは比較的最近です。DNAといった生物学の問題、数理物理学との関連もあり、活発な分野です。皆さんよく頑張って回答してくださいました。

共通問題３　「返品保証の有効活用」

　パスカルの三角形は、漸化式で定義される数列の代表例です。自然数からなる数列ですが、これを「素数を法」として考える、つまり素数で割った余りを考えるといままで見えなかった規則性をみることができます。

共通問題４　「鮎の養殖池」
　円の中を詰め込む、英語ではcircle packingの問題とよびます。ここでは、円を鮎のテリトリーにみたてて、いろいろな要素が変化する時に、circle packingがどのように変化するか、実験的な視点もいれて問題としました。数学の分野としては複素関数論に関係が深い分野です。

共通問題５　「立方体倍積問題の近似解」
　２の平方根、三乗根などの数が有理数で表せないことはギリシャ人が最初に発見したと言われています。その当時の数学者は大変なショックを受けたとも伝えられています。バビロニアの粘土板には２の平方根が小数点下６桁まで正確に計算したものもあるので、現代からみれば不思議なことです。このような数をどのようにしていくらでも正解に近い値を計算するか、その方法についての問題です。このような問題を非線形問題とよび、計算機の発展とともに活発に研究されている分野です。

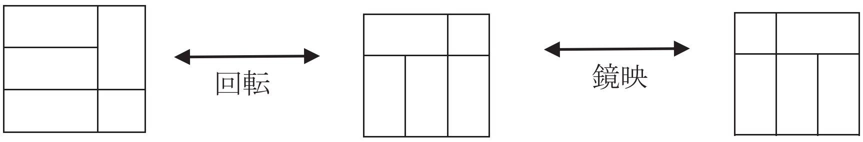
　以上全ての問題について、参加者の皆さん、よく頑張ってくださいました。ありがとうございます。

（２）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール　共通問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員
岩本　隆宏（三　重　高　等　学　校　講師）
奥田　真吾（三重県立津高等学校　講師）
小倉　一輝（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
田邉　　篤（三重県立津高等学校　教諭）

問題 1.「畳の敷き方」

m×n の長方形の部屋に k 畳半の畳を敷き詰めるとき、その敷き詰め方の総数を考えます（m，n，k は１以上の整数とします）。ただし、畳は１×２または２×１を１畳、１×１を半畳とし、半畳の畳は１枚だけ使用するものとします。また、回転や鏡映によって移り合う敷き方はそれぞれ別の敷き方として数えることにします。 例えば ３×３の場合、次の３つは別の敷き方として数えます。



（1） ３×３の場合は、４畳半の畳の敷き詰め方の総数は何通りでしょうか。
（2） ３×５の場合はどうでしょうか。
（3） ３×n の場合はどうでしょうか。
（4） ５×５の場合はどうでしょうか。
（5）その他の場合はどうでしょうか。自由に考えてみてください。

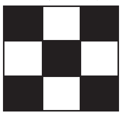
解説と講評

半畳を考えない問題、すなわち、m×n(m，n の少なくとも一方は偶数）については既に解決されており、1961 年に英国の 3 人の物理学者によって公式が作られています。統計物理学では自由エネルギーなどの熱力学的情報を得るためにこの計算は大きなテーマになっているようです。最後に触れます。

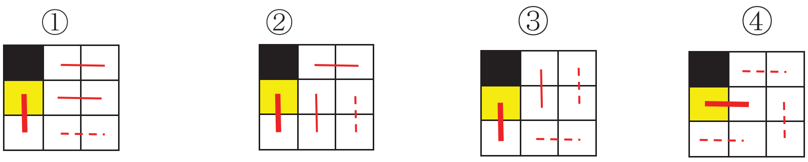
そこで、(奇数)×(奇数)の場合には、必ず半畳を考えざるを得なくなります。半畳の畳を１枚だけ使用するという条件では、果たしてどのような考え方が必要になるのでしょうか。それが、この問題です。

「畳」に類似したものとして「レンガ」､「ドミノ」が用いられています。一般的には。与えられた領域をサイズ 1×2 の長方形(ドミノ)で隙間無く敷き詰めることをタイル張りといい､「ドミノタイリング」（domino tiling）という表現がよく使われています。ネットで検索してみて下さい。また、ドミノはポリオミノの１つであり、多種多様な図形の敷き詰め問題の１つでもあります。ただし、ポリオミノとは、何個かの同じ大きさの正方形を辺どうし繋ぎ合わせた図形のことです。

（1）半畳の位置については、下図のように市松模様にすると、黒が５個、白が４個で黒が１個多くなり黒の所が半畳にする必要があります。そして、このような長方形の場合は、各１個の黒の半畳以外において、必ず、1 個の黒と 1 個の白で 1 畳にすることができます。

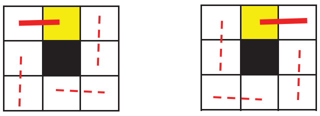


まず、半畳が左上の角にあるとき、真下の半畳(黄)は下または右と連結する場合があり、次のように 4 通りになります。(実線が決まれば、点線は必然的に決まります。)



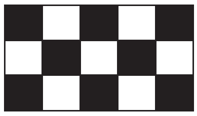
これらを、真ん中の正方形の対角線の交点を中心に、時計回りに 90°　180°　270°　回転すると、4 通りずつできるので、4×4＝16（通り）になります。

真ん中に半畳がくる場合は、次の 2 通りがあります。



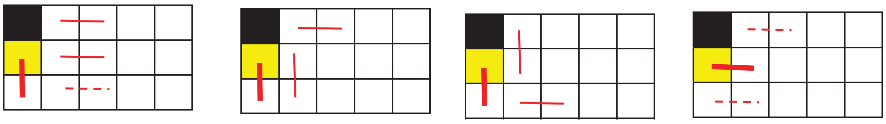
よって、3×3 の場合は、16＋2＝18（通り）です。

（2） 3 × 5 の場合も半畳の位置は、（1） の 3 × 3 のときと同様に、次の黒の部分になります。



（ⅰ）半畳が左上の角にあるとき、真下の半畳(黄)は下または右と連結する場合があり、

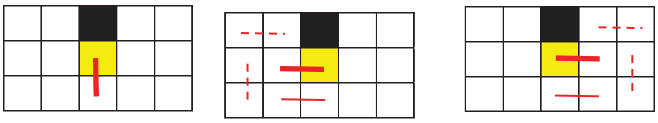
㋐ ㋑ ㋒ ㋓



㋐の右側 2 列は 3×2 であるから、それぞれ(1)の①②③の 3 通り、
㋑㋒㋓の右側 3 列は、(1)の①②③④の 4 通り、
よって、3＋4・3＝15 (通り)

（ⅱ）半畳が上段の中央にあるとき、真下の半畳(黄)は下、左、右と連結する場合があり、

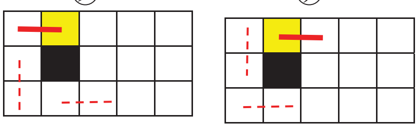
㋔ ㋕ ㋖



㋔の左側 2 列と右側 2 列の 3×2 で 3 通りずつ、それぞれ変化するから、3・3＝9（通り）
㋕㋖の右側 2 列の 3×2 は、それぞれ 3 通りより、3＋3＝6 (通り)
よって、9＋6＝15（通り）

（ⅲ）半畳が中段の左から 2 番目にあるとき、

㋗ ㋘

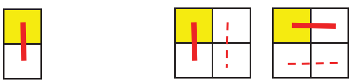


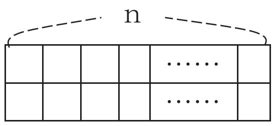
㋗㋘の右側 3 列の 3×3 は、それぞれ 4 通りより、4＋4＝8 (通り)

（ⅰ)～(ⅲ)より、(ⅰ)×4＋(ⅱ)×2＋(ⅲ)×2＝15・4＋15・2＋8・2＝106（通り）

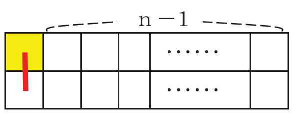
（3）3× n の前に、半畳はない 2× n について考えておきましょう。

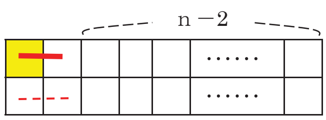
n =1 のとき　n =2 のとき





1 畳の畳の敷き方の総数を、F_nとおくと、次の 2 つの場合があります。





それぞれ、F_{n-1}通り、F_{n-2}通りになります。これらは重複しないので、

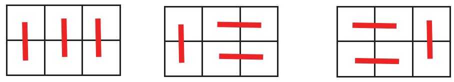
$F_1 = 1$，$F_2 = 2$，　$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ と表せます。$\{F_n\}$: 1, 2, 3, 5, 8, …となり、

この数列$\{F_n\}$は、フィボナッチ数列と呼ばれており $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$ となります。

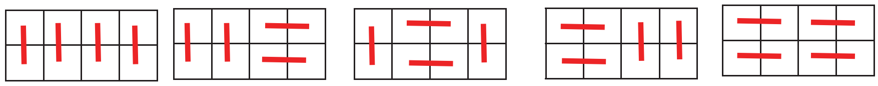
ただし、一般的なフィボナッチ数列は 1, 1, 2, 3, 5, 8, … より、$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$です。

F_3～F_5の畳の敷き方を見てみましょう。（これらは、(5)において漸化式を作る土台になります。）

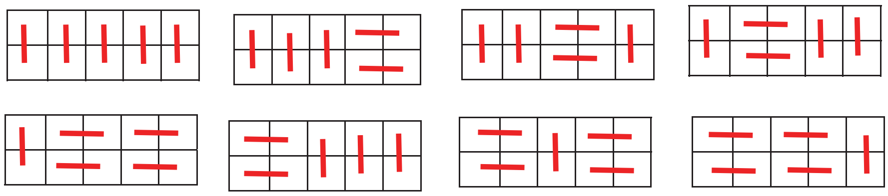
$F_3=3$



$F_4=5$

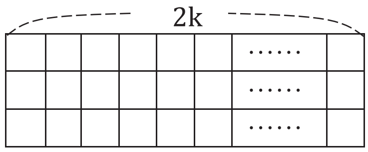


$F_5=8$

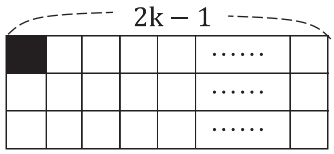


次に、3×ｎについて、考えましょう。

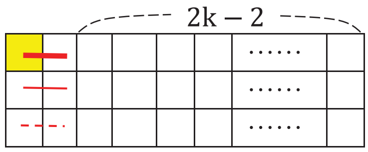
ｎが偶数、すなわちｎ＝2k（ｋは整数)のとき、半畳はなく、畳の敷き方の総数をa_{2k}とおき、ｎが奇数、すなわちｎ＝2k－1（ｋは整数)のときでかつ半畳が左上の角のとき、畳の敷き方の総数をb_{2k-1}とおきます。



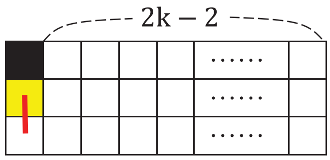
a_{2k}通り



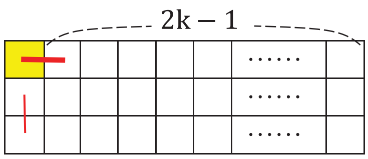
b_{2k-1}通り



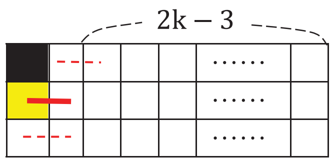
a_{2k-2}通り



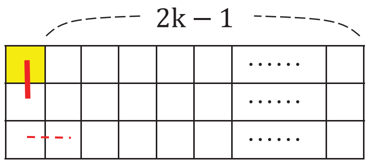
a_{2k-2}通り



b_{2k-1}通り



b_{2k-3}通り



b_{2k-1}通り

$a_{2k}=a_{2k-2}+2b_{2k-1}$　　…　…　①

$b_{2k-1}=a_{2k-2}+b_{2k-3}$　……②

②より、$a_{2k-2}=b_{2k-1}-b_{2k-3}$　　ｋ→ｋ＋1 とすると、

$a_{2k}=b_{2k+1}-b_{2k-1}$　　この 2 式を①に代入して、

$b_{2k+1}-b_{2k-1}=(b_{2k-1}-b_{2k-3})+2b_{2k-1}$

∴ $\boxed{b_{2k+1}-4b_{2k-1}+b_{2k-3}=0,\ b_1=1,\ b_3=4}$　……③

特性方程式　$x^2-4x+1=0$ の解は、$x=2\pm\sqrt{3}$より

$b_{2k-1}=A\left(2+\sqrt{3}\right)^k+B\left(2-\sqrt{3}\right)^k$とおける。$b_1=1,\ b_3=4$を満たすのは、$A=\frac{\sqrt{3}}{6},\ B=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

よって、$\boxed{b_{2k-1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k-\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}}$　……④

①より、$b_{2k-1}=\frac{1}{2}(a_{2k}-a_{2k-2})$　　ｋ→ｋ－1 とすると

$b_{2k-3}=\frac{1}{2}(a_{2k-2}-a_{2k-4})$　この 2 式を②に代入して

$\frac{1}{2}(a_{2k}-a_{2k-2})=a_{2k-2}+\frac{1}{2}(a_{2k-2}-a_{2k-4})$

∴ $\boxed{a_{2k}-4a_{2k-2}+a_{2k-4}=0,\ a_2=3,\ a_4=11}$　……⑤

特性方程式　$x^2-4x+1=0$ の解は、$x=2\pm\sqrt{3}$より

$a_{2k}=A\left(2+\sqrt{3}\right)^k+B\left(2-\sqrt{3}\right)^k$とおける。$a_2=3,\ a_4=11$を満たすのは、$A=\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ B=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

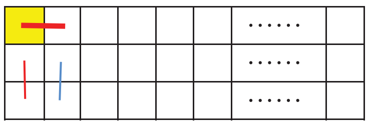
よって、$\boxed{a_{2k}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^k}$ ……⑥

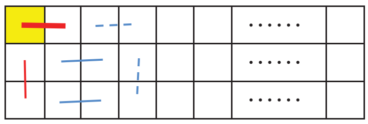
$\alpha=2+\sqrt{3},\ \beta=2-\sqrt{3}$とおくと

$\boxed{b_{2k-1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\alpha^k-\beta^k\right)、\quad a_{2k}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\alpha^k+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta^k}$ ……⑦

また、⑥の別解として、　a_{2k}だけで解く方法もあります。

①のb_{2k-1}は次の２つの繰り返しであるから。





$b_{2k-1}=a_{2k-2}+a_{2k-4}+a_{2k-6}+\cdots\cdots+a_2+1$　　となります。

①より、$a_{2k}=a_{2k-2}+2(a_{2k-2}+a_{2k-4}+a_{2k-6}+\cdots\cdots+a_2+1)$

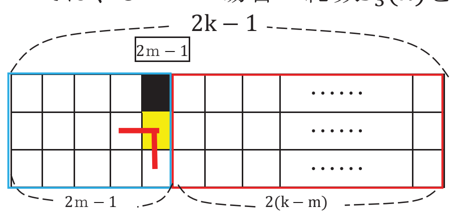
$\therefore\ a_{2k}=3a_{2k-2}+2(a_{2k-4}+a_{2k-6}+\cdots\cdots+a_2+1)$　　　$k\to k-1$　とすると、

$a_{2k-2}=3a_{2k-4}+2(a_{2k-6}+a_{2k-8}+\cdots\cdots+a_2+1)$

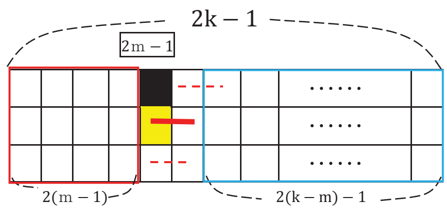
辺々を引くと、$a_{2k}-a_{2k-2}=3a_{2k-2}-a_{2k-4}$

$\therefore\quad a_{2k}=4a_{2k-2}-a_{2k-4}$　これは、⑤と一致します。

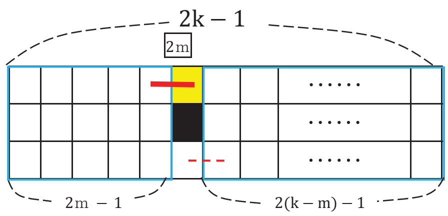
では、3×ｎの場合の総数$S_3(n)$を求めてみましょう。



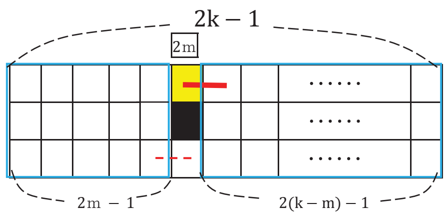
$b_{2m-1}\times a_{2(k-m)}(2\leqq m\leqq k-1)$…… $\boxed{1}$



$a_{2(m-1)}\times b_{2(k-m)-1}(2\leqq m\leqq k-1)$…… $\boxed{2}$



=



$b_{2m-1}\times b_{2(k-m)-1}(1\leqq m\leqq k-1)$…… $\boxed{3}$　　　　$\boxed{3}$ と同じ

⑦を用いると、$2\leqq m\leqq k-1$のとき、⑦より、

$\boxed{1}+\boxed{2}=\ b_{2m-1}\times a_{2(k-m)}+a_{2(m-1)}\times b_{2(k-m)-1}$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^m-\beta^m)\times\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\alpha^{k-m}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta^{k-m}\right)+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\alpha^{m-1}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta^{m-1}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\alpha^{k-m}-\beta^{k-m}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{12}(\alpha^k-\alpha^{k-m}\beta^m)+\frac{\sqrt{3}-1}{12}(\alpha^m\beta^{k-m}-\beta^k)+\frac{\sqrt{3}+1}{12}(\alpha^{k-1}-\alpha^{m-1}\beta^{k-m})+\frac{\sqrt{3}-1}{12}(\alpha^{k-m}\beta^{m-1}-\beta^{k-1})$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{12}(\alpha+1)\alpha^{k-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{12}(\beta+1)\beta^{k-1}-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{12}\beta-\frac{\sqrt{3}-1}{12}\right)\alpha^{k-m}\beta^{m-1}-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{12}\alpha\right)\alpha^{m-1}\beta^{k-m}$

ここで、$\frac{\sqrt{3}+1}{12}(\alpha+1)=\frac{1}{12}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3+\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}\alpha$

$\frac{\sqrt{3}-1}{12}(\beta+1)=\frac{1}{12}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}\beta$

$\frac{\sqrt{3}+1}{12}\beta-\frac{\sqrt{3}-1}{12}=\frac{(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}+1}{12}=0,$　　$\frac{\sqrt{3}+1}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{12}\alpha=\frac{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{12}=0$

よって、$\boxed{1}+\boxed{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\alpha\cdot\alpha^{k-1}-\frac{\sqrt{3}}{6}\beta\cdot\beta^{k-1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\alpha^k-\beta^k\right)}$ ……⑧

したがって、$\boxed{1}+\boxed{2}$はmに関係なく一定、すなわち半畳が上段または下段のある場合は、左上の角にある場合の④に等しくなっていることが分かります。

次に、中段に半畳がある場合は、$2\times\boxed{3}$より、$1\leqq m\leqq k-1$のとき、

$2\times\boxed{3}=\ 2\,b_{2m-1}\times b_{2(k-m)-1}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^m-\beta^m)\times\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^{k-m}-\beta^{k-m})$

$=\frac{1}{6}\left(\alpha^k+\beta^k-\alpha^m\beta^{k-m}-\alpha^{k-m}\beta^m\right)$

$m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ k-1$のときのすべての和を求めてみましょう。

$$\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{6}(\alpha^k+\beta^k-\alpha^m\beta^{k-m}-\alpha^{k-m}\beta^m)=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{k-1}(\alpha^k+\beta^k-2\alpha^m\beta^{k-m})$$

$$=\frac{k-1}{6}\alpha^k+\frac{k-1}{6}\beta^k-\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{k-1}\alpha^m\beta^{k-m}$$

ここで、$\sum_{m=1}^{k-1}\alpha^m\beta^{k-m}=\alpha\beta^{k-1}+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha^3\beta^{k-3}+\cdots\cdots+\alpha^{k-1}\beta$

$$=\frac{\alpha\beta^{k-1}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1}-1\right\}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}=\frac{\alpha^k\beta-\alpha\beta^k}{\alpha-\beta}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\alpha^k-\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\beta^k$$

よって、$\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{6}(\alpha^k+\beta^k-\alpha^m\beta^{k-m}-\alpha^{k-m}\beta^m)=\frac{k-1}{6}\alpha^k+\frac{k-1}{6}\beta^k-\frac{1}{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\alpha^k-\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\beta^k\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}k-2}{6\sqrt{3}}\alpha^k-\frac{\sqrt{3}k+2}{6\sqrt{3}}\beta^k \quad \cdots\cdots ⑨$$

3×ｎの場合の総数$S_3(n)$は

$S_3(2k-1)=⑧\times 2k+⑨=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\alpha^k-\beta^k\right)\times 2k+\left(\frac{\sqrt{3}k-2}{6\sqrt{3}}\alpha^k-\frac{\sqrt{3}k+2}{6\sqrt{3}}\beta^k\right)$より

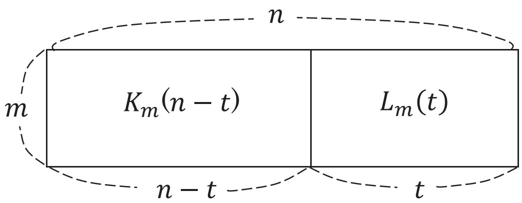
$S_3(2k-1)=\frac{(6+\sqrt{3})k-2}{6\sqrt{3}}\alpha^k-\frac{(6-\sqrt{3})k+2}{6\sqrt{3}}\beta^k$、　$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$より

$$\boxed{S_3(2k-1)=\frac{(6+\sqrt{3})k-2}{6\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^k-\frac{(6-\sqrt{3})k+2}{6\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^k} \quad \cdots\cdots ⑩$$

$S_3(1)=2$，$S_3(3)=18$，$S_3(5)=106$，$S_3(7)=540$，$S_3(9)=2554$，$S_3(11)=11542$，……

⑥が正解だったのが、チーム「筑駒挑戦きんきん」(石堀朝陽さん、加藤弘之さん、中村恒介さん)(筑波大附属駒場中２年)、④、⑥共に正解し⑩を目指していたのが、浅沼英樹さん(東海高２年)でした。チーム「東海 C」(渡口雄太さん、石川竜聖さん、塩野尚さん)(東海高１年)は「切断線」による方法で求めていたので、それを紹介します。完璧で素晴らしい解答でした。

$m\times n$の敷き詰め方の総数を$K_m(n)$とし、半畳は１枚以下とします。また、具体的に畳を敷き詰めたとき、どこかの縦の線で分割できたとする場合、その線を「切断線」といい、最も右側にある切断線の右側の長方形$m\times t$に敷き詰める方法の総数を$L_m(t)$とします。特に、切断線がない場合は、$L_m(n)$となり、$L_m(n)=K_m(n)$となります。



nが奇数のとき、$K_m(n)=\sum_{t=1}^{n}L_m(t)K_m(n-t)$　　ただし、$K_m(0)=1$

nが偶数のとき、tが奇数になるとすると、$n-t$も奇数になり、ともに半畳を必要とします。
よって、tは偶数であり、$t=2\ell$とおくと、$n-t$も偶数になり、ともに半畳はありません。

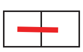
$$K_m(n)=\sum_{\ell=1}^{\frac{n}{2}}L_m(2\ell)K_m(n-2\ell)\quad ただし、K_m(0)=1$$

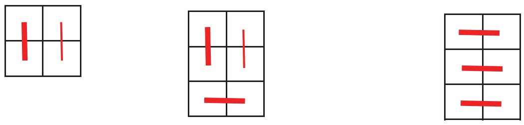
$m=3$のとき、

$K_3(1)=2$

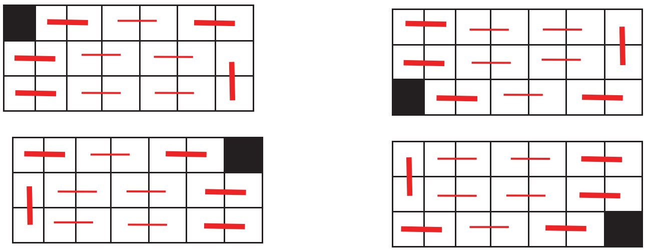
tが２以外の偶数のとき、切断線がないのは下図の2通りです。よって、$L_3(t)=2$

$t=2$のとき、下図の3通りです。よって、$L_3(2)=3$



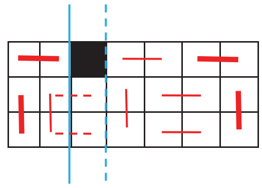


t が奇数のとき、$L_3(t)$を考えると、
半畳が端にある場合、切断線がないのは下図の4通りです。

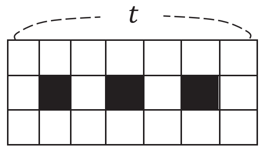


半畳が偶数列目の真ん中にある場合、下図の2通りずつあります。

よって、　$\frac{t-1}{2}\times 2 = t-1$（通り）



奇数列目に半畳がくると、
切断線ができるので、不適



$\frac{t-1}{2}$ 個

t が 1 以外の奇数のとき、　$L_3(t) = 4+(t-1)=t+3$　より、

$$L_3(t) = \begin{cases} 2 & (t=1\text{ のとき}) \\ 3 & (t=2\text{のとき}) \\ 2 & (t\text{は 2 以外の偶数}) \\ t+3 & (t\text{は 1 以外の偶数}) \end{cases}$$

よって、$K_3(1)=2$,　$K_3(2)=L_3(2)=3$　より、

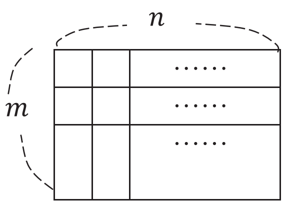
(1) $K_3(3) = L_3(1)K_3(2) + L_3(2)K_3(1) + L_3(3) = 2\cdot 3+3\cdot 2+6=18$　（通り）

$K_3(4) = L_3(2)K_3(2) + L_3(4) = 3\cdot 3+2=11$　より、

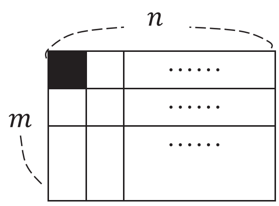
(2) $K_3(5) = L_3(1)K_3(4) + L_3(2)K_3(3) + L_3(3)K_3(2) + L_3(4)K_3(1) + L_3(5)$

$= 2\cdot 11+3\cdot 18+6\cdot 3+2\cdot 2+8=106$　（通り）

（4）5×5 の場合に必要となるものを、先に求めておきましょう。
ここで、次のように、行×列の数値を明確に表現します。

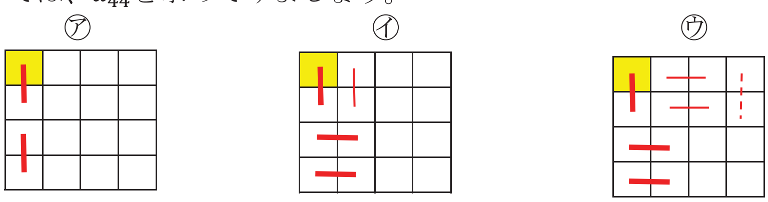


a_{mn}通り



b_{mn} 通り

では、a_{44}を求めてみましょう。

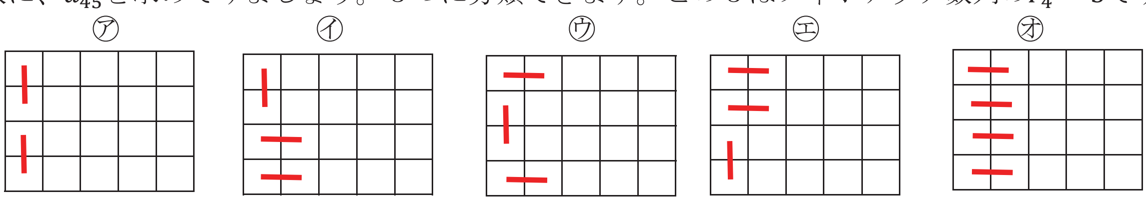


$a_{43} = a_{34} = 11$　　$a_{42} = a_{24} = F_4 = 5$　　$a_{22} = F_2 = 2$

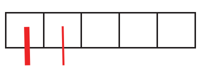
対称性より、 ━━ についても、同様なので、

$a_{44} = 2(a_{43} + a_{42} + a_{22}) = 2(11+5+2) = 36$

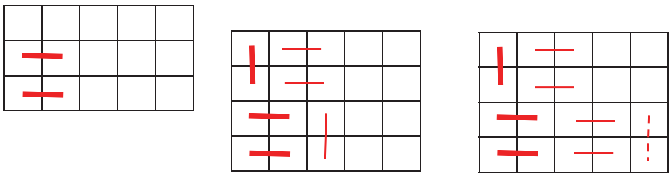
次に、a_{45}を求めてみましょう。５つに分類できます。この５はフィボナッチ数列の$F_4 = 5$です。



a_{44}　　$a_{43} = a_{34} = 11$



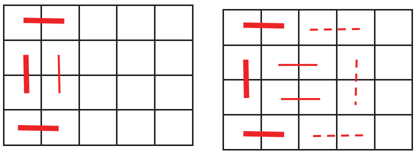
㋑について



$a_{43} = a_{34} = 11$　$a_{42} = a_{24} = F_4 = 5$　$a_{22} = F_2 = 2$

㋑ $= a_{43} + a_{42} + a_{22} = 11 + 5 + 2 = 18$

㋒について



$a_{43} = a_{34} = 11$　$a_{41} = 1$

㋒ $= a_{43} + a_{41} = 11 + 1 = 12$

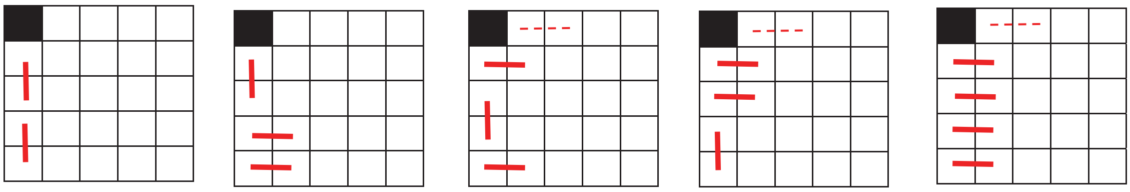
㋑ ＝ ㋓より、 $a_{45} = a_{44} + 2(a_{43} + a_{42} + a_{22}) + (a_{43} + a_{41}) + a_{43}$

$= a_{44} + 4a_{43} + 2a_{42} + a_{41} + 2a_{22}$

$= 36 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 5 + 1 + 2 \cdot 2 = 95$

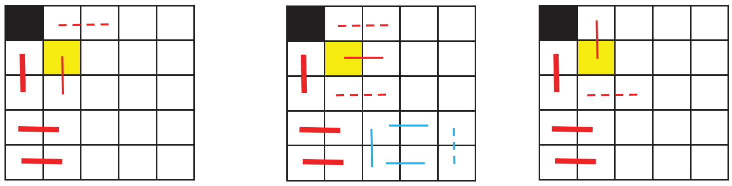
次に、b_{55}を求めてみましょう。５つに分類できます。$(F_4 = 5)$

(Ⅰ)　㋐　㋑　㋒　㋓　㋔



$a_{54} = a_{45} = 95$　41　$b_{53} + 1 = 16$　$b_{53} + a_{52} + a_{22} = 25$　$b_{53} = 15$

㋑について



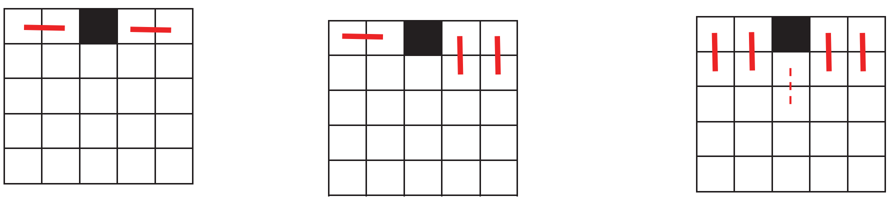
$b_{53} = 15$　$a_{52} + a_{32} = 8 + 3 = 11$　$b_{53} = 15$

㋑ $= 2b_{53} + a_{52} + a_{32} = 2 \cdot 15 + 11 = 41$

よって、　$b_{55} = a_{54} + 5b_{53} + 2a_{52} + a_{32} + a_{22} + 1$

$= 95 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 8 + 3 + 2 + 1 = 192$

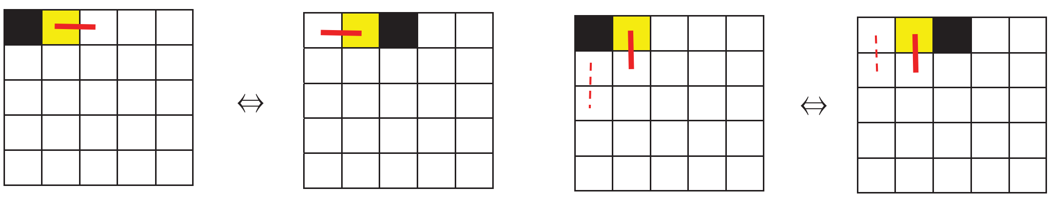
(Ⅱ)　㋐　㋑　㋒



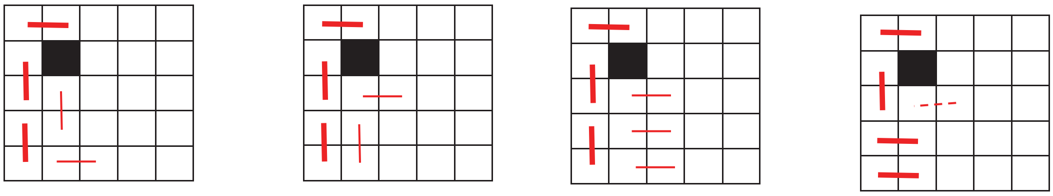
$a_{45} = 95$　41　$b_{35} = 15$

㋐＋２×㋑＋㋒＝ $95 + 2 \cdot 41 + 15 = 192$

【別解】(Ⅰ) ＝ (Ⅱ)



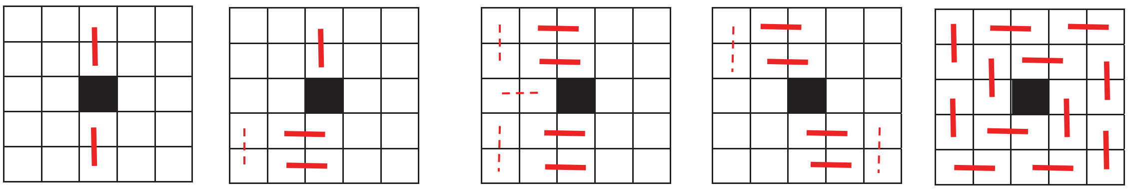
(Ⅲ)　㋐　㋑　㋒　㋓



$b_{53}=15$　　$b_{53}=15$　　11　　$b_{53}=15$

2(㋐＋㋑＋㋒＋㋓) = 2(15＋15＋11＋15) ＝112

(Ⅳ)　㋐　㋑　㋒　㋓　㋔



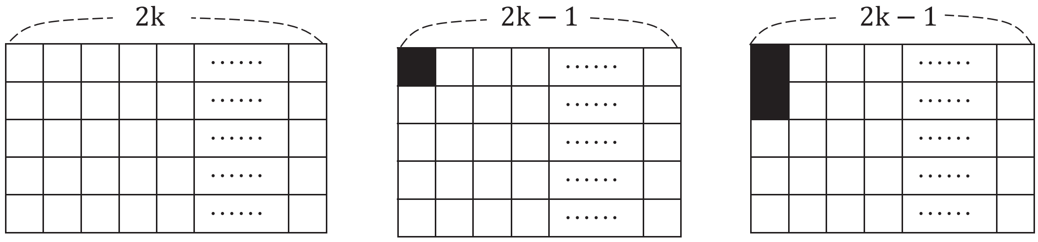
$a_{52}\times a_{52}$ ＝8・8＝64　　$a_{32}\times a_{52}$ = 3・8 = 24　　$a_{52}=F_5=8$　　$a_{32}\times a_{32}$ = 3・3 ＝9　　1

㋐＋４×㋑＋２(㋒＋㋓＋㋔) ＝ 64＋４・24＋2(８＋９＋１) ＝196

(Ⅰ)～(Ⅳ)より、$b_{55}=8\times 192+4\times 112+196=2180$（通り） (4 は回転と鏡映)

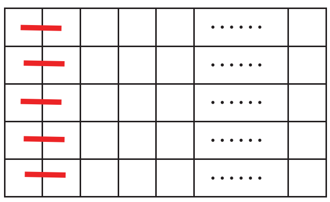
これが正解だったのは、三宅智史さん(東海中２年)だけでした。見事です。

（５） ５×$(2k-1)$の場合　下記の㋐～㋗の８つの分類ができます。($F_5=8$)



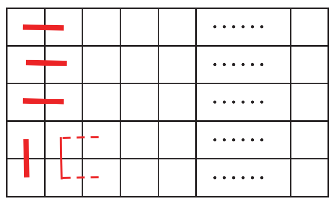
a_{2k}通り　　b_{2k-1}通り　　c_{2k-1}通り

㋐



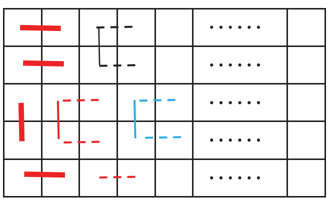
a_{2k-2}

㋑

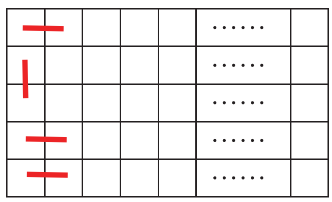


$a_{2k-2}+c_{2k-2}$

㋒



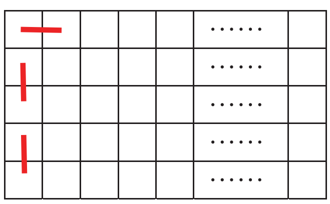
＝　㋓



$$a_{2k-2}+(b_{2k-3}+a_{2k-4})+(b_{2k-5}+a_{2k-6})+\cdots+(b_3+a_2)+(b_1+a_0)$$

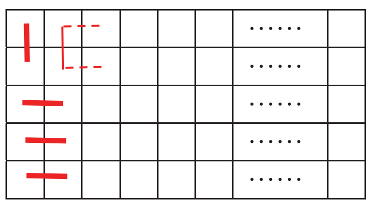
$$=a_{2k-2}+\sum_{i=1}^{k-1}(b_{2k-2i-1}+a_{2k-2i-2})$$　（ただし、 $a_0=1$）

㋔

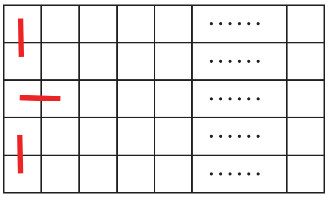
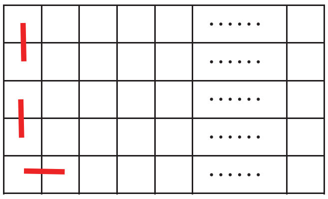


b_{2k-1}

㋕



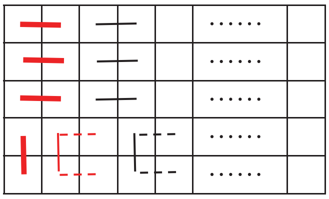
$a_{2k-2}+c_{2k-2}$

㋖  b_{2k-1} ㋗  b_{2k-1}

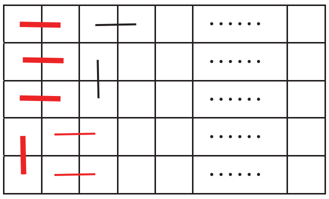
㋐〜㋗より、$a_{2k} = a_{2k-2} + 2(a_{2k-2} + c_{2k-2}) + 2\sum_{i=1}^{k-1}(b_{2k-2i-1} + a_{2k-2i-2}) + 3b_{2k-1}$

$$\therefore \quad a_{2k} = 5a_{2k-2} + 3b_{2k-1} + 2c_{2k-2} + 2\sum_{i=1}^{k-1}(b_{2k-2i-1} + a_{2k-2i-2}) \quad \cdots\cdots \quad ⑪$$

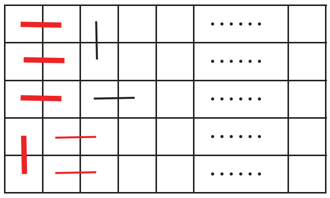
ここで、c_{2k-2}について



$a_{2k-4} + c_{2k-4}$



b_{2k-3}



b_{2k-3}

よって、$c_{2k-2} = a_{2k-4} + 2b_{2k-3} + c_{2k-4}$

$\therefore \quad c_{2k-2} = a_{2k-4} + 2b_{2k-3} + a_{2k-6} + 2b_{2k-5} + \cdots + a_2 + 2b_3 + a_0 + 2b_1$ （ただし、 $a_0 = 1$）

$$= \sum_{i=1}^{k-1}(2b_{2k-2i-1} + a_{2k-2i-2}) \quad \cdots\cdots \quad ⑫$$

⑫を⑪に代入すると、

$$a_{2k} = 5a_{2k-2} + 3b_{2k-1} + 2\sum_{i=1}^{k-1}(3b_{2k-2i-1} + 2a_{2k-2i-2}) \quad \cdots\cdots \quad ⑬$$

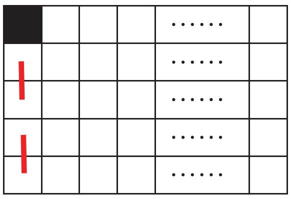
⑬において、k→k－1 とすると、

$$a_{2k-2} = 5a_{2k-4} + 3b_{2k-3} + 2\sum_{i=1}^{k-2}(3b_{2k-2i-3} + 2a_{2k-2i-4}) \quad \cdots\cdots \quad ⑭$$

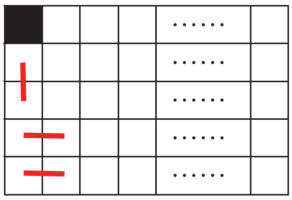
⑬－⑭より、$a_{2k} - a_{2k-2} = 5a_{2k-2} + 3b_{2k-1} + 3b_{2k-3} - a_{2k-4}$

$$a_{2k} = 3b_{2k-1} + 3b_{2k-3} + 6a_{2k-2} - a_{2k-4} \quad \cdots\cdots \quad ⑮$$

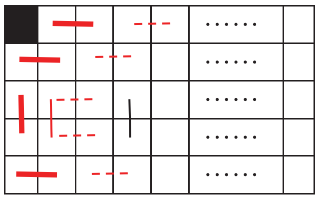
b_{2k-1}について



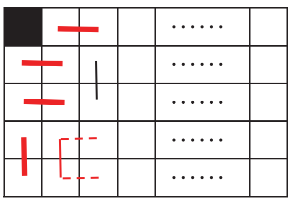
a_{2k-2}



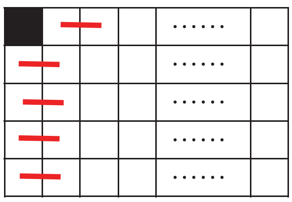
c_{2k-2}



$\sum_{i=1}^{k-1} b_{2k-2i-1}$



$\sum_{i=1}^{k-1}(b_{2k-2i-1} + a_{2k-2i-2})$



b_{2k-3}

よって、$b_{2k-1} = a_{2k-2} + 5b_{2k-3} + 2\sum_{i=1}^{k-1}(2b_{2k-2i-3} + a_{2k-2i-2}) \quad \cdots\cdots \quad ⑯$

⑯において、k→k－1 とすると、

$$b_{2k-3} = a_{2k-4} + 5b_{2k-5} + 2\sum_{i=1}^{k-2}(2b_{2k-2i-5} + a_{2k-2i-4}) \quad \cdots\cdots \quad ⑰$$

⑯－⑰より、$b_{2k-1}-b_{2k-3}=a_{2k-2}+a_{2k-4}+5b_{2k-3}-b_{2k-5}$

$\therefore\quad b_{2k-1}=a_{2k-2}+a_{2k-4}+6b_{2k-3}-b_{2k-5}\quad\cdots\cdots\quad$ ⑱

⑮において、ｋ→ｋ－1とし、$a_{2k-2}=3b_{2k-3}+3b_{2k-5}+6a_{2k-4}-a_{2k-6}$を⑱に代入すると

$b_{2k-1}=9b_{2k-3}+2b_{2k-5}+7a_{2k-4}-a_{2k-6}$

ｋ→ｋ＋1とし、$b_{2k+1}=9b_{2k-1}+2b_{2k-3}+7a_{2k-2}-a_{2k-4}$と⑱を辺々加えて

$b_{2k-1}+b_{2k+1}=8a_{2k-2}+9b_{2k-1}+8b_{2k-3}-b_{2k-5}$

$\therefore\quad a_{2k-2}=\frac{1}{8}(b_{2k+1}-8b_{2k-1}-8b_{2k-3}+b_{2k-5})$

ｋ→ｋ－1とし、$a_{2k-4}=\frac{1}{8}(b_{2k-1}-8b_{2k-3}-8b_{2k-5}+b_{2k-7})$

この2式を⑱に代入すると、

$b_{2k-1}=\frac{1}{8}(b_{2k+1}-7b_{2k-1}-16b_{2k-3}-7b_{2k-5}+b_{2k-7})+6b_{2k-3}-b_{2k-5}$

$\therefore\quad b_{2k+1}-15b_{2k-1}+32b_{2k-3}-15b_{2k-5}+b_{2k-7}=0\quad\cdots\cdots\quad$ ⑲

同様にして、　$a_{2k+2}-15a_{2k}+32a_{2k-2}-15a_{2k-4}+a_{2k-6}=0\quad\cdots\cdots\quad$ ⑳

$\boxed{b_{2k+7}-15b_{2k+5}+32b_{2k+3}-15b_{2k+1}+b_{2k-1}=0,\ b_1=1,\ b_3=15,\ b_5=192,\ b_7=2415}$

特性方程式の$x^4-15x^3+32x^2-15x+1=0$　の4つの解を、α，β，γ，δとおくと、

$\alpha=\frac{15+\sqrt{105}+\sqrt{314+30\sqrt{105}}}{4},\ \beta=\frac{15+\sqrt{105}-\sqrt{314+30\sqrt{105}}}{4},\ \gamma=\frac{15-\sqrt{105}+\sqrt{314-30\sqrt{105}}}{4},\ \delta=\frac{15-\sqrt{105}-\sqrt{314-30\sqrt{105}}}{4}$

$$\boxed{b_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{105}}(\alpha^k+\beta^k-\gamma^k-\delta^k)}$$

$b_9=30305,\ b_{11}=380160,\ b_{13}=4768673,\ b_{15}=59817135,\ b_{17}=750331584,\ \cdots\cdots$

5×$(2k)$の場合

$\boxed{a_{2k+8}-15a_{2k+6}+32a_{2k+4}-15a_{2k+2}+a_{2k}=0,\ a_2=8,\ a_4=95,\ a_6=1183,\ a_8=14824}$

$$\boxed{\begin{aligned}a_{2k}=&\frac{(3+\sqrt{105})\sqrt{314+30\sqrt{105}}+14\sqrt{105}+138}{4\sqrt{105}\sqrt{314+30\sqrt{105}}}\alpha^k+\frac{(3+\sqrt{105})\sqrt{314+30\sqrt{105}}-14\sqrt{105}-138}{4\sqrt{105}\sqrt{314+30\sqrt{105}}}\beta^k\\&+\frac{(-3+\sqrt{105})\sqrt{314-30\sqrt{105}}+14\sqrt{105}-138}{4\sqrt{105}\sqrt{314-30\sqrt{105}}}\gamma^k+\frac{(-3+\sqrt{105})\sqrt{314-30\sqrt{105}}-14\sqrt{105}+138}{4\sqrt{105}\sqrt{314-30\sqrt{105}}}\delta^k\end{aligned}}$$

$a_{10}=185921,\ a_{12}=2332097,\ a_{14}=29253160,\ a_{16}=366944287,\ a_{18}=4602858719,\ \cdots\cdots$

4×n の場合　(途中の計算式を省略しますので、確認して下さい。$F_4=5$ つに分類できます。)

						……		
						……		
						……		
						……		

$a_{n+4}-a_{n+3}-5a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0,\ a_0=1,\ a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=11$

$x^4-x^3-5x^2-x+1=0$　の4つの解を、α，β，γ，δとおくと、

$\alpha=\frac{1+\sqrt{29}+\sqrt{14+2\sqrt{29}}}{4},\ \beta=\frac{1+\sqrt{29}-\sqrt{14+2\sqrt{29}}}{4},\ \gamma=\frac{1-\sqrt{29}+\sqrt{14-2\sqrt{29}}}{4},\ \delta=\frac{1-\sqrt{29}-\sqrt{14-2\sqrt{29}}}{4}$

$$\boxed{\begin{aligned}a_n=&\frac{(1+\sqrt{29})\sqrt{14+2\sqrt{29}}+2\sqrt{29}+14}{4\sqrt{29}\sqrt{14+2\sqrt{29}}}\alpha^n+\frac{(1+\sqrt{29})\sqrt{14+2\sqrt{29}}-2\sqrt{29}-14}{4\sqrt{29}\sqrt{14+2\sqrt{29}}}\beta^n\\&+\frac{(-1+\sqrt{29})\sqrt{14-2\sqrt{29}}+2\sqrt{29}-14}{4\sqrt{29}\sqrt{14-2\sqrt{29}}}\gamma^n+\frac{(-1+\sqrt{29})\sqrt{14-2\sqrt{29}}-2\sqrt{29}+14}{4\sqrt{29}\sqrt{14-2\sqrt{29}}}\delta^n\end{aligned}}$$

$a_4=36,\ a_5=95,\ a_6=281,\ a_7=781,\ a_8=2245,\ a_9=6336,\ a_{10}=18061,\ \cdots\cdots$

1961 年、3 人の英国の物理学者、カステレイン(Kasteleyn)は単独で、テンパリー(Temperley)とフィッシャー(Fisher)は 2 人のチームで違う手法によって、独立に発見された公式で、m×n を 1×2 で敷き詰める方法の総数は、次のようになります。カステレインは、今日「カステレイン行列」と呼ばれる行列を導入し、その固有ベクトルを構成して対角化し、その行列の固有値の積として行列式を計算することによって求めています。

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(4cos^2\frac{\pi i}{m+1}+4cos^2\frac{\pi j}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

m、n に条件がないのは、m、n が奇数のとき、値が 0 になり、正しいからです。カステレインの論文では、m、n の場合分けをして、公式が 2 つに表現されていました。時の流れとともに、進化しているようです。ウィキペディア「ドミノタイリング」には、m×n を$\frac{mn}{2}$個のドミノで埋め尽くす方法が何通りあるかの個数の公式は、次のように示されています。

$$\prod_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\prod_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(4cos^2\frac{\pi i}{m+1}+4cos^2\frac{\pi j}{n+1}\right)$$

また、2×n のときは、フィボナッチ数列になるから、

$$\prod_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(1+4cos^2\frac{\pi j}{n+1}\right)$$

は、フィボナッチ数列の三角関数表現になっています。

さらに、1 角の欠けたものについても、次のような公式が作られています。

$$\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(4-2cos\frac{\pi i}{m}-2cos\frac{\pi j}{n}\right)$$

しかし、内部に半畳があるときは、今の所、公式は作られていないようなので、我々の求める総数を公式化することは、残念ながらできません。(参考文献[2]～[6])

ところで、3 人の物理学者はダイマー模型の研究をしていたようです。ダイマー(二量体)とは、2 つの同種の分子や単量体が物理的・化学的な力によってまとまった分子または超分子のことを言うようです。ダイマー  とは、今まで図で表してきた に当たります。ダイマー模型は統計力学的手法の理論のようですが、21 世紀に入り、量子物理学や高分子の分野などでも、注目を浴びブームになっているようです。

[参考文献]

[1] スーパーコン 2010 本選問題：背景 岡本吉夫 (2010)(ネット)

[2] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, Ⅰ. The number of dimer arrangements on a Quadratic lattice, Physica 27 (1961) 1209－1225

[3] Martin Aigner, A Course in Enumeration, Springer GTM 238 (2007) 451－466

[4]「線形代数と数え上げ」髙﨑金久著 日本評論社 (2012) 98－187

[5]「数え上げの手法」László Lovász 著 東海大学出版会 (1988) 116－161

[6]「グラフの理論Ⅰ」C. ベルジュ著 サイエンス社 (1976) 137－142

[7]「整数の分割」アンドリュース・エリクソン著 数学書房 (2006) 148－156

[8]「コンピュータの数学」Graham, Knuth, Patashnik 著 共立出版 (1993) 292－351

[9]「長方形領域のドミノタイル張りについて」青山学院大学 理工学部 藤野優祐(ネット)

[10]「ドミノによるタイル張り」 京都大学理学研究科 植田一石(ネット)

問題２．「靴ひもの結び方」

文責：岡崎 建太（京都大学 数理解析研究所）

皆さんは靴ひもの蝶々結び、できますか？ 私（出題者）は子供のころ、親から何度もやり方を教わりましたがやり方がなかなか理解できませんでした（今でもちゃんと結べるかどうか怪しいです）。今回はいろいろな靴ひもの結び方について考えていきたいと思います。

(i) の結び方は**蝶々結び**と呼ばれます。人によっては, (i)' のように (i) を鏡写しにしたような結び方をする人もいるかもしれません。こちらも蝶々結びと呼ぶことにします。
一方、よく似ていますが (ii) は、(i) とは最初の片結びの部分のひもの上下が異なります。(ii) の結び方は（「蝶の羽」の部分が縦になってしまうことから）**縦結び**と呼ばれます。こちらにも鏡写しのバージョン (ii)' が存在します。

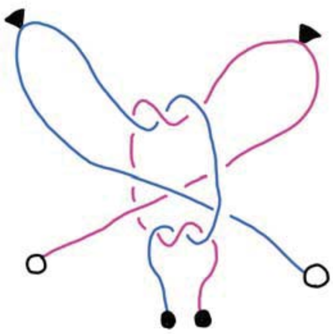
(i)

(i)'

(ii)

(ii)'

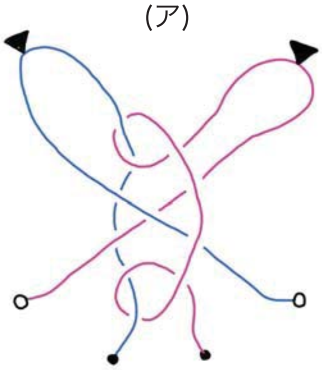
以下では、靴ひもを連続的に動かしてできるものを全て同じ結び方の靴ひもだと思うことにします。ただし、下図の●（ひもの根本）, ○（ひもの先端）, ▼（「蝶の羽」の先端）の部分は靴の表面に固定し、動かさないものとします。



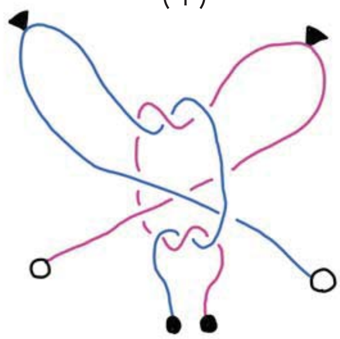
問題

(1)　次の(ア)～(オ)の靴ひもの結び方について, 蝶々結び, 縦結び, それ以外のいずれになるでしょうか. 理由とともに答えてください.

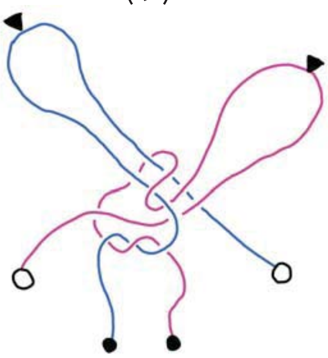
(ア)



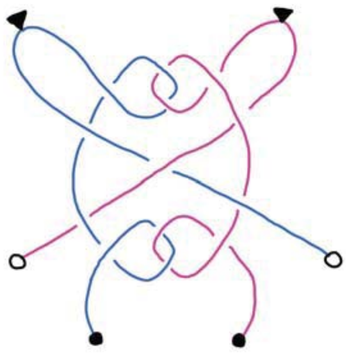
(イ)



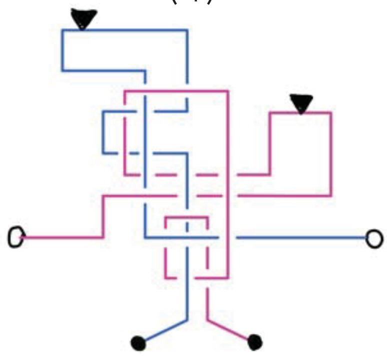
(ウ)



(エ)



(オ)



(2)　勝手に与えられた靴ひもの結び方について, 蝶々結び, 縦結び, それ以外のいずれなのかを判定する方法を考えてください.

(3)　あなたの考えるより良い靴ひもの結び方を考案し, その結び方がどのように素晴らしいのかを自由に語ってください.

講評

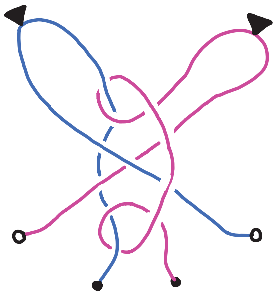
身近な題材で結び目理論の問題を作ろう、ということで今回は靴ひもに関する問題を出題しました。コンクール当日に監督をしていたのですが、多くの生徒さんが実際にひもの模型を動かし楽しみながら問題に取り組んでいたようで、大変嬉しく思います。

蝶結びと縦結びの本質的な違いはどこにあるかを問う内容だったのですが、やはり難しかったようで、具体的な靴ひもの例 (ア)〜(オ) の例についても正確に判別できている解答は少なかったです。また、靴ひもの図を局所的なパーツに分けた上でその結び方を判定しようとする解答が非常に多かったですが、どんな図に対してもオールマイティーに適用できる手法はほとんど見受けられませんでした。例えば(オ)はかなり複雑に見えますが、縦結びに近い図へ変形することができます。

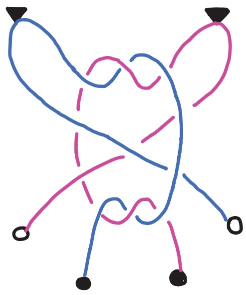
そんな中で、UEーI☆チーム（高田中）、岐阜高校Bチーム（岐阜高）、森山和さん（富山大学人間発達科学附属中）らは、ひもの変形の過程を図を用いて丁寧に記述し、問(1)の5種類の靴ひもをほとんど正確に分類していました。
そして、一際目を引いたのが、駒場創造てるてるチーム（筑波大学附属駒場中）の解答です。この解答では、靴ひもに向きをつけ、交点の交わりを符号付きで数え上げることで、靴ひもの図の描き方に依存しない量（専門用語で「不変量」といいます）を作り出し、靴ひもを分類することに成功していました。この量は結び目理論における「絡み数」と呼ばれる不変量で、それを発見できた（仮に知っていたとしても、問題に対し正しく適用できた）ことは素晴らしいことだと思います。

［解答例］

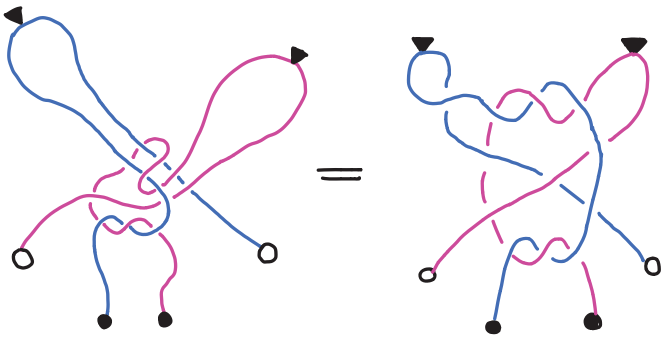
(ア)：蝶々結び



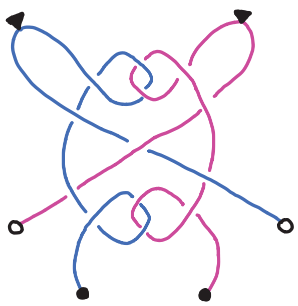
(イ)：それ以外



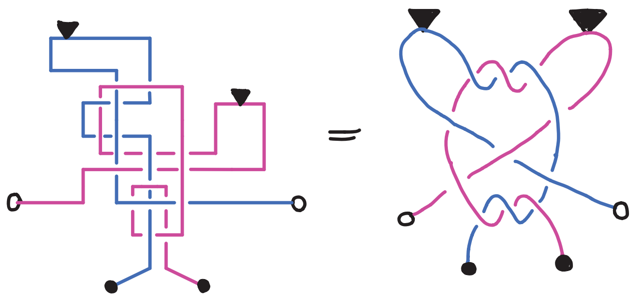
(ウ)：(ひねりを許せば)蝶々結び



(エ)：それ以外



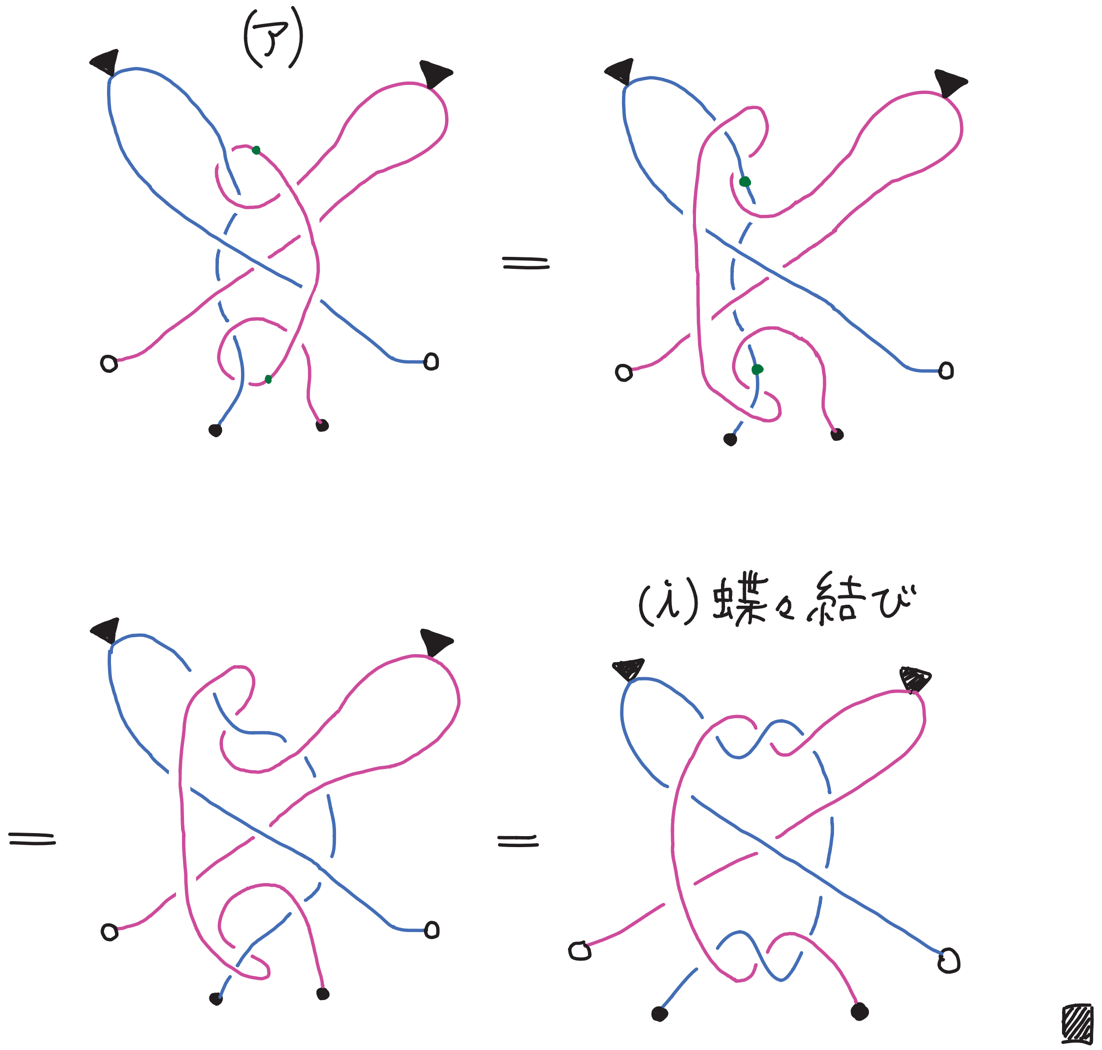
(オ)：それ以外(縦結びもどき)



以下、その理由を述べます。

◎ (ア) は (イ) 蝶々結びと同じ結び方.

[証明]



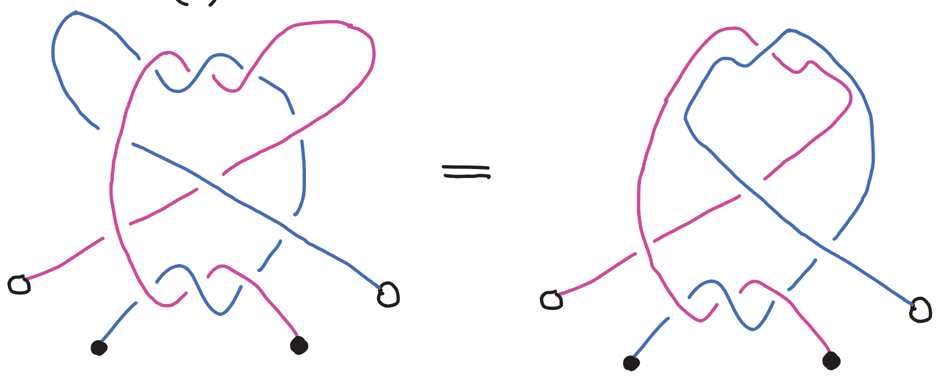
◎ (イ)は「それ以外」．

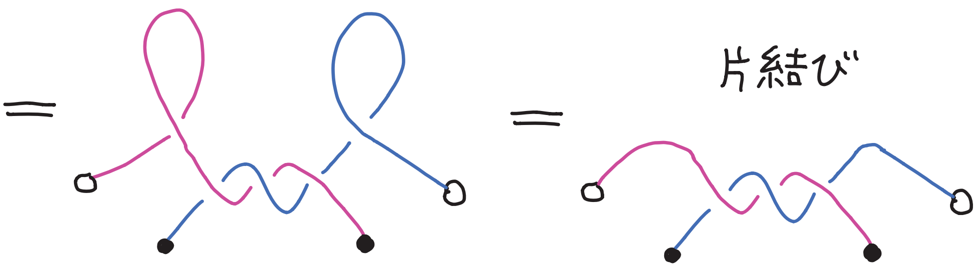
[証明]

▼▼ の固定を解除したとき，

蝶々結びと固結びは片結びに等しくなる．実際，

(i)



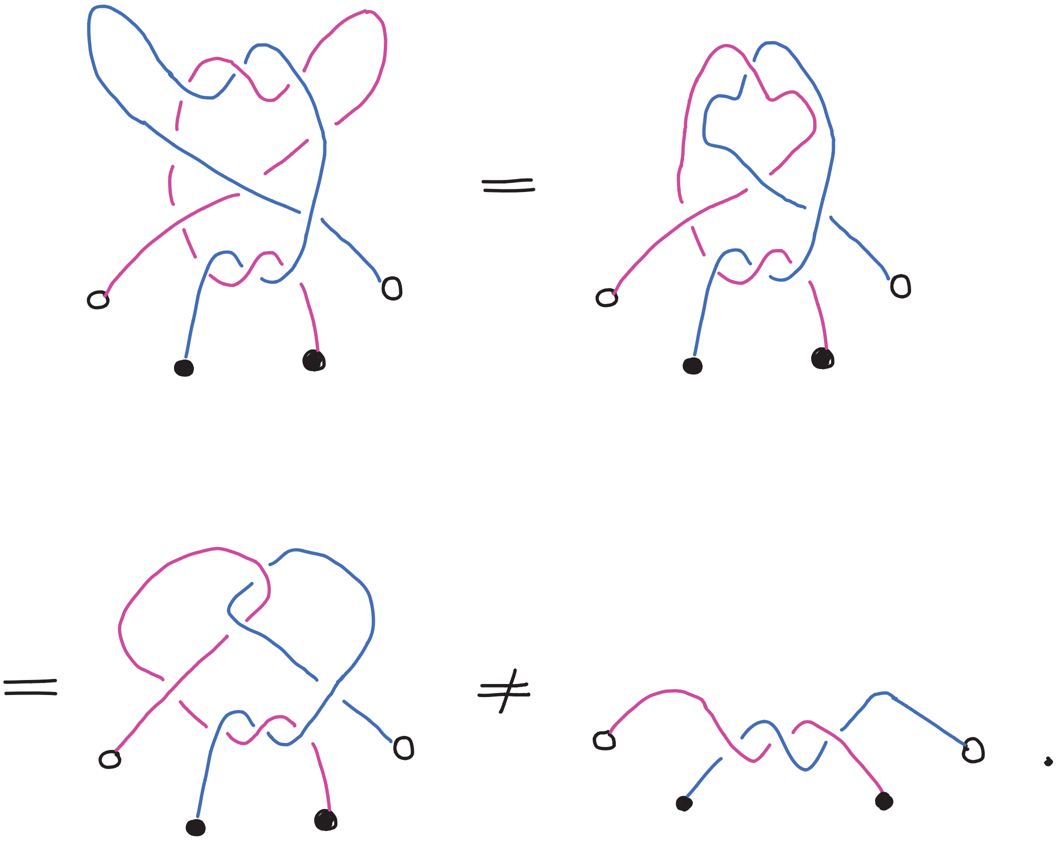


となる．(i)′，(ii)，(ii)′についても同様．

一方で，▼▼ の固定を解除したとき，

(イ)は片結びにならずに「途中でひっかかる．」

実際，

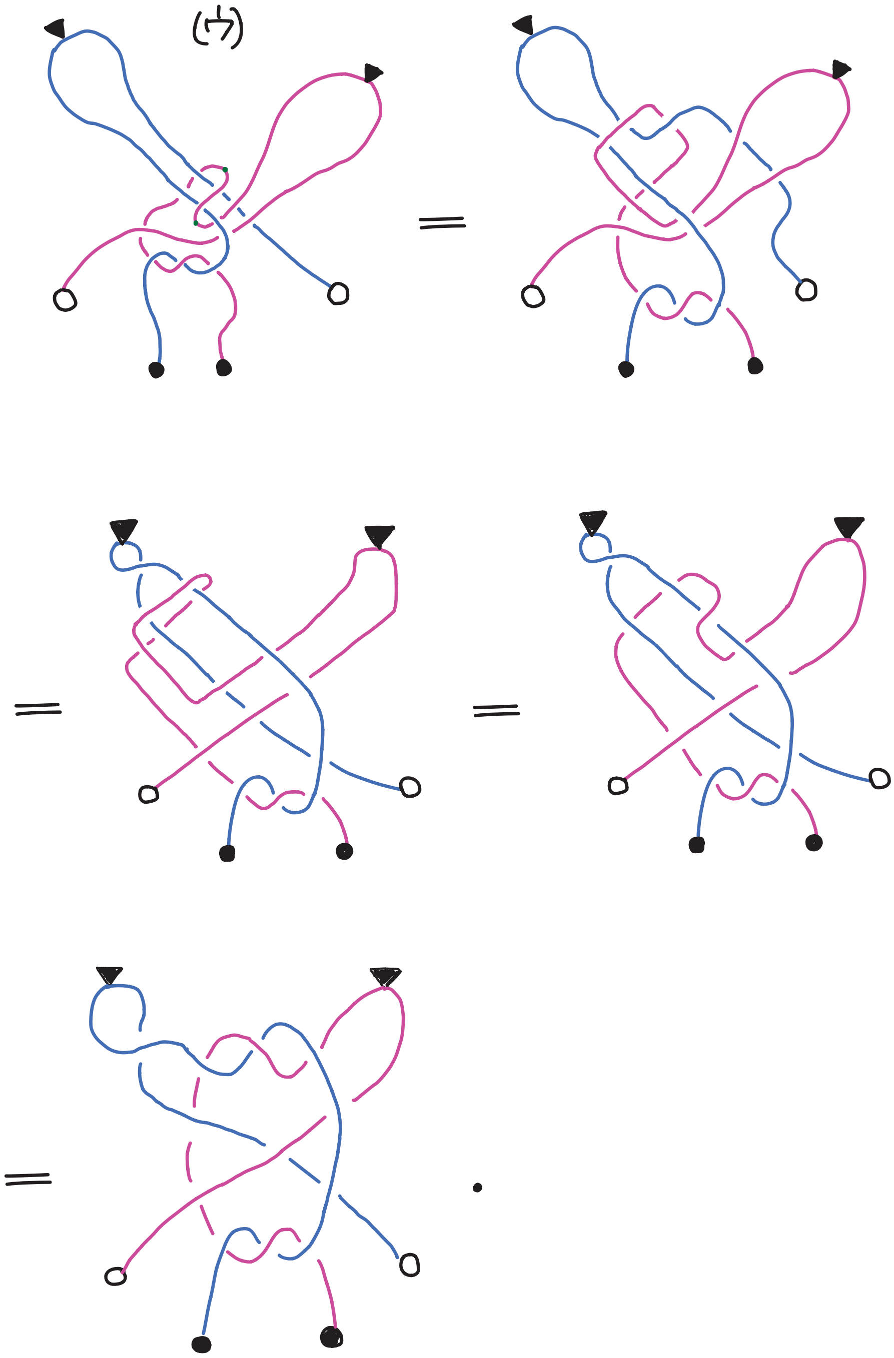


となる．以上より，(イ)は蝶々結びでも

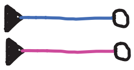
縦結びでもないことがわかる．　∎

◎ (ウ)は (ひねりを許せば) 蝶々結び.

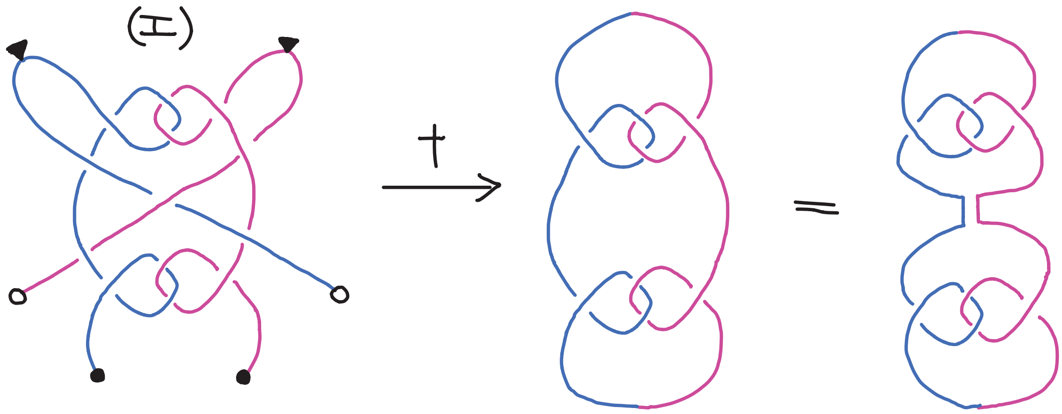
[証明]

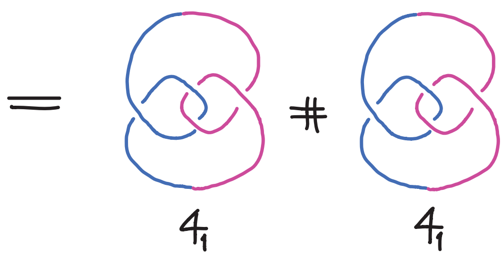


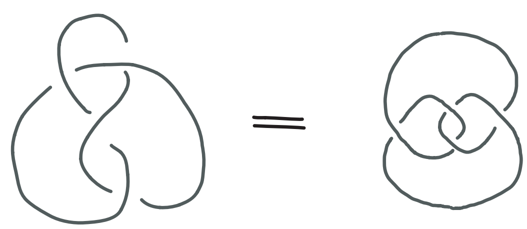
◎ (エ) は「それ以外」.

[証明] 「 を除去した後、▼と▼、●と● において ひもをくっつける」という操作 †（ダガー）を考える。すると、

(エ) は † により 8の字結び目 2つを連結和した結び目になる。





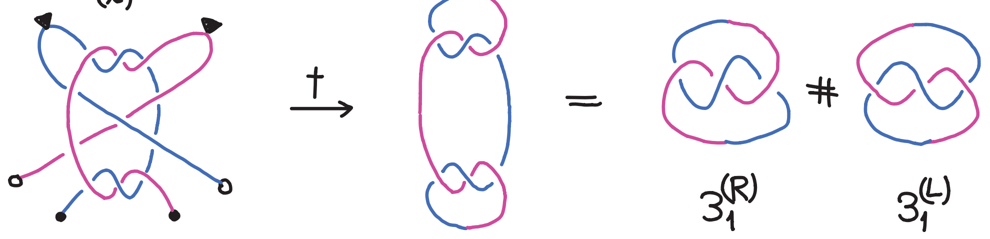


8の字結び目 4_1

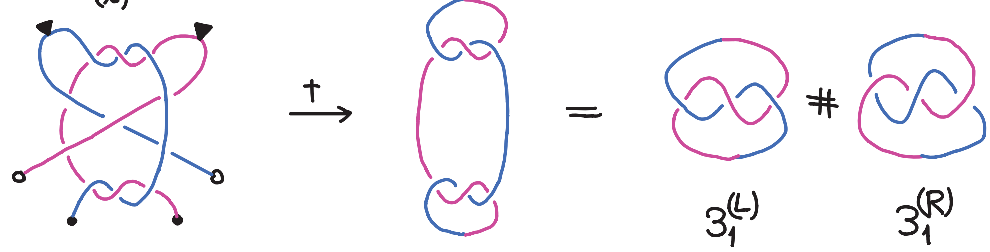
一方，蝶々結びや縦結びは，†により

三葉結び目2つを連結和した結び目になる．

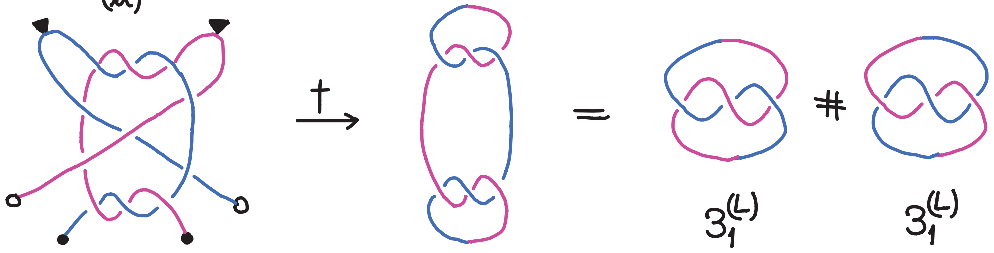
(i)



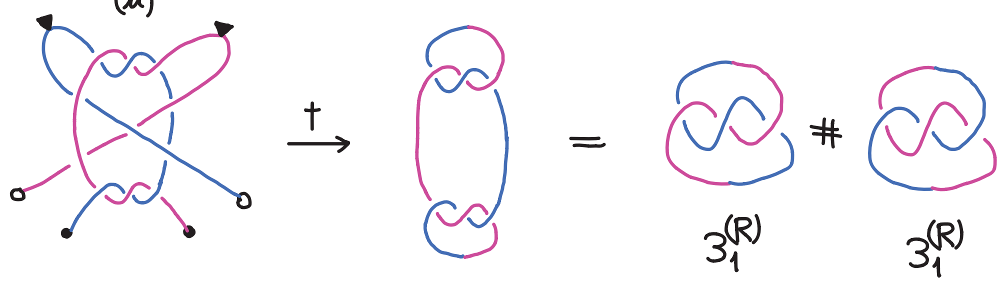
(i)′

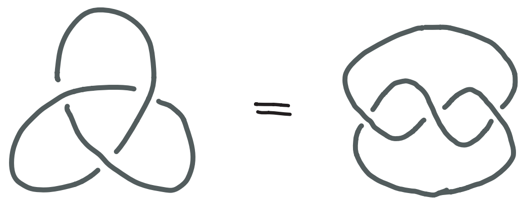


(ii)

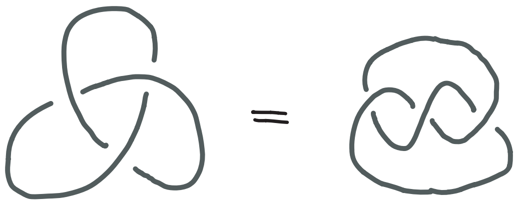


(ii)′





左手系三葉結び目　$3_1^{(L)}$



右手系三葉結び目　$3_1^{(R)}$

以上のことと，次の定理より，(エ)は蝶々結びでも

縦結びでもないことがわかる．

シューベルトの定理

自明でない結び目は，素な結び目の連結和に
一意的に分解される．

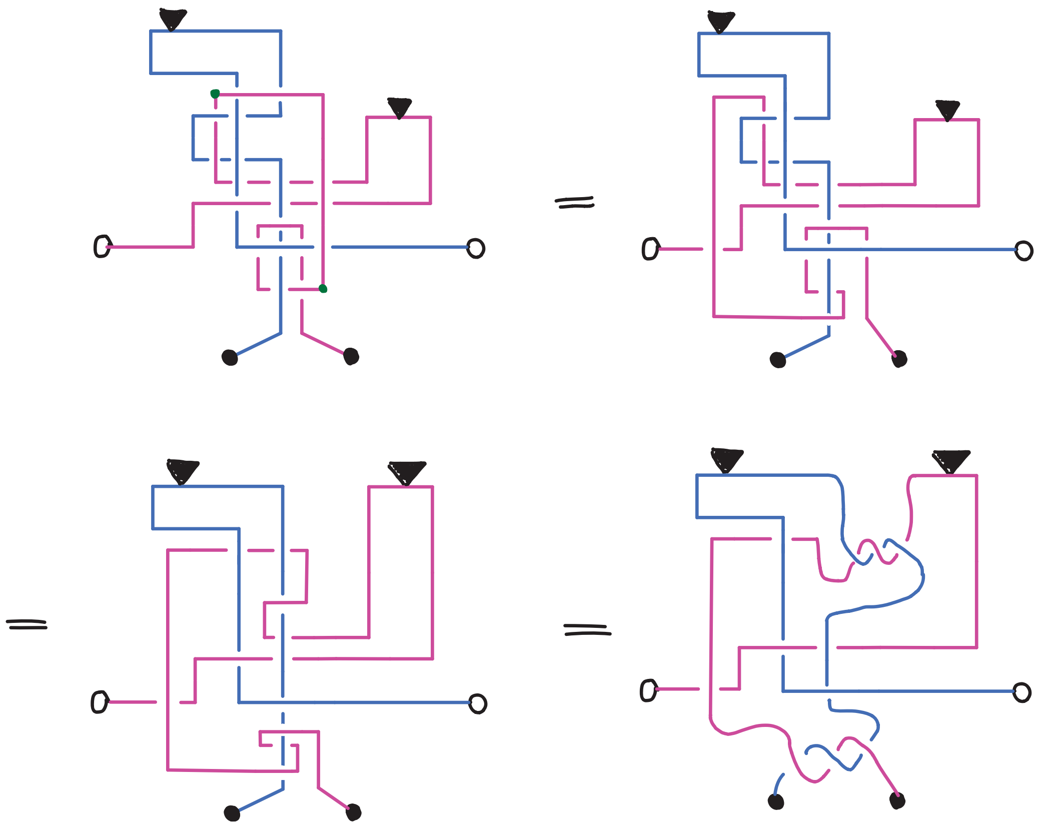
H. Schubert, Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten,
S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 3 (1949), 57–104.

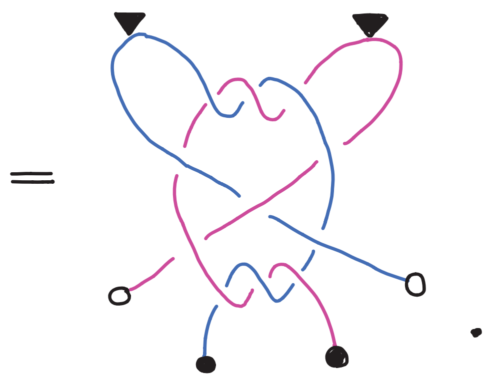
Y. Hashizume, On the uniqueness of the decomposition of a link,
Osaka. Math. J., 10 (1958), 283–300

∎

◎ (オ) は「それ以外」.

[証明]



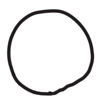


これが蝶々結びでも縦結びでもないことを(2)の中で示します.

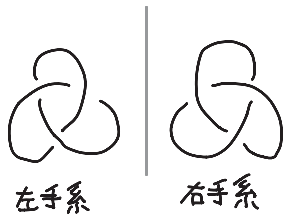
用語解説

・結び目とは，空間内に滑らかに埋め込まれた円周のこと．
結び目を空間内で連続的に変形してできる結び目を，元の結び目と同じ結び目だと考える．

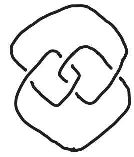
・結び目の例（より詳しくは"knot zoo"で検索）



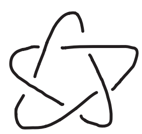
自明な結び目 0_1



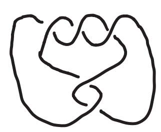
三葉結び目 3_1



8の字結び目 4_1

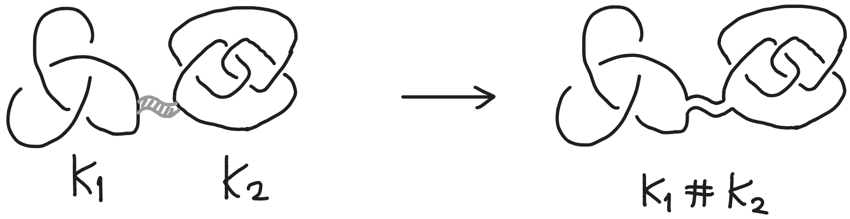


5_1



5_2

・2つの結び目 K_1 と K_2 を細い帯でつなぎ，次のようにつなぎ直してできる結び目を K_1 と K_2 の連結和といい，$K_1 \# K_2$ と書く．



- 自明でない2つの結び目の連結和で表すことができない，自明でない結び目のことを，素な結び目という．

  （注：自然数の世界の素数に対応）

- 3_1, 4_1, 5_1, 5_2 などは素な結び目で，互いに異なることが知られている．

(2) 大まかに言って次の2つ(あるいはその両方)の方法があります.

a) くつひもの一部を消したり，つなげたり，固定を解除したりして，より単純な形に直す.

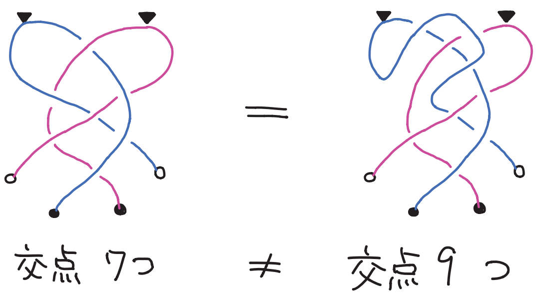
b) 不変量を用いる.

ここで不変量とは，各々のくつひもに対して数(や多項式 etc.)を返すルールで，同じくつひもに対しては，図の表し方に依らずに同じ(不変な)値を返すものを言います.

例えば「使われているひもの本数」は不変量です.

(全てのくつひもに対してその値は常に2なので，この不変量は役にはたちませんが…)

一方で，例えば「くつひもの交点 ╳ の個数」はくつひもを変形するごとに変化するので，不変量ではありません.



(ア), (ウ) は 直接くつひもを変形することで, 蝶々結びと

同じだと示せました.

一方, (イ), (エ), (オ) が 蝶々結びや縦結び でないことを

きちんと示すのは難しく, 不変量の考え方が必要になります.

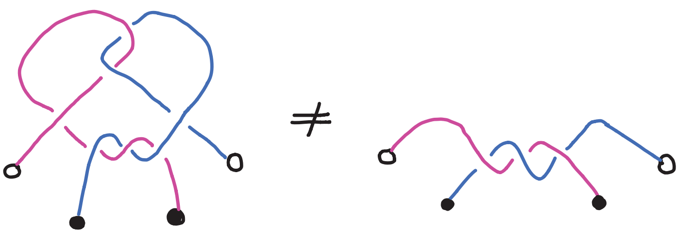
(イ)と(エ) は a) が有効でした. つまり,

(イ) では「▼ の固定をはずす」という操作,

(エ) では † という操作

により 蝶々結びや縦結びとの違いがわかりやすく表れました.

しかしながら,

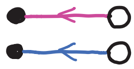


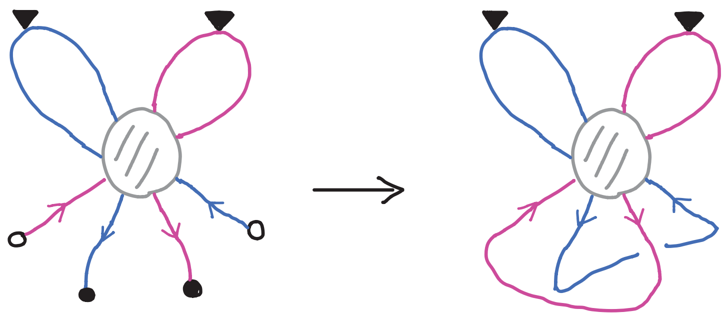
であることはそれほど当たり前なことではありません.

両者が本当に異なった結び方であることを示すために,

以下では「絡み数」という不変量を導入します.

定義 （絡み数 linking number lk）

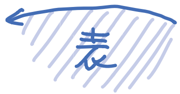
靴ひもが与えられたとき，まず  の方向にひもを向きづける．続いて，左の○と右の●，右の●と左の○を各々靴の表面に沿ったひもでつなげる．ただしつなげるときに用いる2本のひもは交わらないようにする．このようなつなぎ方はいろいろあるが，以下では次の方法で固定する．

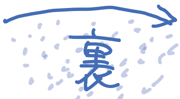


次の3通りの方法で，靴ひもの絡み数を定義する．

① 青いひも（左の●を通るひも）に「しゃぼんの膜を張る」．

正確には，青いひもを境界に持つ，表裏のある曲面を1つとる．（このような曲面を，ザイフェルト曲面という．）

曲面の表裏を、

、

で定める.

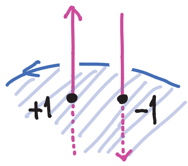
その上で、赤いひも（右の・を通るひも）が

この曲面と交わっている交点の数を数える. 但しただ数える

のではなく、赤いひもの向きに関して、曲面を

表から裏へ通る交点を+1、裏から表へ通る交点を−1

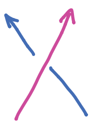
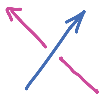
としてカウントする.

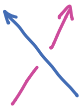
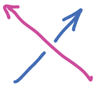


このように交点を数えたときの合計を、絡み数と定める.

② 青いひもと赤いひもの立場を入れ替えて、同様に交点を数え上げたときの合計を絡み数と定める.

③ 青いひもと赤いひもが図式の上で交わっている箇所（交点と呼ぶ）

について、 又は  なる交点は+1、

 又は  なる交点は−1 で数え上げ、

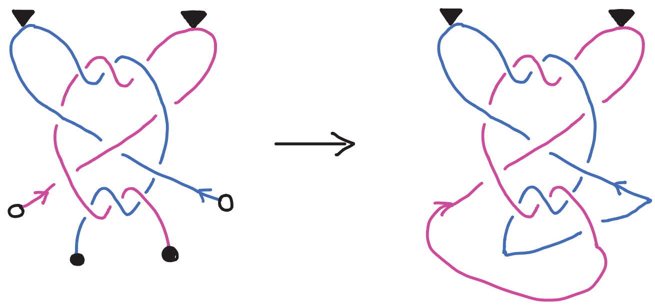
その合計を2で割ったものを絡み数と定める.

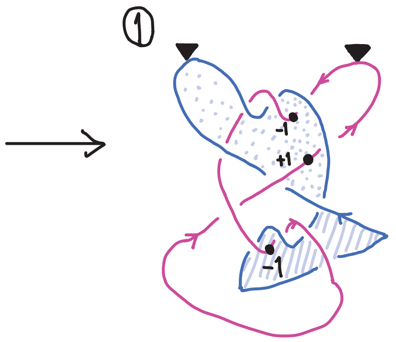
定理（証明略）

①〜③はいずれも靴ひもの不変量で，同じ靴ひもに対しては

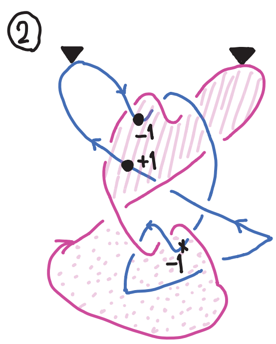
靴ひもの表し方やザイフェルト曲面のとり方に依らず同じ値を返す.

例

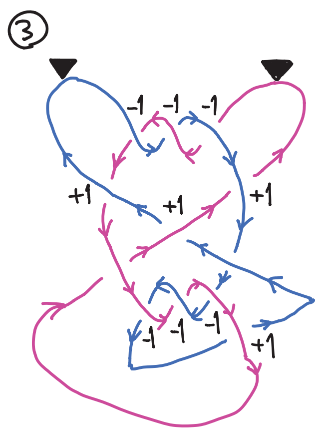




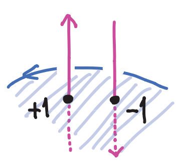
$lk = -1$

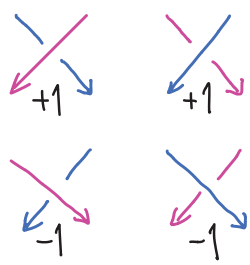


$lk = -1$

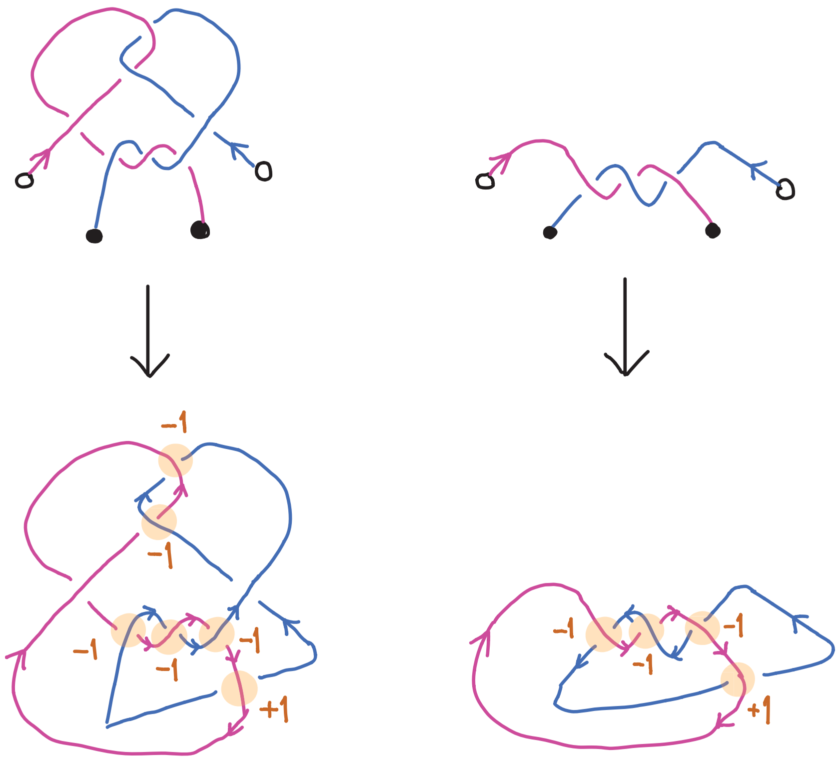


$lk = \frac{-2}{2} = -1$





例



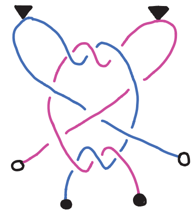
$lk = \frac{-4}{2} = -2$　　　$lk = \frac{-2}{2} = -1$

ゆえに両者は異なる結び方.

同様にして絡み数を調べると,

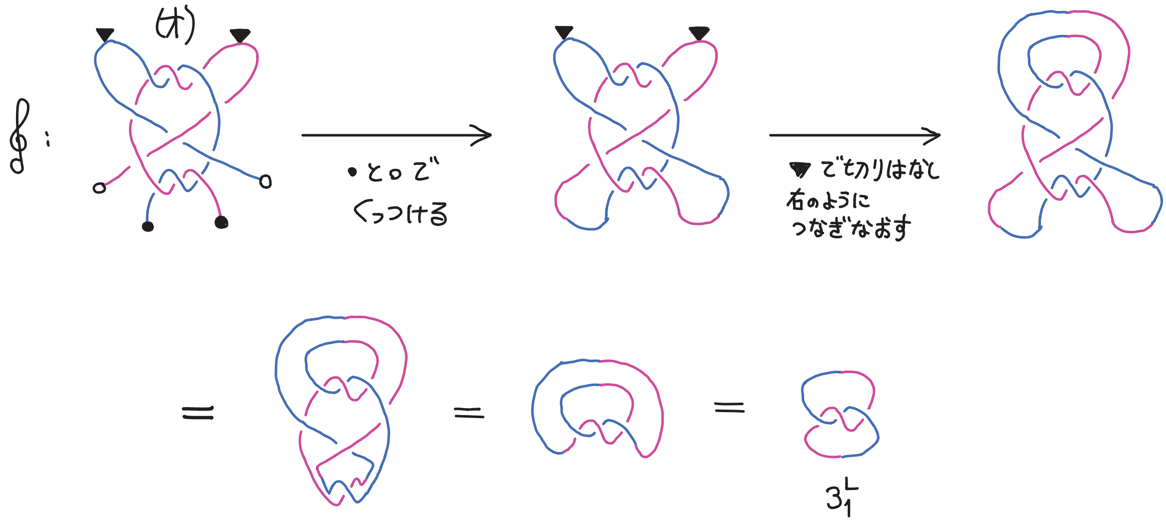
靴ひも	(i)	(i)′	(ii)	(ii)′	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
絡み数	1	-1	-1	1	-1	-2	1	2	-1

となります. これより, (イ)と(エ)は蝶々結びでも縦結びでもないことがわかります.

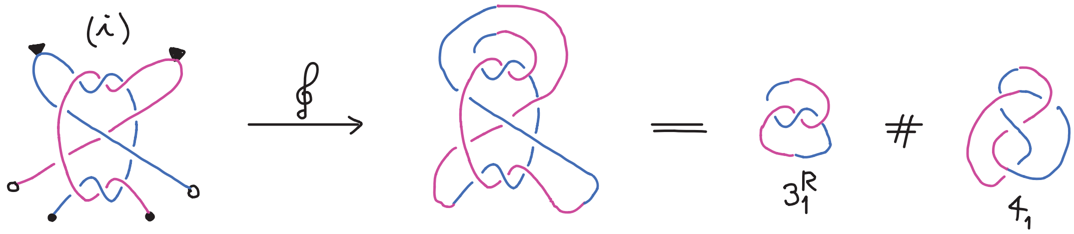
最後に，(オ) =  が 蝶々結びでも 縦結びでも

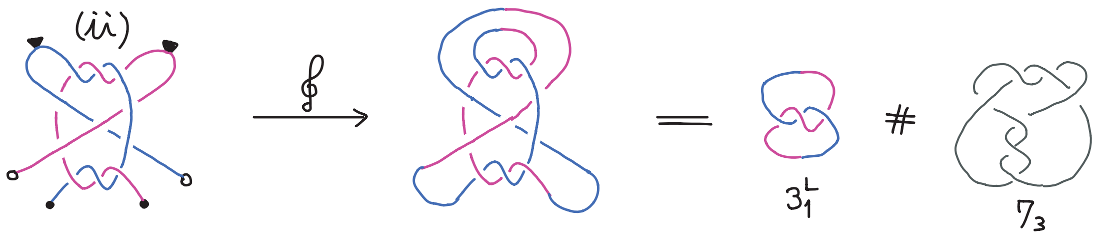
ないことを示しましょう.

この靴ひもに次の操作 𝄞 を施します.



同様の操作を蝶々結びと縦結びに行うと，





であることがわかります.(確かめてみて下さい).

鏡映(i)′, (ii)′についても同様です. よって

(オ)は 蝶々結びでも縦結びでもないことがわかりました.

以上

問題 3.「返品保証の有効活用」

出題委員　花薗　誠（名古屋大学）

返送料のみの負担で返品でき代金が返金される「返品保証」を活用して、自転車を試乗し気に入った自転車をうまく 1 台購入することを考えてみましょう。いくつかのブランドが 同じ価格 の自転車を販売しています。各ブランドの自転車の乗り心地をあなたが気に入るかは、乗ってみなければわかりません。しかし、ブランドの特徴やネットの情報（口コミやその評価）など総合して、あなたにとっての乗り心地を次のように予想できるとしてみましょう（% は確率を表します）。

乗り心地	満足度	ブランド A	ブランド B	ブランド C
とても良い	＋ 2000 円	40%	25%	26%
良い	＋ 1000 円	10%	50%	49%
普通	＋ 0 円	0%	15%	0%
やや悪い	－ 200 円	50%	10%	25%

- 同じブランドであれば品質、乗り心地が異なることはないとします。また、ブランド間の自転車の乗り心地に関連はありません。
- 例えば、乗り心地がとても良いときに満足度が+2000 円であるというのは、もし自転車の乗り心地がとても良いということがわかっていれば、販売価格よりも余分に 2000 円までなら支払う用意がある、という意味です。
- 返品には返送料 300 円負担します。
- 満足度がどのようになるか、その起こる確率しかわからない状況で自転車の優劣を評価するために、ここでは満足度の「期待値」が金額に等しいと考えて、評価することとします（期待値については、問題の最後に説明があります）。以下の問において、ある行動を取ることが「得になる」とは、行動を取った時点で計上できる満足度の期待値から返送料を差し引いた値が、他の行動を取る場合より大きいことを指します。

問 1：仮に返品保証がなく、お試しせずにブランドを選ばなければいけないなら、どれを選ぶのが最も得ですか。

以下、返品保証ありとします。問 2.1-2 では、ブランド C が売り切れであるとします。
問 2.1：ブランド A を試し、それを保持したままさらにブランド B も試すのが、ブランド A を試したあと何もしないより得になるのは、ブランド A の乗り心地がどんな場合ですか。
問 2.2：最も得になるような、お試しの順番と購入の決定方法を導いてください。

問 3：全ブランドが購入可能な場合に、問 2.2 と同じ問題を考えるとどうなりますか。

問 4：さらに一般化しブランド数が増えた場合にも適用できる、最も得になるようなお試しの順番・購入の決定方法のルールを導いてください。

問 5：自転車の価格、返送料、評価の仕方が異なる場合、また、n 個のブランドのなかで $m(<n)$ 個しか試せない場合など、いろいろなバリエーションがあります。いろいろ考えてみてください。

期待値：確率を重みとして加重和を取った値。例えば、1 等 100 万円（確率 1% ）2 等 10 万円（5% ）はずれ 100 円（94% ）の宝くじの当選金額の期待値は

$$0.01 \times 1000000 + 0.05 \times 100000 + 0.94 \times 100 = 15094$$

つまり、15094 円です。

解答と解説　何かを買おうと探しているときに、ぴったりと相性の良い品物に出会えるかどうかは、運にも左右されますが戦略も大事です。この問題は日常生活でも遭遇するお試し戦略について考えるものです。以下に説明するように、各品物を単独で見て期待値の高い品物からお試しするべきかどうかは、状況によって変わります。実際、この問題では単独での期待値の高い順に試すことは最適になりません。それでも、最適なお試し戦略はかなりシンプルな形で表現することができるのですが、どんなものなのか見ていきましょう。

問 1：B

解説：実現する価値の期待値はそれぞれ次のようになります。

A$\rightarrow 0.40 * 2000 + 0.10 * 1000 + 0.00 * 0 - 0.50 * 200 = 800$

B$\rightarrow 0.25 * 2000 + 0.50 * 1000 + 0.15 * 0 - 0.10 * 200 = 980$

C$\rightarrow 0.26 * 2000 + 0.49 * 1000 + 0.00 * 0 - 0.25 * 200 = 960$

したがって、期待値を最大化しているのは B で、返品保証がない場合には、ブランド B を試すことが最適です。

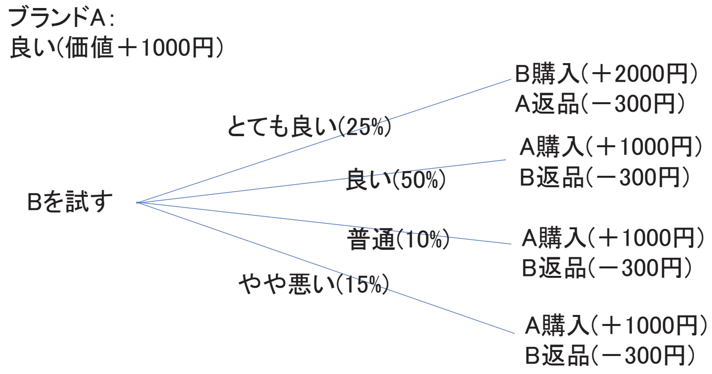
問 2.1.　やや悪い場合（普通以下の場合でも可）

解説：ブランド A の自転車を試したのち、ブランド B の自転車を試すとすればどちらか一方の自転車を返送する必要があるので、300 円の返送料が必ず発生します。したがって、ブランド B の自転車を試すことに 300 円以上の価値がなければ損になります。ブランド B を試す場合には、ブランド A の自転車を保持したまま 2 つを比べて、乗り心地が改善すれば A を返品、しなければ B を返品します（同等ならどちらを返品しても構いません）。それをふまえて、ブランド B を試すことに 300 円以上の価値があるかどうか、問 1 と同じように期待値の考え方を用いて評価することにしましょう。

ブランド A を試した後にブランド B を試すかどうか決められるのですから、ブランド A の乗り心地に応じて、ブランド B を試すのが得になるのかを考えることができます。それぞれ場合分けしてみましょう。

A の乗り心地がとても良い場合：すでに最高の乗り心地であるから、乗り心地が改善する可能性はありません。したがって、試すと必ず損になります。

A の乗り心地が良い場合：ブランド B の乗り心地がとても良い場合（確率 25%）、B により乗り心地が改善するので A を返品します。このとき、最終的に購入する自転車の乗り心地の価値は 2000 円になります。それ以外の場合なら（確率 75%）、乗り心地が改善しないので、B を返品するのが良いことがわかります（乗り心地が同じ場合には、どちらを購入しても構いません）。その場合、ブランド A を購入するので自転車の乗り心地の価値は 1000 円です。この状況を樹形図で表すと次のようになります。



ブランドBを試した後の最適な購入と返品の行動を踏まえて、ブランドBを試した場合に実現する乗り心地の価値の期待値は

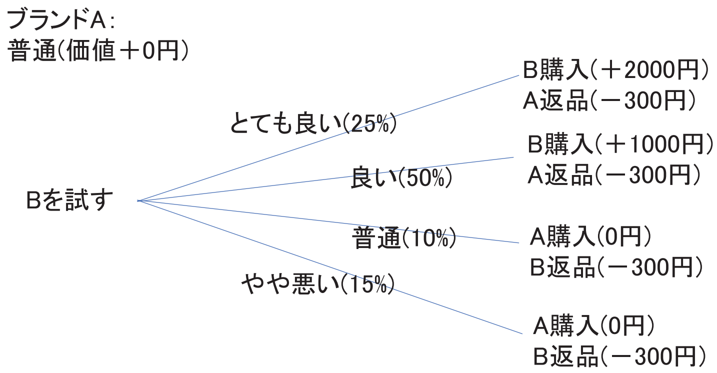
$$0.25*2000+0.75*1000=1250\text{円}$$

となります。ブランドBを試さず、ブランドAの自転車を購入することに決めれば、乗り心地の価値は1000円です。したがって、ブランドBを試した場合の乗り心地価値の期待値は250円増えますが、返送料300円が発生するため差し引き50円分の損となります。したがって、ブランドBを試すのは得になりません。

Aの乗り心地がやや悪い場合：この場合ブランドBの乗り心地がブランドAよりも悪くなることはないため、ブランドAの乗り心地にかかわらずブランドBを購入することにして構いません。したがって、この場合に限っては先にブランドAの自転車を返送してから、ブランドBを試してもかまいません。そうすると、問1のときと同じようにブランドBの乗り心地の価値が最終的な乗り心地となり、その期待値は980円になります。返送料300円を負担しても差し引き680円の価値になります。ブランドBを試さなければ-200円の価値なので、試す方が得になります (試すことと試さないことの価値の差は880円です)。

なお、設定ではブランドAの乗り心地が普通になる確率はゼロなので、この場合を考慮する必要はありませんが、仮にそのような場合が起きたときにどうすればよいのか、という問いには答えることは可能です。以下のように、そのような場合にはブランドBを試すのが得になることがわかります。

Aの乗り心地が普通の場合：ブランドBの乗り心地がとても良い場合（確率25%）、あるいは良い場合（確率50%）であればAを返品します。このとき、最終的に購入する自転車の乗り心地の価値はそれぞれ2000円、1000円になります。それ以外の場合なら（確率25%）、Bを返品するのが良いことがわかります。結果として、乗り心地が普通であるブランドAを購入するのでその価値は0円です。



このことを踏まえて、ブランドBを試すことによって実現する乗り心地の価値の期待値は

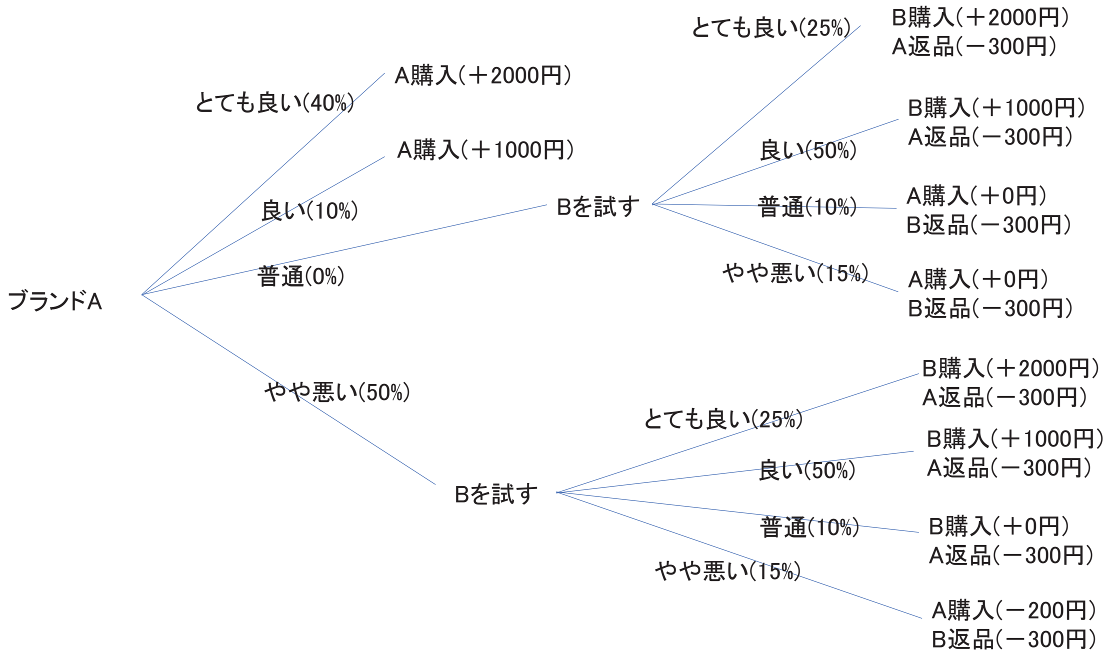
$$0.25*2000+0.50*1000+0.25*0=1000\text{円}$$

となります。ブランドBを試さず、ブランドAの自転車を購入することに決めれば、乗り心地の価値は0円です。したがって、ブランドBを試すことによって1000円の得になることがわかります。しかし、返送料300円が発生するため、差し引き700円分の得となります。したがって、Aの乗り心地が普通の場合には、ブランドBを試すのは得になります。

問2.2：Aから試す。Aの乗り心地がとても良いか良いならばBを試さずにAを購入する。Aの乗り心地がやや悪い（普通以下）ならBを試し、乗り心地が改善された場合にはBを購入しAを返品する。改善されなければBを返品する。

解説：ブランドBから試す場合とAから試す場合で、どちらの方が得になるかを考えます。

ブランド A から試す場合： 試した後どのようにすれば最も得になるかは問 2.1 ですでにみました。その方法と結果を、以下の樹形図を用いてまとめてみます。



さて樹形図のような状況を踏まえて、乗り心地の価値と返送料の期待値がどのようになるか計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&0.40 * 2000 \\
&+ 0.10 * 1000 \\
&+ 0.00 * (0.25 * 2000 + 0.50 * 1000 + 0.10 * 0 + 0.15 * 0 - 300) \\
&+ 0.50 * (0.25 * 2000 + 0.50 * 1000 + 0.10 * 0 + 0.15 * (-200) - 300) \\
&= 1240
\end{aligned}
$$

1 行目はブランド A の乗り心地がとても良い場合、2 行目は良い場合で、このときブランド B を試すことは得にならないため、そこで購入します。3 行目、4 行目はブランド A の乗り心地がそれぞれ普通、やや悪い場合で、その後ブランド B も試すことになり、ブランド B の乗り心地に応じて最適な購入をすること、また返送料を支払うことを織り込んで計算している点に注意しましょう。

ブランド B から試す場合： 問 2.1 で考えたように、先に B から試す場合にも、どのような乗り心地が実現したらブランド A を試すのが得になるのかを考えます。結論から言えば、ブランド B の乗り心地がとても良い場合を除いて、ブランド A を試すことが得になります。ブランド B の乗り心地がとても良い場合、ブランド A を試す余地がないことは明らかです。では、ブランド B の乗り心地が良い場合、A を試すと乗り心地が改善する（とても良い）確率が 40% です。それ以外の場合には価値が改善しません。したがって、ブランド A を試すことによって得られる価値の期待値は

$$0.40 * 2000 + 0.60 * 1000 = 1400$$

となります。どちらかの自転車を返品することによる返送料 300 円を差し引いても、1100 円で、ブランド A を試さない場合の乗り心地の価値 1000 円を上回ります。したがって、ブランド A を試すのが得になることがわかります。問 2.1 の解説の最後で見たように、ブランド B の乗り心地がより悪くなる場合には、ブランド A を試す方が試さないよりも必ず得になります。

では、先にブランド B から試す場合の価値の期待値と返送料の期待値を計算してみましょう。この場合の樹形図は省略しますが、一度描いてみてください。

$$
\begin{aligned}
& 0.25 * 2000 \\
& + 0.50 * (0.40 * 2000 + 0.60 * 1000 - 300) \\
& + 0.15 * (0.40 * 2000 + 0.10 * 1000 + 0.50 * 0 - 300) \\
& + 0.10 * (0.40 * 2000 + 0.10 * 1000 + 0.00 * 0 + 0.50 * (-200) - 300) \\
& = 1190
\end{aligned}
$$

したがって、ブランド A から調べるほうが価値と返送料の期待値が大きくなります。つまり、ブランド A から試す方が得になることがわかりました。

どのような原理で最適な戦略を求めることができるのか？　ここまでは計算によって、設定された状況で最も得になるようなお試し戦略はブランド A から試すという結論を導きました。では、結果の背後にどのような直観があるか考えてみましょう。ブランド A とブランド B の差は、乗り心地の出方（「確率分布」）にあります。ブランド A の乗り心地は、とても良い場合とやや悪い場合の確率が大きく、いわば 2 極化されています。一方でブランド B については 2 極化の傾向は強くでていません。もし、何らかの順番でお試しをすることに意味があるとすれば、それはなるべく乗り心地のよい自転車を早く見つけることです。というのも、満足できる乗り心地の自転車を早く見つけることができれば、お試しの回数が減り、結果として返送料をあまり払わなくても済むからです。そうすると、乗り心地の出方が比較的良いものに偏っているブランド A を先に試し、そうでないブランド B を後回しにする方が良さそうだとわかります。

この考え方をより一般化するために、「乗り心地の出方が比較的良いものに偏っている」程度を表す指標を導き、その指標の高いブランドからお試しをするのではないか、と考えてみます。まず、「乗り心地の出方が比較的良いものに偏っている」ことをどのように言い換えることができるでしょうか。つぎのように考えてみましょう。

> あるブランドの乗り心地の出方が比較的良いものに偏っているとすると、もしそのブランドを試す前から保持している自転車があるなら、保持している自転車の乗り心地の価値が比較的高くても、まだそのブランドを試すことが得になる

保持している自転車の乗り心地が十分良くなるなら、新たにそのブランドを試すことは決して得になりません。そうすると、新たにそのブランドを試すことがちょうど得にも損にもならないどこか中間的な価値の水準があるはずです。そこで、そのような水準をもって、あるブランドの「乗り心地の出方が比較的良いものに偏っている程度」を表すことにしてみましょう。

では、ブランドごとに上記のような指標を求めてみましょう。いま、ある自転車をすでに保持しているとして、その乗り心地の価値を x 円とします。ここで x の値は問にある 4 通りの値に限らず、自由に設定できるとします。なお、x の値が十分小さければ試す方がよいことは当然なので、ブランドを試す方が得になるような条件として、$x \leq \bar{x}$ となるような x の上限 $\bar{x}$ はどんな値かを考えてみましょう。

ブランド A：キープしている自転車の乗り心地の価値を x としたとき、ブランド A を試して得られる価値と返送料の期待値は ($x \geq y$ のとき $\max\{x, y\} = x$ に注意して）

$$
\begin{aligned}
& 0.40 * \max\{2000, x\} + 0.10 * \max\{1000, x\} \\
& + 0.00 * \max\{0, x\} + 0.50 * \max\{-200, x\} - 300
\end{aligned}
$$

5

となります。一方でブランド A を試さなければ、キープした自転車を取ることになり、その価値は x です。したがって、

$$\begin{aligned}&0.40*\max\{2000,x\}+0.10*\max\{1000,x\}\\&+0.00*\max\{0,x\}+0.50*\max\{-200,x\}-300\geq x\end{aligned}$$

であれば、ブランド A を試す方が得になることがわかります。ここで、$\max\{y,z\}-s=\max\{y-s,z-s\}$ であることに注意すると、上の式は

$$\begin{aligned}&0.40*\max\{2000-x,0\}+0.10*\max\{1000-x,0\}\\&+0.00*\max\{0-x,0\}+0.50*\max\{-200-x,0\}-300\geq 0\end{aligned}$$

と書き換えらます。この式の左辺は x が小さくなるにつれて値が大きくなるから、もしある x で不等式が成立すると、それより小さい x でも成立します。ということは、式が等号で満たされるような $\bar{x}$（または、上記の式を満たす最大の x）があれば唯一です。実際その値は $\bar{x}=1250$ となることが次のようにして確かめられます。

$$\begin{aligned}&0.40*\max\{2000-1250,0\}+0.10*\max\{1000-1250,0\}\\&+0.00*\max\{0-1250,0\}+0.50*\max\{-200-1250,0\}-300\\&=0.40*750+0.10*0+0.00*0+0.50*0-300\\&=300-300=0\end{aligned}$$

つまり、ブランド A が試されていない場合、キープしている自転車の価値が 1250 円以下であれば、ブランド A を試す方が得になります。見方を変えると、ブランド A の乗り心地の価値の出方は、1250 円以上のところに偏っており、そのため返送料を支払ってもキープしている自転車の価値が 1250 円までならば試す価値があるということです。したがって、ブランド A を試すことに対応する指標は 1250 円と考えることができます。

ブランド B：同様にして、ブランド B が試されていない場合に保持している自転車の価値がいくら以下であればブランド B を試すことが得になるのかを考えてみます。条件は

$$\begin{aligned}&0.25*\max\{2000-x,0\}+0.50*\max\{1000-x,0\}\\&+0.10*\max\{0-x,0\}+0.15*\max\{-200-x,0\}-300\geq 0\end{aligned}$$

と表され、等号を満たすのは $\bar{x}=2800/3=933.33$ であることが確かめられます。つまり、ブランド B が試されていない場合、キープしている自転車の価値が 933.33 円以下であれば、ブランド B を試す方が得になります。ブランド B の乗り心地の価値の出方は、比較してあまり高い値に偏っておらず、返送料を支払っても良いのはキープしている自転車の価値が 933 円までであるということです。したがって、ブランド B を試すことに対応する指標は 933 円です。

指標の定義からすぐに分かることは、一つのブランドが試されずに残っているとき、もし保持している自転車があり、その乗り心地の価値がそのブランドを試すことに対応する指標よりも小さいならば、ブランドを試すことが得になるということです。したがって、ブランド A から B の順で試す場合は、A の乗り心地が良い（価値 1000 円）以上ならブランド B を試すと得にならないこと、またブランド B から A の順で試す場合には、B の乗り心地が非常に良いとき以外は（価値 2000 円）ブランド A を試すと得になることです。

さて、上の指標から考えて、ブランド A から試すほうがなぜ良いのかを再検証してみましょう。A から試すことにより、比較的良い乗り心地が実現する可能性が高いことがわかります。ブランド B はそも

そも良い乗り心地が実現する可能性が高くないことから、もしブランド A の自転車について比較的良い乗り心地が実現すれば、そこでお試しを終了することが適切な判断となります。ブランド B を試すのは、ブランド A の乗り心地がそれほど良くない場合に限られます。つまり、このような順序でお試しをすることから、初めのお試しで比較的良い乗り心地が実現する可能性が高くなり、2 回目の返送料を節約することが可能となります。一方、B から試す場合は逆になるため、初めのお試しで比較的良い乗り心地が実現する可能性が低くなり、2 回目の返送料を負担する可能性も高まります。これらのことから、ブランド A を先にお試しするほうが望ましいことが示唆されました。実は最適なお試し方法について、次の事実が成立します

「パンドラ・ルール」（最適なお試し方法）
各ブランドをお試しすることに対応する指標を計算する。

1. まだお試ししていないブランドの中で、最も高い指標を持つブランドを試す。
2. すでに保持している自転車があるとき、1 で新しく試したブランドの自転車の乗り心地の価値が改善したなら、保持している自転車を返品し、新しい自転車を保持する。
3. 保持している自転車の乗り心地の価値が、残っているブランドのどの指標よりも高い場合には、お試しを終了し、保持している自転車を購入する。残っているブランドの指標の中で、保持している自転車の乗り心地の価値よりも高いものがある場合には、1 に戻る。

このルールは経済学者の M. Weitzman によって見つけられ、名付けられました（“Optimal Search for the Best Alternative” *Econometrica*, Vol. 47, No. 3 (May, 1979)、ただ、返品可能な商品のお試し戦略に限らず、もっと一般的に当てはまる探索活動に関する研究です）。このパンドラ・ルールは商品の個数がたくさんあっても一般的に成立します。ただ、数学的帰納法を用いた Weitzman による証明は難しくわかりにくいので、ブランドが 2 つのケースについて別のアプローチで証明することにします（アイデアは M. Armstrong “Ordered Consumer Search” *Journal of the European Economic Association*, Vol. 15, Issue 5, 1 October 2017 によります）。

問 3：A→C→B の順に試す。乗り心地がとても良い、または良い自転車が見つかったならばそれ以上試さない。また、新しくブランドを試すときには、一つ前のブランドの自転車を保持しておき、新しいブランドの自転車と比較して乗り心地の良い方を残し、悪い方を返品する。

解説： まず、ブランド C についても同様にして、先ほど求めた指標を計算してみましょう。ブランド C を試すことが得になるための条件は

$$0.26 * \max\{2000 - x, 0\} + 0.49 * \max\{1000 - x, 0\}$$
$$+ 0.00 * \max\{0 - x, 0\} + 0.25 * \max\{-200 - x, 0\} - 300 \geq 0$$

この式を等号で満たすような $\bar{x}$ は $\bar{x} = 2840/3 = 946.67$. パンドラ・ルールを用いれば、**A→C→B** の順に試し、乗り心地が良い以上ならお試しをそこでやめるのが最適な戦略になることがわかります。

問 4：パンドラ・ルールを用いればよい。

問 5：価格や返送料が異なる場合については、パンドラ・ルールを自然に拡張することができる。それ以外の場合については、まだよくわかっていません。

パンドラ・ルールの最適性の証明　(2 ブランドの場合)

- 価値として取りうる値の集合 $V=\{v_1,...,v_n\}$ $v_1<v_2<\cdots<v_n$.
  問題では $V=\{-200,0,1000,2000\}$.
- ブランド A、B の価値の確率分布 $p^A(v_i)\geq 0, p^B(v_j)\geq 0,\ \sum_{i=1}^n p^A(v_i)=1, \sum_{j=1}^n p^B(v_j)=1$.
  問題では $p^A(-200)=0.5, p^A(0)=0, p^A(1000)=0.1, p^A(2000)=0.4$. $p^B(v_j)$ も同様。
- 返送料、ともに $c>0$. 問題では $c=300$.
- $r^A:\sum_{i=1}^n p^A(v_i)\max\{v_i-r^A,0\}=c,\ r^A:\sum_{j=1}^n p^B(v_j)\max\{v_j-r^B,0\}=c$; 留保価値とよぶ。
  問題の解説で登場したお試しが得になることに対応する指標と同じ。$r^A=1250, r^B=933.33$.

パンドラ・ルール（2 ブランドの場合）

1. r^A, r^B の大きい方のブランドを試す。同じならばどちらでもよい。いま、一般性を失うことなく $r^A>r^B$ とする。
2. ブランド A の価値 v_i が、$v_i\geq r^B$ なら、A を選ぶ。$v_i<r^B$ ならブランド B を試す。
3. ブランド B の価値 v_j と v_i を比較して大きい方のブランドを選ぶ。

パンドラ・ルールによって結果的に選ばれるブランドは、各ブランドの価値 v_i, v_j の組み合わせがわかれば確定的となります。ここで、$w^A(v_i)=\min\{v_i,r^A\}, w^B(v_j)=\min\{v_j,r^B\}$ と定義します。

補題 1 パンドラ・ルールに従うと、$w^A(v_i)>w^B(v_j)$ ならブランド A, $w^A(v_i)<w^B(v_j)$ ならブランド B が選ばれる。ただし、値が同じならどちらを選んでもよい。

証明. まず、$w^A>w^B$ とします。もし $v_i>r^B$ なら、パンドラ・ルールよりブランド B を試さずに A を選びます。一方 $v_i\leq r^B$ ならブランド B を試します。しかし、$v_i\geq w^A>w^B=\min\{r^B,v_j\}$ なので $v_i>v_j$ でなければならず、結果としてブランド A を選びます。

次に $w^A<w^B$ とします。もし $v_i\geq r^B$ なら、条件 $r^A>r^B$ と合わせて $w^A=\min\{r^A,v_i\}\geq r^B\geq\min\{r^B,v_j\}=w^B$ となり矛盾します。したがって、$v_i<r^B$ でなければなりませんから、ブランド B は必ず試されます。ここでもし $v_i\geq v_j$ とすると、$r^A>r^B>v_i\geq v_j$ となるので、$w^A=\min\{r^A,v_i\}=v_i\geq v_j=\min\{r^B,v_j\}=w^B$ となり結局矛盾します。したがって、$v_i<v_j$ でなければなりませんから、ブランド B を選びます。 ■

補題を用いて、パンドラ・ルールに従って選択した場合の価値と返送料の期待値を求めてみましょう。

命題 2 パンドラ・ルールに従ったときの乗り心地の価値と返送料の期待値は

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p^A(v_i)p^B(v_j)\max\{w^A(v_i),w^B(v_j)\}+c$$

と等しい。

証明. 補題から、パンドラ・ルールに従ったときの乗り心地の価値と返送料の期待値は

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{v_i\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j)) + v_j\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))\} - \sum_{i=1}^{n} p^A(v_i)c\mathbb{I}(v_i < r^B)$$

です。ただし、$\mathbb{I}(\cdot)$ は

$$\mathbb{I}(\text{条件}) = \begin{cases} 1 & \text{条件が成立} \\ 0 & \text{条件が不成立} \end{cases}$$

というように、条件が成立するかによって 0 か 1 かを返す関数です。

さて、$\sum_{i=1}^{n} p^A(v_i)\max\{v_i - r^A, 0\} = c,\ \sum_{i=1}^{n} p^B(v_i)\max\{v_i - r^B, 0\} = c$ という関係を使って、上の式を書き換えてみましょう。

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)v_i\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j)) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p^A(v_i)\max\{v_i - r^A, 0\}}_{=c} + c \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[v_j\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j)) - \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i < r^B)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[v_i\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j)) - \max\{v_i - r^A, 0\}] + c \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[v_j\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j)) - \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i < r^B)]
\end{aligned}$$

ここで、式をいくつかの部分に分けて考えてみます。まず

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[v_i\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j)) - \max\{v_i - r^A, 0\}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j))[v_i - \max\{v_i - r^A, 0\}]
\end{aligned}$$

となることが次にようにしてわかります。$r^A > r^B$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&v_i - r^A \geq 0 \Rightarrow w^A(v_i) \geq w^B(v_j) \\
&\ \Rightarrow \max\{v_i - r^A, 0\} = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(v_i - r^A \geq 0) = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j)) \\
&v_i - r^A < 0 \Rightarrow \max\{v_i - r^A, 0\} = 0 \Leftrightarrow \max\{v_i - r^A, 0\} = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j))
\end{aligned}$$

となるために、いつでも

$$\max\{v_i - r^A, 0\} = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j))$$

という関係が成立します。一方、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[v_j\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j)) - \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i \geq r^B)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))[v_j - \max\{v_j - r^B, 0\}]
\end{aligned}$$

となることも同様にして示すことができます。というのも、

$$
\begin{aligned}
&v_j - r^B \geq 0, v_i < r^B \Rightarrow w^A(v_i) < w^B(v_j)\\
&\qquad \Rightarrow \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i < r^B) = \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))\\
&v_j - r^B < 0 \Rightarrow \max\{v_j - r^B, 0\} = 0\\
&\qquad \Rightarrow \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i < r^B) = \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j)) = 0
\end{aligned}
$$

となりますから、いずれにせよ

$$
\max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(v_i < r^B) = \max\{v_j - r^B, 0\}\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))
$$

となるためです。

したがってパンドラ・ルールに従った場合の価値と返送料の期待値は

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j))[v_i - \max\{v_i - r^A, 0\}]\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))[v_j - \max\{v_j - r^B, 0\}] + c
\end{aligned}
$$

ですが、ここで $w^A(v_i) = \min\{v_i, r^A\} = v_i - \max\{v_i - r^A, 0\},\ w^B(v_j) = \min\{v_j, r^B\} = v_j - \max\{v_j - r^B, 0\}$ であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{\mathbb{I}(w^A(v_i) \geq w^B(v_j))w^A(v_i) + \mathbb{I}(w^A(v_i) < w^B(v_j))w^B(v_j)\} + c\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\max\{w^A(v_i), w^B(v_j)\} + c
\end{aligned}
$$

となることがわかりました。■

一方、ブランド B から試した場合の価値と返送料の期待値は、ブランド A から試した場合よりも小さくなることが次のようにしてわかります。ブランド B から試し、その後は最適な戦略に従うとすれば、価値と返送料の期待値は次のようになります。

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{v_i\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j) + v_j[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)]\} - \sum_{j=1}^{n} p^B(v_j)c\mathbb{I}(v_j < r^A)
$$

この式も部分に分けて考えます。まず、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)v_i\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j) - \sum_{j=1}^{n} p^B(v_j)c\mathbb{I}(v_j < r^A)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)v_i\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j) - \sum_{j=1}^{n} p^B(v_j)\sum_{i=1}^{n} p^A(v_i)\max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(v_j < r^A)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j)\{\underbrace{v_i - \max\{v_i - r^A, 0\}}_{w^A(v_i)}\}
\end{aligned}
$$

10

となります。なお、2 番目の等式が成立するのは

$$
\begin{aligned}
&v_i - r^A \geq 0,\ v_j < r^A \Rightarrow v_i > v_j \\
&\qquad \Rightarrow \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(v_j < r^A) = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j) \\
&v_i - r^A < 0\ v_j < r^A \\
&\qquad \Rightarrow \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(v_j < r^A) = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j) = 0
\end{aligned}
$$

となり、結果として

$$
\max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(v_j < r^A) = \max\{v_i - r^A, 0\}\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j)
$$

が常に成立するからです。一方、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)v_j[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)] - c \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)v_j[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)] - \sum_{j=1}^{n} p^B(v_j)\max\{v_j - r^B, 0\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{v_j[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)] - \max\{v_j - r^B, 0\}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{v_j[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)] \\
&- \max\{v_j - r^B, 0\}[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j)]\}
\end{aligned}
$$

と変形できます。ここで

$$
1 = \mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j) \geq \mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)
$$

に注意すると、上の式は次の式で上から抑えられます。

$$
\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)[\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)]\{\underbrace{v_j - \max\{v_j - r^B, 0\}}_{w^B(v_j)}\}.
$$

まとめると、ブランド B から試す場合の価値と返送料の期待値は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p^A(v_i)p^B(v_j)\{\mathbb{I}(r^A > v_j,\ v_i > v_j)w^A(v_i) + [\mathbb{I}(r^A \leq v_j) + \mathbb{I}(r^A > v_j \geq v_i)]w^B(v_j)\} + c \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p^A(v_i)\sum_{j=1}^{n} p^B(v_j)\max\{w^A(v_i), w^B(v_j)\} + c
\end{aligned}
$$

を満たします。したがって、ブランド A から試すほうが価値と返送料の期待値が高くなることを、先程の命題から結論することができます。

鮎の養殖池

高田宗樹(福井大学)、小島彰二(名古屋西高等学校)、市川敏(椙山女学園高等学校)

鮎（あゆ）の養殖池を設計しよう。工法の都合で浅い円筒の池を作ることにしており、管理する水量をできるだけ少なくしたいと思います。鮎は円形の縄張りをもつため、設計の準備として、互いに接する円の半径について調べてみよう。円 $C_0(r_0)$ の境界およびその内部の領域に含まれる（内包される）円 $C_1(r_1), C_1'(r_1)$ を**図１a** のように配置しました。ここで r_j は円 C_j の半径を表します（$j=0,1$）。円 C_0 には半径 r_1 の円をこれ以上、内包させることができないので、できるだけ半径の大きい円を円 C_0 に内包させることができないかを検討することにしました。ここでは、

Step1: 円 C_1, C_1' の中心 O_1, O_1' の垂直二等分線 ℓ_1 を描く(**図 1b**)。円 C_0 に内接して、円 C_1, C_1' に外接する円 $C_2(r_2)$ の中心 O_2 を ℓ_1 上にみつける。

Step2: 円 C_1, C_2 の接点を通る共通接線 ℓ_2 を描く。円 C_0 に内接して、円 C_1, C_2 に外接する円 $C_3(r_3)$ をみつける。

という方法に従って、逐次、円 $C_2(r_2)$，$C_3(r_3)$ の配置を行うものとします。幾何学的な計算によって、$r_0 = 2r_1 = 3r_2 = 6r_3$ となります。このとき、以下の等式①を確認することができます。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_0}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_0^2}\right) \cdots\cdots ①$$

これはデカルトの円定理として名高く、円や球の接触問題は古くから関心が持たれており、紀元前 3 世紀のアポロニウスにさかのぼります[1]。

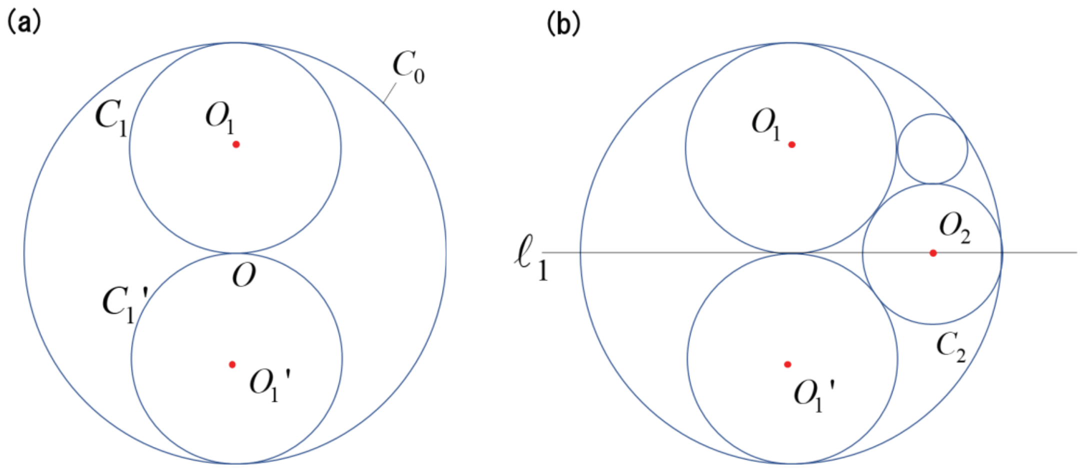


図 1. 互いに接する円。(a) O は円 C_0 の中心である。(b)円 C_0 に内接して、円 C_1, C_1' に外接する円の中心 O_2 は、円の対称性から、直線 O_1O_1' に対して線対称の位置に置いてもよい。

さて、孵化の後、3 ヶ月ごとに仔魚、稚魚、幼魚、成魚の発育段階をとり死をむかえる**鮎**は、以下のルールに従って縄張りを形成すると仮定します。そのため、縄張りの領域が重なり合うことのないように考慮して、養殖池を設計する必要があります。

（I）**鮎**の縄張りは、池の鉛直上方からみると円とみてよい。

（II）**鮎**の縄張りは発育過程の段階に依存しており、成魚、幼魚、稚魚、仔魚の段階でそれぞれ $r_1; r_2; r_3; r_4$ の半径をもつ円 $C_1^{(1)}(r_1),\ldots,C_1^{(n)}(r_1); C_2^{(1)}(r_2),\ldots,C_2^{(m)}(r_2); C_3^{(1)}(r_3),\ldots,C_3^{(k)}(r_3); C_4^{(1)}(r_4),\ldots,C_4^{(q)}(r_4)$ となる。ここで、n,m,k,q は成魚、幼魚、稚魚、仔魚の個体数を表し、上述のとおり $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ である。

（III）**鮎**の縄張りの大きさは成魚になると、ある一定の大きさとなり、それ以上は変化しない。

例えば**図 1b** は様々な成長段階の**鮎**が混在する養殖（基準）池と考えることもできます。**図 2** は**養殖池の半径に相当する** r_0 **を変化**させて、$n=22$ の**鮎**の成魚を(上述のような規則を定めずに)池に入れた縄張りの様子です。大きな養殖池になると、**図 2a** のように成魚の縄張りに間隙が生ずることがあります。そこで、全体を適当に揺らせて円 $C_1^{(1)}(r_1), ..., C_1^{(22)}(r_1)$ の配置をずらせ、円 C_0 の半径の大きさを縮めることができないかを実験してみました(**図 2b**)。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 円 C_0 の面積に対して**鮎**の縄張りを表す円（この問いにおいては円 $C_1^{(1)}(r_1),...,C_1^{(22)}(r_1)$)の面積が占める割合を充填率とします。**図 2a**, **図 2b** のそれぞれにおいて r_0, r_1 を実測するなどして、充填率の<u>値</u>を求めなさい。また、円 C_0 の半径の大きさ r_0 を、さらに縮めることはできるかを検討しなさい。

問題に親しみやすくするために、ランダムプロセスによる実験操作を入れました。ほとんどの解答者が取り組んでくれていました。**図 2c** のように r_0 を縮小することができます。**図 2b'** ではストライプの円 $C_1^{(22)}$ の中心 $O_1^{(22)}$ が O から最も離れていましたが、その左隣の円 $C_1^{(21)}$ はこの操作で逆に外部へ移動しています。**図 2b'** および**図 2c** の点線円を C_0 としてその半径 r_0 をそれぞれ実測することにより、充填率は 0.61 程度(**図**

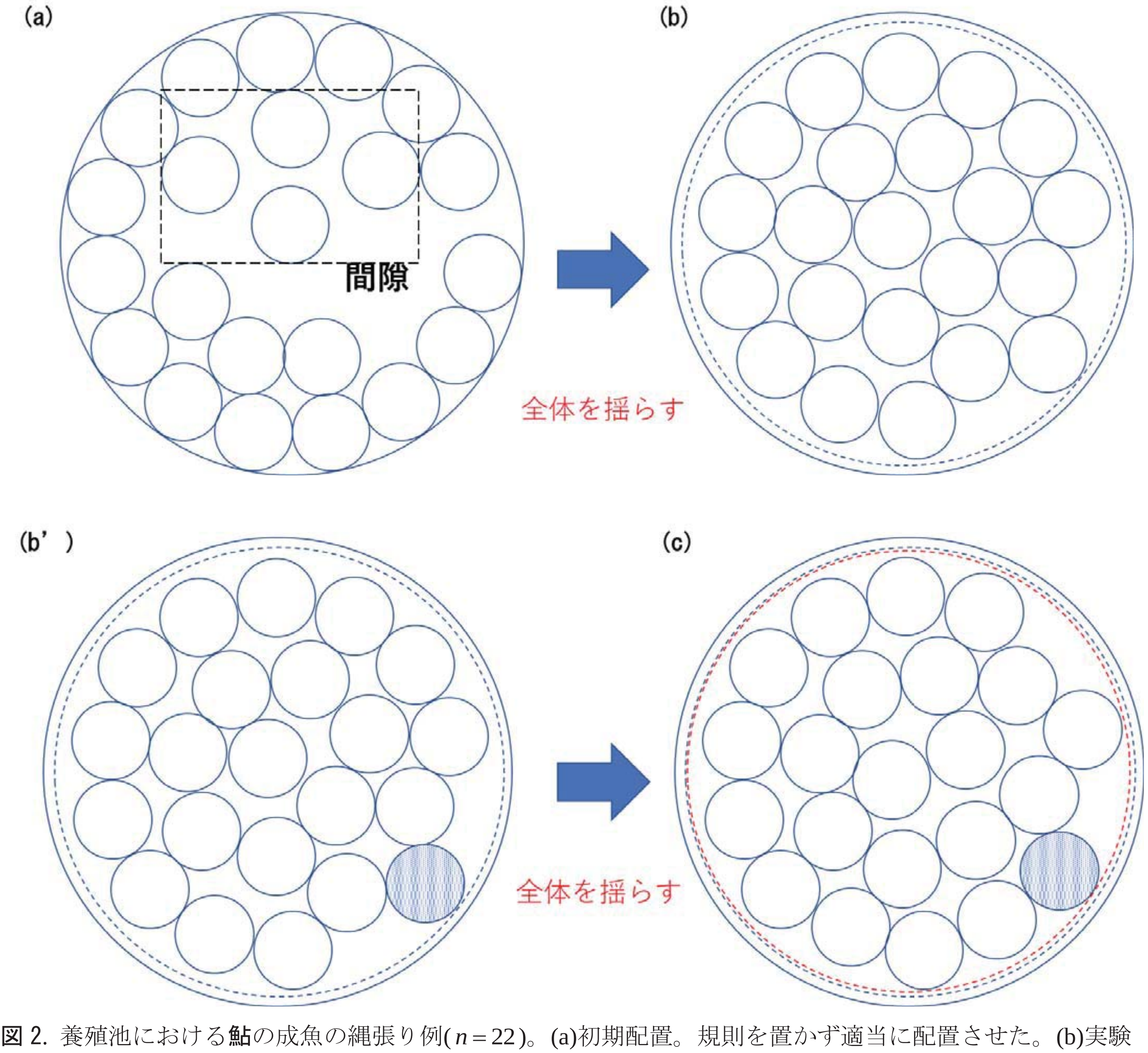
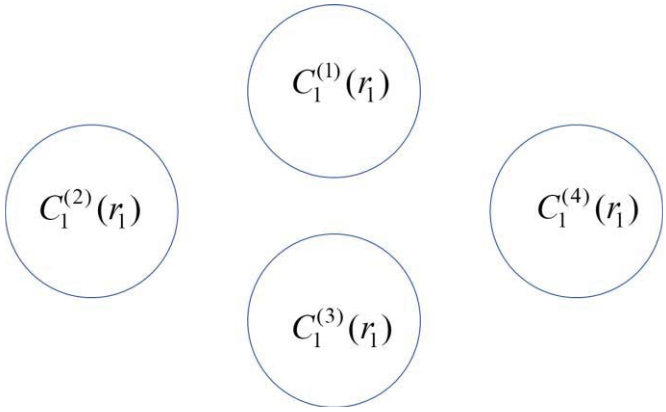


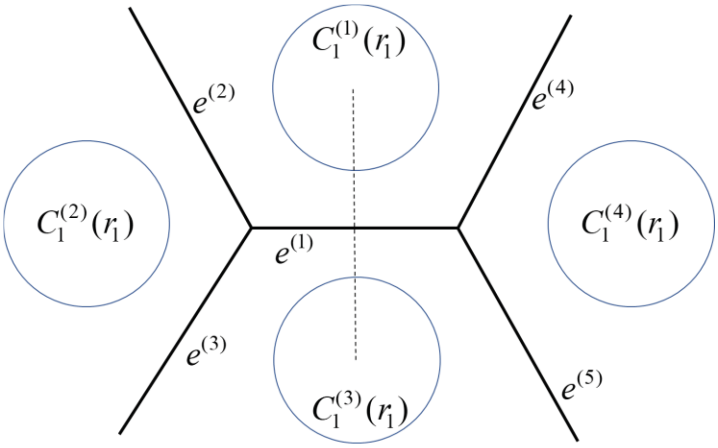
図 2. 養殖池における**鮎**の成魚の縄張り例($n=22$)。(a)初期配置。規則を置かず適当に配置させた。(b)実験後の縄張りの配置。点線の円に養殖池を縮小させることに成功した。

2b')であったものが 0.67 程度(**図 2c**)まで増大することを確認することができます。

(2) **図 2a** に示した円 $C_1^{(1)}(r_1),\ldots,C_1^{(22)}(r_1)$ の配置は動かさずに、できるだけ成長過程の進んだ**鮎**を新たに入れて、同一の池で養殖したいと思います。新たに入れる**鮎**をどこに配置すればよいでしょうか。このとき、**図 2a** の矩形点線部分を拡大して単純化した**図 3** をもとに考察してください。



(a)



(b)

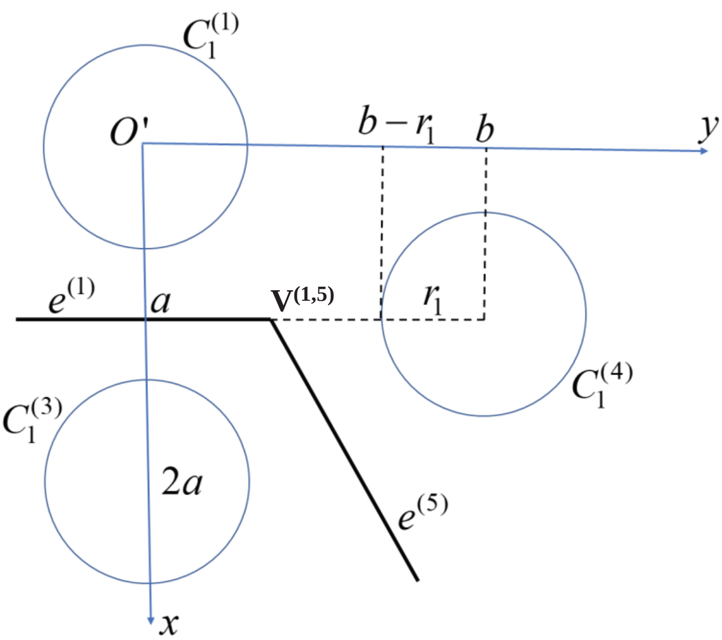


図 3. 縄張りの間隙(**図 2a** 矩形点線部分を拡大)

「できるだけ成長過程の進んだ**鮎**を新たに入れ」るプロセスを問うているので、ここでは円$C_1^{(1)}(r_1),\dots,C_1^{(4)}(r_1)$のうち２つの円に外接するできるだけ大きい半径$r$をもつ円$C'(r)$を求めることになります。一般に２円に外接する円の中心は、２円の中心を焦点とする双曲線上を動きますが、円$C_1^{(1)},\dots,C_1^{(4)}$については全て同じ半径$r_1$をもつことから、図 3a のように線分$e^{(1)}$または半直線$e^{(2)},\dots,e^{(5)}$上を動きます。$e^{(1)},\dots,e^{(5)}$で領域分けされたこの図は円ボロノイ図[1]と呼ばれる[2]。ここでは、境界の図形配置に依存する半直線$e^{(2)},\dots,e^{(5)}$を除外して議論します。図 3b のように直線$O_1^{(1)}O_1^{(3)}$をx軸にとると、図形の対称性から第一象限のみ議論すれば良いことが分かります。$O_1^{(1)}O_1^{(3)}=2a$, $C'(r)$の中心O'を(a,y)とおくと、

$$r=\sqrt{a^2+y^2}-r_1$$

となり$e^{(1)}$の中点$(a,0)$から$e^{(1)}$に沿ってO'を上方に動かせば簡単な考察からrは単調増加します。$e^{(1)}$と$e^{(5)}$の交点を $\mathrm{V}^{(1,5)}$とすると、その座標は

$$\left(a,\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2b}\right)$$

であり、$C'(r)$の中心O'を$e^{(1)}$の中点から$e^{(1)}$に沿ってO'を上方に動かした際の上端 $\mathrm{V}^{(1,5)}$で最大値

$$\frac{b}{2}+\frac{a^2}{2b}-r_1$$

をとります。ちなみに、$C'(r)$の中心O'をさらに上方へ動かすと、$y>\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2b}$であり、図より

$$r=b-r_1-y<b-r_1-\left(\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2b}\right)$$

となり、円$C_1^{(4)}$による制約を受けてしまいます。従って、

$$r=\min(\sqrt{a^2+y^2}-r_1,b-r_1-y)$$

となります。この場合はrの最大値は $\mathrm{V}^{(1,5)}$で与えられました。ボロノイ図の境界線の交点となったわけです。思考実験的な記載を交えて、飯田奈那さん(白百合学園中学校３年)や Labyrinth(多治見西高等学校 2 年)をはじめとして、いくつかのグループがこの結論に達してくれました。

　では、こうした交点とならない場合はあるでしょうか。問題作成員会では、このように新しい問題設定をして取り組んで欲しいと期待しております。

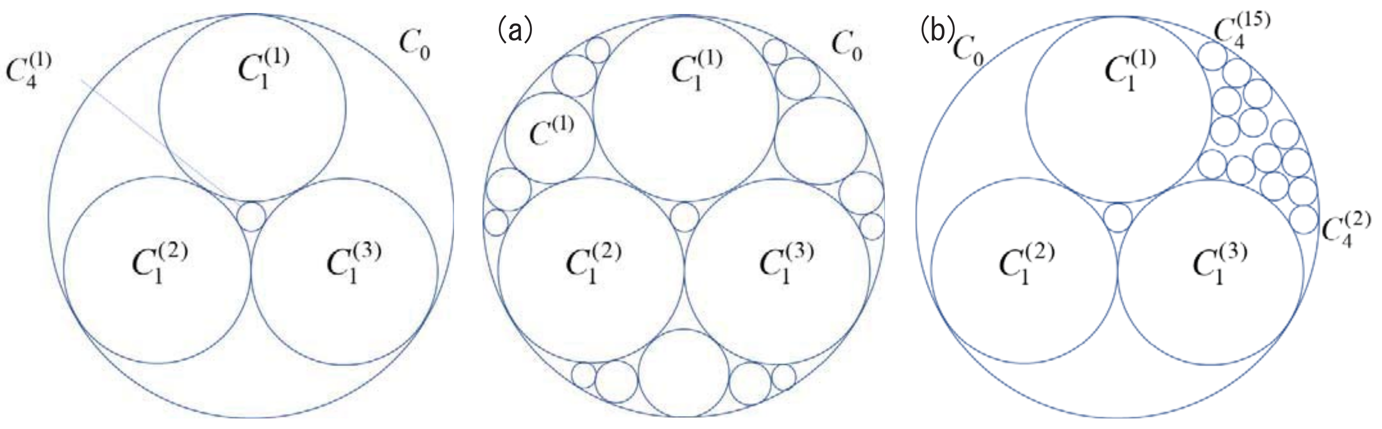


図 4. 成魚 3 匹の縄張り; アポロニウスギャスケットの一例(a), $C_4^{(2)},\dots,C_4^{(15)}$を敷き詰めた例(b)

　ここで**鮎**の成長過程を考慮に入れると、養殖池間を移動させるプロセスが必要であるようです。以下では

[1] 一般に、ある距離空間上の任意の位置に配置された複数個の点（母点）に対して、同一距離空間上の他の点がどの母点に近いかによって領域分けされた図をボロノイ図と言います。円を生成元としているところが異なります。

2つの成長段階の**鮎**を同一の池で養殖することが望ましいと仮定して、ある成長段階の**鮎**と成魚が混合する養殖池を考えます。

(3) **鮎**の成魚 3 匹の縄張り(円 $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$)を内包する池 $C_0(r_0)$ を、**図 4** のように作りました。円 $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C_4^{(1)}$ の半径 r_4 を等式①を参考にして求めなさい。また、できるだけ多くの半径 r_4 の円によって**図 4** の残りの部分を埋めていくときの充填率を求めなさい。ここで**図 4** の残りの部分とは、円 $C_0, C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1)$ で囲まれる領域、$C_0, C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域、および $C_0, C_1^{(3)}(r_1), C_1^{(1)}(r_1)$ で囲まれる領域である。

(4) **図 4** において、円 $C_0, C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C^{(1)}$ の半径 r を、等式①を参考にして求めなさい。また、できるだけ多くの半径 r の円によって**図 4** の残りの部分を埋めていくときの充填率を求めなさい。ここで**図 4** の残りの部分とは、円 $C_0, C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域、$C_0, C_1^{(3)}(r_1), C_1^{(1)}(r_1)$ で囲まれる領域、および $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域である。

図 4a はアポロニウスギャスケットと呼ばれるフラクタル図形です。このように、できるだけ小さい要素で空間を埋めていくことにより充填率が大きくなります。(残念ながら入賞には至りませんでしたが、「ニシマル」チーム(FSG-3)はこの図形に気づいてくれていました。) この性質を使って、

(3)の充填率 >> (4)の充填率

に気づいて欲しいというのが、作題者のねらいでした。

図 4 の円 $C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1), C_1^{(3)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C_4^{(1)}$ の半径 r_4 を等式①を参考にして求めると、

$$r_4 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} r_1 = \left(7-4\sqrt{3}\right) r_0$$

となります。**図 4b** は $C_0, C_1^{(3)}(r_1), C_1^{(1)}(r_1)$ で囲まれる領域に $C_4^{(2)}, \ldots, C_4^{(15)}$ を敷き詰めた例です。一般に、敷き詰める円が多いときは解析的には求まりませんので、厳密にはパソコンを使った数値計算を待たないといけません。この場合、充填率 $\left(3r_1^2 + 43r_4^2\right)/r_0^2$ を計算すると約 0.87 となります。

一方、**図 4** の円 $C_0, C_1^{(1)}(r_1), C_1^{(2)}(r_1)$ で囲まれる領域において、これらの円に内接する円 $C^{(1)}$ の半径 r を、等式①を参考にして求めると、

$$r = \frac{9+4\sqrt{3}}{33} r_1 = \frac{2\sqrt{3}-1}{11} r_0$$

となります。この場合、充填率 $3\left(r_1^2 + r^2\right)/r_0^2$ を計算すると約 0.80 となり、上述した不等式が得られます。

以上の半径 r_4 および r ついては、筑駒創造てるてる(筑波大学附属駒場中学校３年)をはじめとして、いくつかのグループ・個人が正確に計算することができていました。

(5) 養殖池間を移動させない期間を、できるだけ長くとる観点から、ある一定の期間、養殖池に入れた**鮎**が成長しても同一の個体数が維持できる養殖池を設計してください。ただし、上述の充填率はできるだけ大きくなるように配慮してください。

この問題は数学コンクール恒例のもので、自分で問題設定して論じてください、という代物です。**鮎**の縄張りは３カ月ごとに増大することを定義してますが、その間の様子は問題に設定されていません。**図 5** のよ

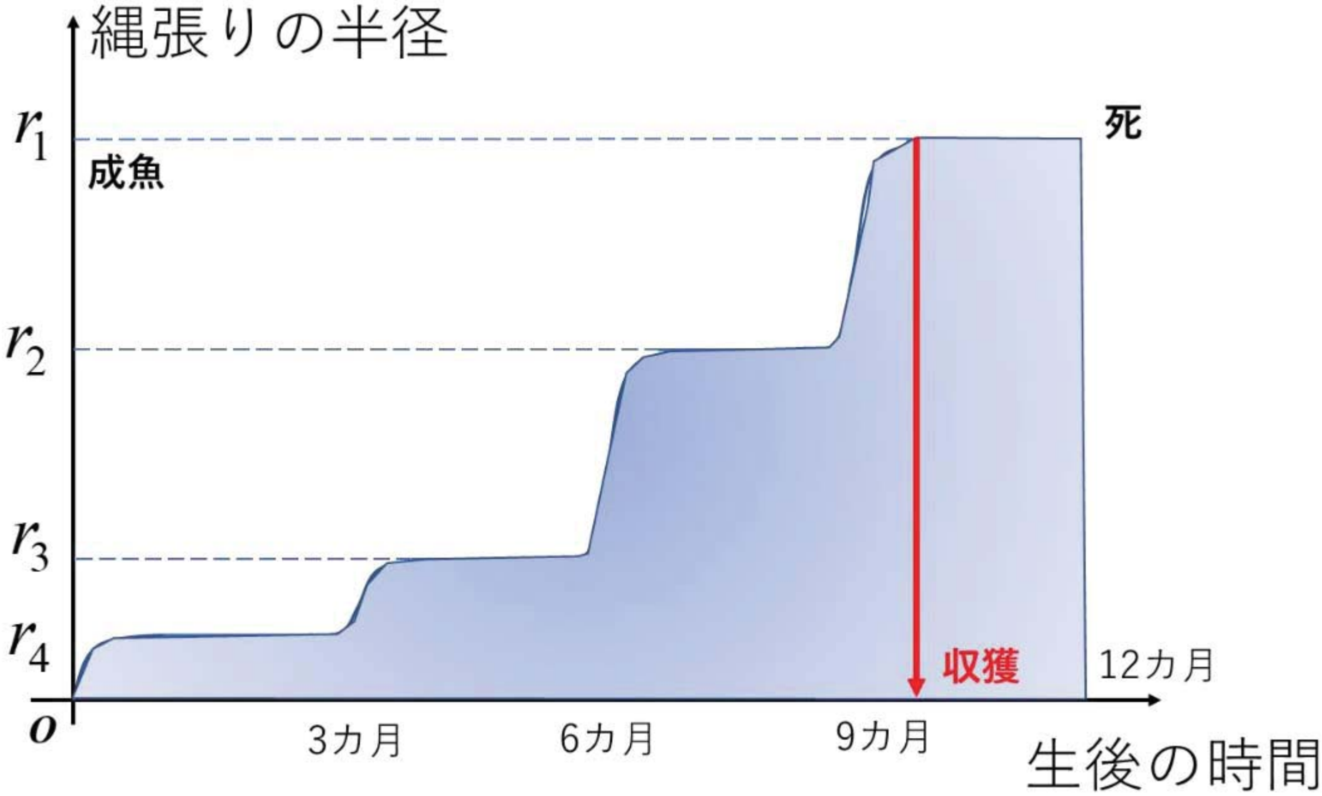


図 5. **鮎**の縄張りの時間変化を設定した一例。

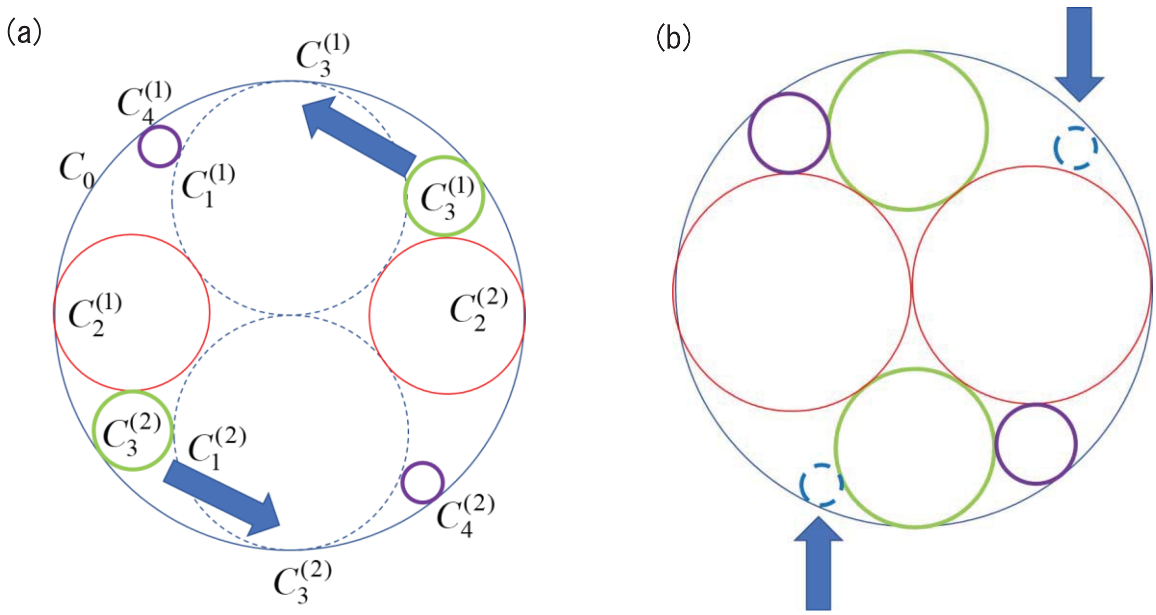


図 6. 養殖池に**鮎**を配置した一例; 成魚を収獲して稚魚を同じ養殖池内で移動させる(a), 仔魚を 2 匹養殖池に入れる(b).

うにステップ状に増大するというのも一つの分かりやすい設定です。養殖池に鮎の縄張りがどれだけ充填できるかという観点からであれば、**図 5** の縦軸の量を注視していくことになりますが、この問題では**図 5** の色付き面積の和を考えていくことになります。例えば、成魚になった時点で収穫をするなどすれば、収穫後３カ月間のスペース有効活用できるようになります。以上を念頭において、養殖池間を移動させずに、養殖池に入れた**鮎**が成長しても同一の個体数が維持できる養殖池を設計した一例を示します(**図 6**)。ここでは、**図 1** で述べた Step を逐次繰り返して、$C_4^{(1)}, C_4^{(2)}$ まで配置しています。この配置は、上述したようにアポロニ

ウスギャスケットを作成する手順と同様ですから、充填率も高いことが期待されます。さて、**図 6a** は仔魚、稚魚、幼魚、成魚をそれぞれ２匹ずつ養殖池に入れた状態です。収獲する２匹の成魚の縄張りを点線で示しています。その間隙に２匹の稚魚を移動させて、３カ月後には**図 6b** のような配置をとります。そこで、２匹の仔魚を養殖池に入れた縄張りを、点線で示しました。以上の繰り返しを行えば、仔魚、稚魚、幼魚、成魚をそれぞれ２匹ずつ有して、（観測時間をうまくとれば、）充填率を 0.7943 に保つことができます。

様々な配置のアポロニウスギャスケットが知られています(図 7)。もっと高い充填率を保つやり方があるかも知れません。是非、考えてみてください。

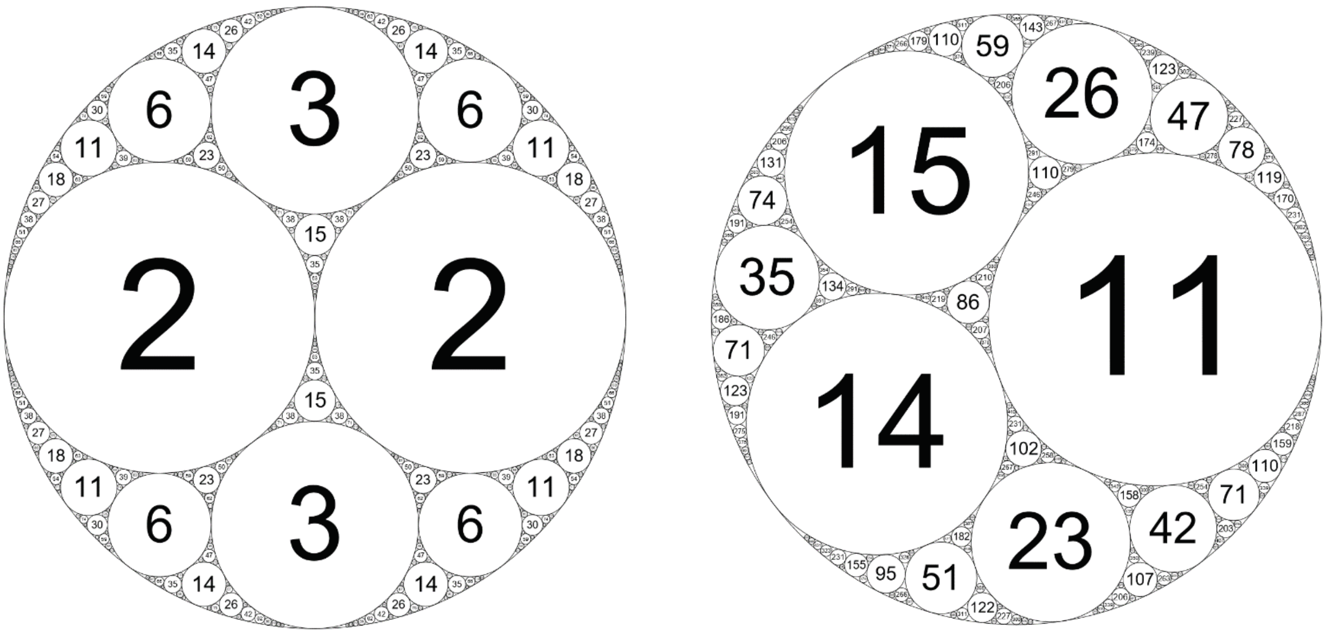


図 7 様々な配置のアポロニウスギャスケット[3]

参考文献

[1] F. Soddy: The Kiss Precise. *Nature* **137** (3477): 1021, Jun 1936. doi:10.1038/1371021a0

[2] A. Okabe, B. Bootsand, K. Sugihara: Spatial Tessellations – Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. John Wiley and Sons, 1992.

[3] R. L. Graham, J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks, C. H. Yan: Apollonian Circle Packings: Number Theory. *J. Number Theory* **100**, 1-45, 2003.

問題５.「立方体倍積問題の近似解」

与えられた立方体の丁度 2 倍の体積を持つ立方体を定規とコンパスだけを用いて作図せよ，という「立方体倍積問題」は，解がない問題として知られています. つまり，与えられた長さに対して，その $\sqrt[3]{2}$ 倍の長さを定規とコンパスだけを用いて作図することは不可能なことが証明されているのです. しかし，一定の操作を繰り返すことによって求めたい $\sqrt[3]{2}$ 倍の長さにいくらでも近い長さを求める（作図する）ことはできます. それを考えていきましょう.

(1) 小手調べに $\frac{1}{9} = 0.1111\cdots$ という式を考えましょう. まず $x = 0.1$ から始めて $X = 0.1(x+1)$ という操作を繰り返すと $0.11,\ 0.111,\ 0.1111,\ \cdots$ という数列が出来ますが，回数を繰り返すうちにその値は殆ど変わらなくなります. その値を a とすると $a = 0.1(a+1)$ が成り立ち, これを解いて $a = \frac{1}{9}$ が結論されるわけです.

(2) 次に $x = 2$ から始めて $X = 2 + \frac{1}{x}$ という操作を繰り返しましょう. このとき

$$2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\cdots$$

という数列が得られます. (1) と同様，回数を繰り返すうちに値が殆ど変わらなくなることが確かめられて，その値を a とすると $a = 2 + \frac{1}{a}$ かつ $a > 0$ から, $a = \sqrt{2}+1$ が得られます. つまり

$$\sqrt{2}+1 = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

であり，これから $\sqrt{2}$ の連分数表示

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

が得られました.

操作 $X = 2+\frac{1}{x}$ は次のように作図できます. 直線 ℓ をとり, ℓ からの距離が 1 の点 O をとります. このとき O から ℓ に下ろした垂線の足を H とすると $OH = 1$ です. 直線 ℓ 上に $AH = 2$ となる点 A をとります.

さて ℓ 上に H からみて A と同じ方向に点 P があるとします. このとき点 O からみて ℓ と同じ側に, O からの距離が PH と等しく ℓ と平行な直線 ℓ' を引きます. 直線 OA と ℓ' の交点を A' とし, ℓ' 上 $A'Q' = 1$ かつ $OA' < OQ'$ となるような点 Q' をとり，直線 OQ' と ℓ の交点を Q とします. <u>このとき $PH = x$ ならば $QH = 2+\frac{1}{x}$ となることを証明してください.</u>これにより, P から Q を作図する操作を繰り返して, $\sqrt{2}+1$ の近似値が（よって $\sqrt{2}$ の近似値も）得られるわけです.

(3) いよいよ $\sqrt[3]{2}$ の近似値を考えましょう．$(x, y) = (3, 3)$ から出発して $X = 3 + \frac{y}{x}$, $Y = 3 + \frac{1}{x}$ という操作を繰り返します．これまでと同様, 操作を繰り返すと値が殆ど変わらなくなることは認めるとして，その値を (a, b) とします．このとき $a = 3 + \frac{b}{a}$ かつ $b = 3 + \frac{1}{a}$ が成り立ちます．このとき $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{a}$ であることを示してください．また, (2) にならって, (x, y) から (X, Y) を作図する方法を考案してください．これが分かれば $\sqrt[3]{2}$ の近似値を作図する方法が得られたことになります．

(4) $\sqrt[3]{3}$ など，他の無理数は (2) や (3) のように表せるか，自由に考えてください．

解答と解説. 問題作成委員会委員　宇沢達（名古屋大学）

伊師英之（名古屋大学）

はじめに，この問題の背景を説明します．実数を整数の列で表す代表的な方法として，無限小数表示と連分数展開があります．よく知られているように，実数 α が有理数である必要十分条件はその無限小数表示が巡回することです．一方，連分数展開が巡回する必要十分条件は, α が二次の無理数（整数係数の二次方程式の解として表される無理数）であることも知られています．なお，有理数は有限の連分数で表されるので，巡回連分数ではありません．これらのことを踏まえて，1848 年にエルミートはヤコビに次のような質問を手紙で送りました（エルミートもヤコビも超一流の数学者です）:『実数を整数列で表す表示法で，三次の無理数が巡回数列で表されるような実数の表示法はあるだろうか？』ここで三次の無理数とは整数係数の三次方程式の解であって，整数係数の二次以下の方程式の解にはならない数のことを意味します．同様にして n 次の無理数という概念も定義でき，当然それに対してエルミートの問題も一般化できます．一般に α を三次の無理数とすると, 与えられた長さの α 倍を定規とコンパスを用いて作図することは出来ません（方程式論の応用として，大学の数学科で学びます）．三次の無理数の典型例が $\sqrt[3]{2}$ で, 本問題の中で述べられているように，その作図不可能性はよく知られています．

自然数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ から定まる連分数

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

は, 関数 $f_k(x) = a_k + \frac{1}{x}$ の合成 $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \cdots$ を用いて捉えることが出来ます．とくに $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の巡回数列で表される連分数は合成関数 $f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ に関する方程式 $f(x) = x$ の解です．なお 1 次分数変換と行列の対応を用いると,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき $f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ が分かります．ここで A,B,C,D は整数なので, $f(x)=x$ の解は二次の無理数となります．

連分数に関する以上の観察に基づき, ヤコビはエルミートの問題への解答として次のようなアイディアを提示しました: 2 つの自然数列 $\{a_1,\, a_2,\, \ldots\}$ と $\{b_1, b_2, \ldots\}$ に対して, 変換 $(X,Y)=f_n(x,y)\quad(n=1,2,\ldots,)$ を

$$X = a_n + \frac{y}{x},\quad Y = b_n + \frac{1}{x}$$

によって定め, $f_1\circ f_2\circ f_3\circ\cdots\circ f_n(1,0)$ の $n\to\infty$ としたときの<u>極限がもし存在すれば</u>, それを (α,β) とする．式で書くと

$$\alpha = a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{1}{a_3+\cfrac{\ddots}{\ddots}}}{a_2 + \cfrac{b_3+\cfrac{1}{\ddots}}{a_3+\cfrac{\ddots}{\ddots}}},\quad \beta = b_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_3+\cfrac{1}{\ddots}}{a_3+\cfrac{\ddots}{\ddots}}}.$$

これを組 (α,β) の二股連分数[1]展開とよびます．数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が巡回するとき, (α,β) は三次（以下）の無理数の組になります．これは $f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_n$ に対応する行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 & 0 \\ b_n & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えることから，連分数の場合と同様の議論によって分かります．逆に α が三次の無理数のときに, 適当な有理数 r をとって $(\alpha, \frac{r}{\alpha})$ が巡回的な二股連分数展開をもつことが 2015 年 (！) にムールによって示されました ([1])．ただし，連分数展開と違って一つの (α,β) が様々な二股連分数展開をもつため，三次の無理数かどうかを二股連分数展開の巡回性で判定したいという意味でのエルミートの問題は未だ解決していません．

以上を踏まえると，本問題は $\{a_n\}=\{3,3,\ldots,\}$, $\{b_n\}=\{3,3,\ldots,\}$ の二股連分数が $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1},\ 2+\sqrt[3]{2})$ であることを確かめるのが本質的な内容です．

それでは，個々の問題を見ていきましょう．まずは $2+\frac{1}{x}$ の作図についてです．問題文にしたがって図を書くと，次の図 1 のようになります．

[1] bifurcating continued fraction の訳（標準的な訳語は定まっていないようです）

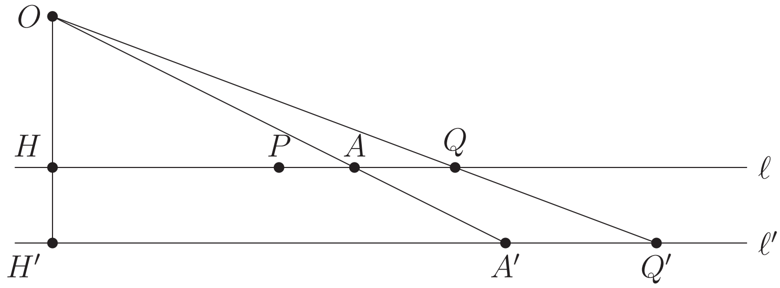


図 1: 何回も利用できる図

ここで O から ℓ' へ下ろした垂線の足を H' とすると, 仮定から $OH' = PH = x$ です．三角形 OAQ と $OA'Q'$ は相似で, その相似比は $1 : x$ となります．とくに $AQ : A'Q' = 1 : x$ で仮定より $A'Q' = 1$ だから $AQ = \frac{1}{x}$ となり, 目標である $QH = AH + AQ = 2 + \frac{1}{x}$ が証明できました.

出題の順番は変わりますが，次に $X = 3 + \frac{y}{x}$ と $Y = 3 + \frac{1}{x}$ の作図方法を与えます．これは図 1 において AH と $A'Q'$ の設定を変更することにより実行できます（$OH = 1, OH' = PH = x$ はそのまま）．つまり $AH = 3, A'Q' = y$ とすれば $AQ = 3 + \frac{y}{x}$ となり, $AH = 3, , A'Q' = 1$ とすれば $AQ = 3 + \frac{1}{x}$ となることが，前述と同様の議論から分かります.

さて, $a = 3 + \frac{b}{a}$ と $b = 3 + \frac{1}{a}$ から $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{a}$ を導く方法はいくつもありますが，その一つを述べます．まず後者を前者に代入して $a = 3 + \frac{1}{a}(3 + \frac{1}{a})$ を得ますが, 両辺を a で割って右辺を整理すると

$$1 = \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^3}$$

となります. ここで $(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$ を思い出すと, 右辺は $1 + \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^3} - 1 = (1 + \frac{1}{a})^3 - 1$ となり, 結局

$$1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right)^3 - 1$$

すなわち

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)^3 = 2$$

となります．あとは両辺の立方根をとれば, 目標の式が得られるわけです.

他の無理数の表し方を自由に考えるという (4) には，多くの人・チームが取り組んでくれました．その解答のいくつかを紹介します．まず実数 $r > 1$ について $X = \frac{1}{r-1}(3 + \frac{y}{x})$，$Y = 3 + \frac{1}{x}$ という操作の繰り返しを考えると, 前述と議論の議論から $(1 + \frac{1}{a})^3 = r$ すなわち $\sqrt[3]{r} = 1 + \frac{1}{a}$ が得られます．ここで r が有理数ならば, 与えられた長さの $\frac{1}{r-1}$ 倍を作図することは容易ですから, 結局 $\sqrt[3]{r}$ の近似値が作図できたことになります．さらに 2 変数ではなく 3 変数の変換

$$X = \frac{1}{r-1}\left(4 + \frac{y}{x}\right), \quad Y = 6 + \frac{z}{x}, \quad Z = 4 + \frac{1}{x}$$

の繰り返しを考えると, その不動点 (a, b, c) は

$$a = \frac{1}{r-1}\Big(4 + \frac{b}{a}\Big), \quad b = 6 + \frac{c}{a}, \quad c = 4 + \frac{1}{a}$$

を満たしますが, 第二, 第三の式を第一の式に代入して a だけの式にすると

$$a = \frac{1}{r-1}\Big(4 + \frac{6}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^3}\Big)$$

となり, 両辺に $\frac{r-1}{a}$ をかけて整理すると

$$r - 1 = \frac{4}{a} + \frac{6}{a^2} + \frac{4}{a^3} + \frac{1}{a^4} = \Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^4 - 1$$

となります. したがって

$$\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^4 = r$$

であり, 4 乗根をとって $\sqrt[4]{r} = 1 + \frac{1}{a}$ が得られます. この議論を m 乗根 $(m \geq 3)$ に一般化するには, 二項定理を踏まえて

$$X_1 = \frac{1}{r-1}\Big({}_nC_1 + \frac{x_2}{x_1}\Big), \quad X_k = {}_mC_k + \frac{x_{k+1}}{x_1}\ (1 < k < m-1), \quad X_{m-1} = {}_mC_{m-1} + \frac{1}{x_1}$$

という $m-1$ 変数の変換を考えればよい. 結論として, その不動点を $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ とすれば $\sqrt[m]{r} = 1 + \frac{1}{a_1}$ が得られます.

多項式の根を求める手続き（アルゴリズムとよばれます）としては、他に Newton 法が知られています. 多項式だけではなく, 一般の関数に対して適用できる方法です. また，多項式, より一般に有理式を繰り返し合成した際にどのようなことが起こるか非常に興味深い問題で，計算機の発達に伴い，様々な実験を通して（もちろん理論的な考察もありますが）複素力学系の理論として盛んに研究されています ([2]).

シニアの団体では, チーム「文系」（鎌倉学園高校），チーム「東海 C」（東海高等学校），チーム「We ♡ Country Ma'am」（東海高等学校）が本質的にはここで書いたような一般的な方法を提案しました．シニア個人では小川純平君（東海高校 1 年）が一般的な立方根についての方法を与えました．中学生以下にとっては三次方程式を扱うこと自体が容易ではなかったと思われますが，それでも多くの人・団体が健闘していました．なかでも森山和君（富山大学附属中学校 3 年）が出題された問題に完全な解答を与えたうえで，$\sqrt[3]{n}$（n は 1 でない自然数）と $\sqrt[4]{2}$ についての方法を与えたことは，特筆に値します．三宅智史君（東海中学校 2 年）も出題された問題を解いたうえで，$\sqrt[3]{3}$ の作図法を与えました．

参考文献

[1] Nadir Murru, "On the periodic writing of cubic irrationals and a generalization of Rédei functions," International Journal of Number Theory **11** (2015), no. 3, pp. 779–799.

[2] Peipei Tang and Xinghua Wang, "An iteration method with generally convergent property for cubic polynomials," International Journal of Bifurcation and Chaos **19** (2009), no. 1, pp. 395–401.

論文賞 (テーマ１)「絶対値の効用」

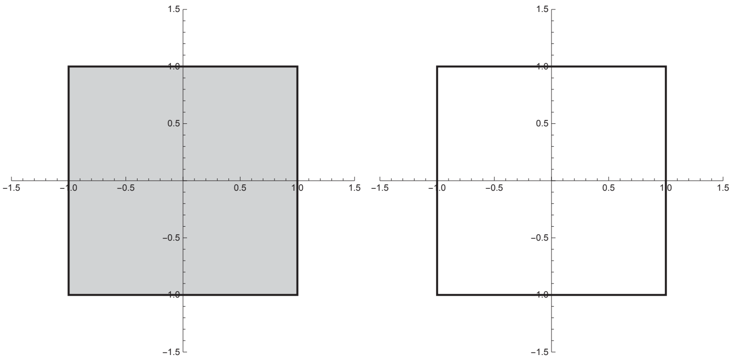
(x, y) 平面において，x と y の一次式と絶対値を組み合わせただけの簡単な等式で多くの図形が表されます．例えば，$|x+y|+|x-y|=2$ は正方形の周を表し，$|x+1|+|x-1|+|y+1|+|y-1|=4$ は正方形の周と内部を表します．正 3 角形や正 5 角形の周や周と内部を表す等式を求めて下さい．また，正多角形とは限らない凸多角形を表す出来るだけ単純な (美しい) 等式を考えて下さい．さらに，正多面体などの 3 次元の凸多面体について，x, y, z の式と絶対値を使って同様の考察をして下さい．

[解説]

鈴木紀明 (名城大学理工学部)

§1．正 3 角形と正 5 角形

まず，問題例にある正方形の場合を図示しておきます．$|x+y|+|x-y|=2$ が右下図で，$|x+1|+|x-1|+|y+1|+|y-1|=4$ が左下図になります．



この問題に対する提出論文は 4 編のみでした．出題者としては少し寂しい感じですが，正方形の場合に比して，正 3 角形や正 5 角形がそれほど簡単ではないことが原因かもしれません．これらの解答例から始めます．

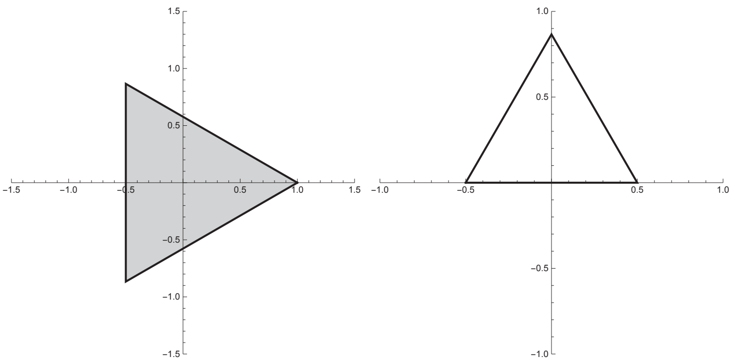
[正 3 角形の場合]

(1.1) 頂点 $(1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ の正三角形の周と内部は次式で表される：

$$|x+\sqrt{3}y-1|+|2x+1|+|x-\sqrt{3}y-1|=3$$

(1.2) 頂点 $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ の正三角形の周は次で表される：

$$\sqrt{3}+2y-2\sqrt{3}|x|-\sqrt{3}\left|-1+2\sqrt{3}y+2|x|\right|=0$$



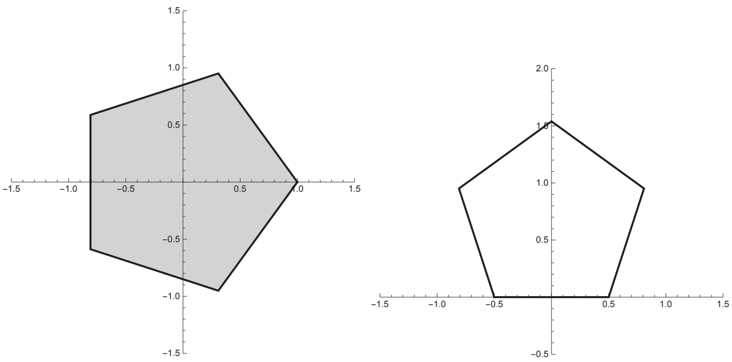
[正 5 角形の場合]

(1.3) 頂点が $(\cos\frac{2\pi k}{n}, \sin\frac{2\pi k}{n})$, $(k=0,1,2,3,4)$ の正 5 角形の周と内部は次で表される：

$$|(\sqrt{5}+1)x+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,y-\sqrt{5}-1|+|(1-\sqrt{5})x+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,y-\sqrt{5}-1|+|4x+\sqrt{5}+1|$$
$$+|(1-\sqrt{5})x-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,y-\sqrt{5}-1|+|(\sqrt{5}+1)x-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,y-\sqrt{5}-1|=5(\sqrt{5}+1)$$

(1.4) 頂点が $(-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0),(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}),(0,\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}),(-\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})$ の正 5 角形の周は次で表される：

$$\sqrt{25+2\sqrt{5}}+2y-2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,|x|-\left|2\sqrt{5}y+\sqrt{5+2\sqrt{5}}(2|x|-1)\right|$$
$$-\left|\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5}y+2\sqrt{25-10\sqrt{5}}\,|x|-(\sqrt{5}-2)\left|2\sqrt{5}y+\sqrt{5+2\sqrt{5}}(2|x|-1)\right|\right|=0$$



これらは随分と複雑ですが，作問をしているときに私が想定していた等式はこれらより遥かに複雑でした．ここで与えている等式は 2 重絶対値 (絶対値の中に絶対値が入った式が現れる) を使って随分と簡潔な形になっています．2 重や 3 重の絶対値が現れるカラクリについては §4 で説明します[1]．

[1](1.2) と (1.4) を含めた §4 の内容は愛知工業大学の中村豪先生に教えて頂きました．これ以外にも，§3 の図の作成など多くの点で助けて頂きました．今回の解説原稿は中村先生のご協力なしでは完成できませんでした．改めて感謝申し上げます．

§2. 提出論文

提出された 4 つの論文の要点を述べます.

[1] 宮澤秀隆さん (広島市立翠町中学 3 年) は，頂点が $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -2), (0,2)$, $(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -2)$ である正 3 角形の周と内部は

$$|y+\sqrt{3}x-2|+|y-\sqrt{3}x-2|+2|y+2|=8 \tag{2.1}$$

と表され，周は

$$\left|y+|\frac{\sqrt{3}}{2}x|\right|+|\frac{\sqrt{3}}{2}x|=2 \tag{2.2}$$

と表されることを示しました. (2.2) は (1.2) より簡潔ですね.

[2] 太田彩香さん (名古屋国際高校 2 年) は，頂点が $(1,0), (0,\sqrt{3}), (-1,0)$ である正 3 角形の周と内部は

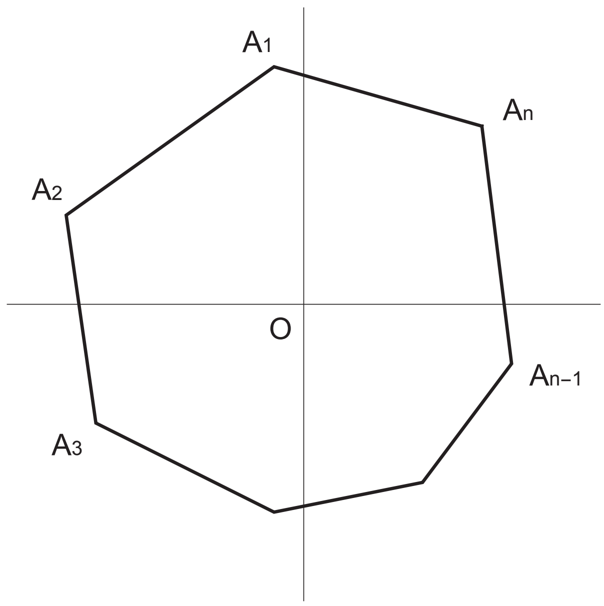
$$|\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}|+|\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}|+|y|=2\sqrt{3}-y \tag{2.3}$$

と表され，周は

$$\left|\sqrt{3}|x|+2y-\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}|x|=\sqrt{3} \tag{2.4}$$

と表されることを示しました. 太田さんはより一般の 3 角形についても言及しています.

他の 2 つの応募論文は一般の凸多角形を取り扱っています. 以後で用いる記号をはっきりさせます. 凸 n 角形の頂点を (反時計回りに) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とします. 多角形は原点を内部に含むとします (含まない場合は適当に平行移動すればよい).



3

$A_k=(a_k,b_k)$, $(k=1,2,\cdots,n)$ とする．点 A_k, A_{k+1} を通る直線 (ただし，$A_{n+1}=A_1$) は

$$\ell_k(x,y) := (b_{k+1}-b_k)x-(a_{k+1}-a_k)y-a_kb_{k+1}+a_{k+1}b_k \tag{2.5}$$

とすると

$$\ell_k(x,y)=0 \tag{2.6}$$

で与えられます．また，直線 $\ell_k(x,y)=0$ で二つに分けられた半平面のうちの原点を含むものを H_k と表します．H_k は境界 $(\ell_k(x,y)=0)$ も含みます．すなわち，

$$\begin{cases} \ell_k(0,0)<0 \text{ ならば } H_k := \{(x,y);\ \ell_k(x,y)\leqq 0\} \\ \ell_k(0,0)>0 \text{ ならば } H_k := \{(x,y);\ \ell_k(x,y)\geqq 0\} \end{cases} \tag{2.7}$$

[**3**] 川添裕功さんと楢原晃都さん (久留米工業高専3年) は，点 $X=(x,y)$ が凸 n 角形の境界と内部に含まれる必要かつ十分条件は

$$\sum_{k=1}^{n}[3\text{ 角形 } A_kA_{k+1}X \text{ の面積}] = \text{凸 } n \text{ 角形の面積} \tag{2.8}$$

であることを見つけました (素晴らしい！)．(2.8) を等式で表すと，3 角形 $A_kA_{k+1}X$ の面積 $=|\ell_k(x,y)|/2$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}|\ell_k(x,y)| = 2(\text{凸 } n \text{ 角形の面積}) \left(=\sum_{k=1}^{n}|\ell_k(0,0)|\right) \tag{2.9}$$

となり，(2.9) は凸 n 角形の周と内部を表すことがわかります．さらに，川添さんと楢原さんは (少し余分な記述もありますが)，

$$\text{凸 } n \text{ 角形の周と内部} = \bigcap_{k=1}^{n} H_k \tag{2.10}$$

を使って (2.9) と同等な等式を得ています．また

$$\text{凸 } n \text{ 角形の周} = \text{凸 } n \text{ 角形の周と内部} \ \cap\ \text{ある直線 } \ell_k(x,y)=0 \text{ の上の点}$$

であること，すなわち，

$$\text{凸 } n \text{ 角形の周} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} H_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{n}\{(x,y);\ell_k(x,y)=0\}\right) \tag{2.11}$$

となり，これを等式で表すと，凸 n 角形の周は

$$\sum_{k=1}^{n}|\ell_k(x,y)| + \prod_{k=1}^{n}|\ell_k(x,y)| = \sum_{k=1}^{n}|\ell_k(0,0)| \tag{2.12}$$

で表されます．これは正しい議論ですが，難点は式が非常に複雑になっていることです．川添さんと楢原さんは正 $2n$ 角形の表示や 3 次元の多面体について言及していますがここでは省略します．

[4] 星野泰佑さん (東海高校 2 年) の論文は極めて自然に書かれています．彼のアイディアは，絶対値を使うと，右半平面 $\{(x,y); x \geq 0\}$ が $|x| - x = 0$ と表され， 線分 $[0,1] = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$ は $|x| + |x-1| - 1 = 0$ と表すことができることが出発点です．適当な線形変換で右半平面を (2.7) の半平面 H_k に移すことにより，(2.10) から，凸 n 角形の内部と周は

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|\ell_k(x,y)| - \frac{|\ell_k(0,0)|}{\ell_k(0,0)} \ell_k(x,y) \right) = 0 \tag{2.13}$$

と表されること示しました．これは (2.9) より少し複雑ですが，次の周のみを表す等式は (2.12) より簡潔です．線分 $[0,1]$ に適当な線形変換をすることにより，

$$f_k(x,y) := |\ell_k(x,y)| + |x - a_k| + |x - a_{k+1}| + |y - b_k| + |y - b_{k+1}| - |a_k - a_{k+1}| - |b_k - b_{k+1}|$$

と置くと，線分 $A_k A_{k+1}$ が $f_k(x,y) = 0$ と表されることを示し[2]，これから凸 n 角形の周は

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(x,y) = 0 \tag{2.14}$$

と表示できることを示しました．あえて難点を言えば，(2.14) の左辺は 1 次式ではないことです．星野さんは 正 $2n$ 角形の場合は「その外接円の直径となるような対角線が n 本あり，正 $2n$ 角形の周上にある点はこれらの直線との距離の和が等しい」ことに注目して，正 $2n$ 角形の周が 1 次式と絶対値を使って

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x \cos\frac{k\pi}{n} - y \sin\frac{k\pi}{n} \right| = \text{定数} \tag{2.15}$$

と表されることを示しました．

§3. 感想

冒頭にも書きましたが，応募が少なかったのは残念です．適当に絶対値を使った式を計算機に入れて描写させ，面白い具体例を見つける作業をして欲しいと思って出題しました．例えば

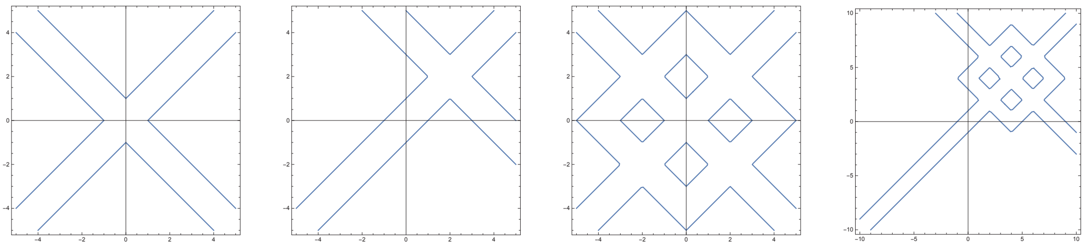
(1) $-1 + \big||x| - |y|\big| = 0.$
(2) $-1 + \big||-2+x| - |-2+y|\big| = 0.$
(3) $-1 + \Big|\big|-2+|x|\big| - \big|-2+|y|\big|\Big| = 0.$

[2] $f_k(x,y) = 0$ なら $\ell_k(x,y) = 0$ かつ $|x - a_k| + |x - a_{k+1}| = |a_k - a_{k+1}|$ かつ $|y - b_k| + |y - b_{k+1}| = |b_k - b_{k+1}|$ が成り立っている．後半の 2 式から x は a_k と a_{k+1} の間にあり，y は b_k と b_{k+1} の間にある．

(4) $-1+\Big|\big|-2+|-4+x|\big|-\big|-2+|-4+y|\big|\Big|=0.$

は以下のような図形になります.

(1) (2) (3) (4)



さらに,

(5) $-1+\Big|\Big|-2+\big|-4+|x|\big|\Big|-\Big|-2+\big|-4+|y|\big|\Big|\Big|=0.$

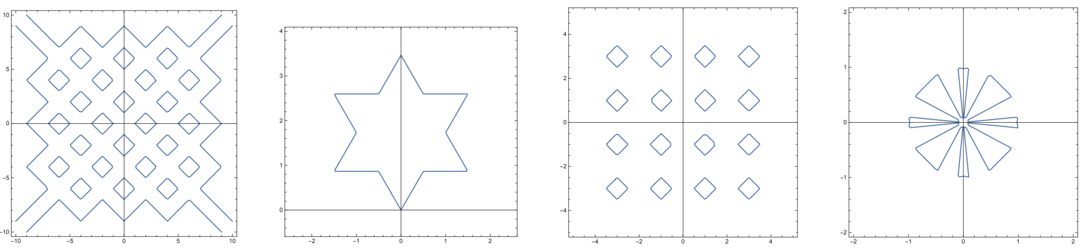
(6) $4\sqrt{3}-\sqrt{3}|x|-3|\sqrt{3}-y|-\big|\sqrt{3}|x|-|\sqrt{3}-y|\big|-\sqrt{3}\Big||x|+\sqrt{3}\left(|\sqrt{3}-y|-\big|\sqrt{3}|x|-|\sqrt{3}-y|\big|\right)\Big|=0$

(7) $-1/2+\Big|-1+\big|-2+|x|\big|\Big|+\Big|-1+\big|-2+|y|\big|\Big|=0$

(8) $\Big|\Big|\big||x|-|y|\big|\cos\frac{5\pi}{32}-(|x|+|y|)\sin\frac{5\pi}{32}\Big|\cos\frac{9\pi}{64}+\sin\frac{9\pi}{64}\left(|x|\cos\frac{5\pi}{32}+|y|\cos\frac{5\pi}{32}+\big||x|-|y|\big|\sin\frac{5\pi}{32}\right)-\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{64}\Big|\cos\frac{13\pi}{64}$
$+\Big(|x|\cos\frac{9\pi}{64}\cos\frac{5\pi}{32}+|y|\cos\frac{9\pi}{64}\cos\frac{5\pi}{32}-\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{64}-\Big|\big||x|-|y|\big|\cos\frac{5\pi}{32}-(|x|+|y|)\sin\frac{5\pi}{32}\Big|+\big||x|-|y|\big|\cos\frac{9\pi}{64}\sin\frac{5\pi}{32}\Big)\sin\frac{13\pi}{64}$
$=0$

は以下のような図形になります.

(5) (6) (7) (8)



論文 [3], [4] のように，一般論を展開することは力がないとできないことでとても素晴らしいことです．一方，面白い具体例を見つけることはそれに劣らず重要です．正 3 角形を取り扱った論文 [1], [2] では 2 重の絶対値が現れていますが，一般論では 2 重の絶対値は出てきません．私が応募論文を見て真に驚いたのは (2.8), (2.14), (2.15) と (2.2) ですが，次節の内容にも驚きました．

§4. アートな方法[3]

(1.2) や (1.4) は 2 重絶対値を使うことで表現式が簡潔になっています．中村先生 (愛工大) は，直線 $y=0$ から出発して，絶対値, 回転, 平行移動を用いて正多角形の周を表

[3]“アートな方法” は中村先生の命名です．私は「職人芸」を少し謙遜した意味かと思っていましたが，実は，絶対値 (Absolute value)，回転 (Rotation), 平行移動 (Translation) を使った アート (ART) な方法だそうです．

6

す方法を見つけ，これによって，2重，3重の絶対値がどのようにして入り込んで来るかを説明しました．

定義 2変数関数 $f(x,y)$ に対して3種類の変換を定義する．

(4.1) $Af(x,y) := f(|x|,y)$

(4.2) $R_\theta f(x,y) := f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$

(4.3) $T_{p,q}f(x,y) := f(x-p, y-q)$

特に $T_\theta := T_{\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2}}$, $T := T_{\frac{1}{2},0}$ とする．

$f(x,y)$ が x,y の1次式のとき，上記の変換で絶対値を含む1次式になります．よって，これらの変換を何回行っても結果は絶対値を含む1次式であることを注意します．

定理 $\theta := (n-2)\pi/n$, $\varphi := \pi/n$, $f(x,y) = y$ とおく．正 n 角形の周を表す方程式は次で与えられる．

$n = 2m+1$: 奇数のとき

$$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)^{m-1}R_\varphi TA\,f(x,y) = 0. \tag{4.4}$$

$n = 2m$: 偶数のとき

$$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)^{m-1}\,f(x,y) = 0. \tag{4.5}$$

ここで，$(R_{2\varphi}T_\theta A)^{m-1}$ において不要な A もありますが，式の形を整えるために入れてあります．基本的には A が現れる度に絶対値記号が入る込むことになりますが，前述の理由で，A が k 回使われても k 重の絶対値が必ず現れるとは限りません．

幾つかの例

$n = 3,5,6,7,8$ について定理の与える式を具体的に求めてみます．

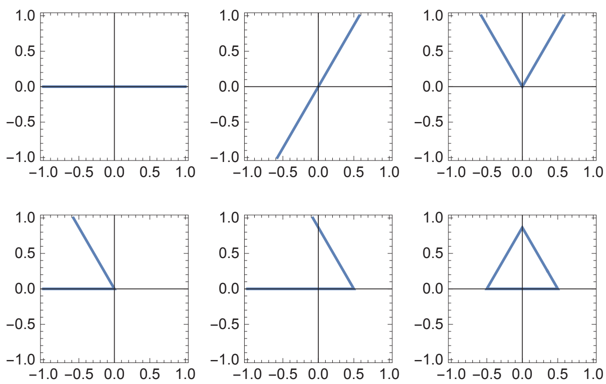
例 4.1 [**正 3 角形**] $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/3$, $f(x,y) = y$ とすると正3角形は

$$R_\varphi AR_\varphi TA\,f(x,y) = 0 \tag{4.6}$$

で与えられます．これを数式に直して整理すると (1.2) である

$$\sqrt{3} + 2y - 2\sqrt{3}|x| - \sqrt{3}\left|-1 + 2\sqrt{3}y + 2|x|\right| = 0.$$

を得ます．(4.6) の “アート” が下図です．



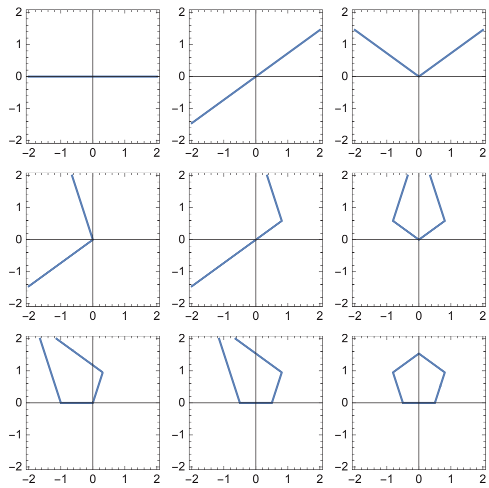
7

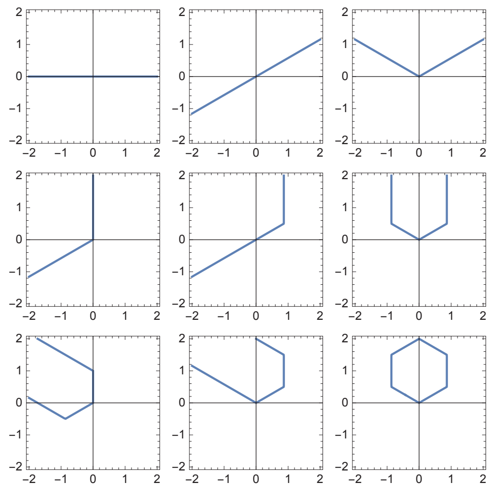
説明を加えます．なお，(4.6) の変換は左側から順に施されていると理解下さい．上段の左図が $y=0$ のグラフです．上段中央はこれを $\pi/3$ 回転しました．変換を使えば R_φ を施したことになります．次は A です．ここで絶対値が登場します．変換 A は左半平面を右半平面の線対称形にすることと理解すると分かり易いと思います．実際に行ったものが上段右図です．下段左図は $\pi/3$ の回転である R_φ の変換です．下段中央は x 方向に $1/2$ の平行移動で，変換 T を使いました．最後に変換 A を行うと正 3 角形になります．ここでも絶対値が現れます．直線に絶対値，回転，平行移動を幾つか施して正 3 角形を作ってしまうことが "アート" です．

例 4.2 [**正 5 角形**] $\theta=3\pi/5,\ \varphi=\pi/5,\ f(x,y)=y$ とすると，

(4.7) $$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)R_\varphi TA\,f(x,y)=0$$

で与えられる．これを数式にしたものが (1.4) です．"アート" は下左図です (下右図は正 6 角形の場合です)．





例 4.3 [**正 6 角形**] $\theta=2\pi/3,\ \varphi=\pi/6,\ f(x,y)=y$ とすると，正 6 角形の周は

(4.8) $$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)^2\,f(x,y)=0$$

で与えられる．A が 3 回現れて，これを数式に直すと

$$3\sqrt{3}+\sqrt{3}y-3|x|-3\left|\sqrt{3}(-1+y)+|x|\right|-\left|\sqrt{3}(-1+y)-3|x|+\left|\sqrt{3}(-1+y)+|x|\right|\right|=0$$

となり，3 重の絶対値が含まれています．偶数の正多角形は対称性があって比較的簡単な表現式です．

例 4.4 [**正 7 角形**] $\theta=5\pi/7,\ \varphi=\pi/7,\ f(x,y)=y$ とすると，定理より，正 7 角形は $R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)^2R_\varphi TA\,f(x,y)=0$ で与えられますが，

(4.9) $$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)(R_{2\varphi}T_\theta)R_\varphi TA\,f(x,y)=0$$

8

と A を一つ省略した形でも表されます．(4.9) では A が 3 回出てきますが，これを数式で書くと

$$\left|\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{14}-|x|\cos\frac{\pi}{14}+y\sin\frac{\pi}{14}+\left(\left||x|\sin\frac{\pi}{14}+y\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{14}\right|-\cos\frac{\pi}{7}\right)\tan\frac{3\pi}{14}\right|\tan\frac{\pi}{7}$$
$$-\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{14}-|x|\cos\frac{\pi}{14}+y\sin\frac{\pi}{14}\right)\tan\frac{3\pi}{14}+\left||x|\sin\frac{\pi}{14}+y\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{14}\right|-\cos\frac{\pi}{7}=0$$

となりこの場合も 3 重の絶対値が現れます．

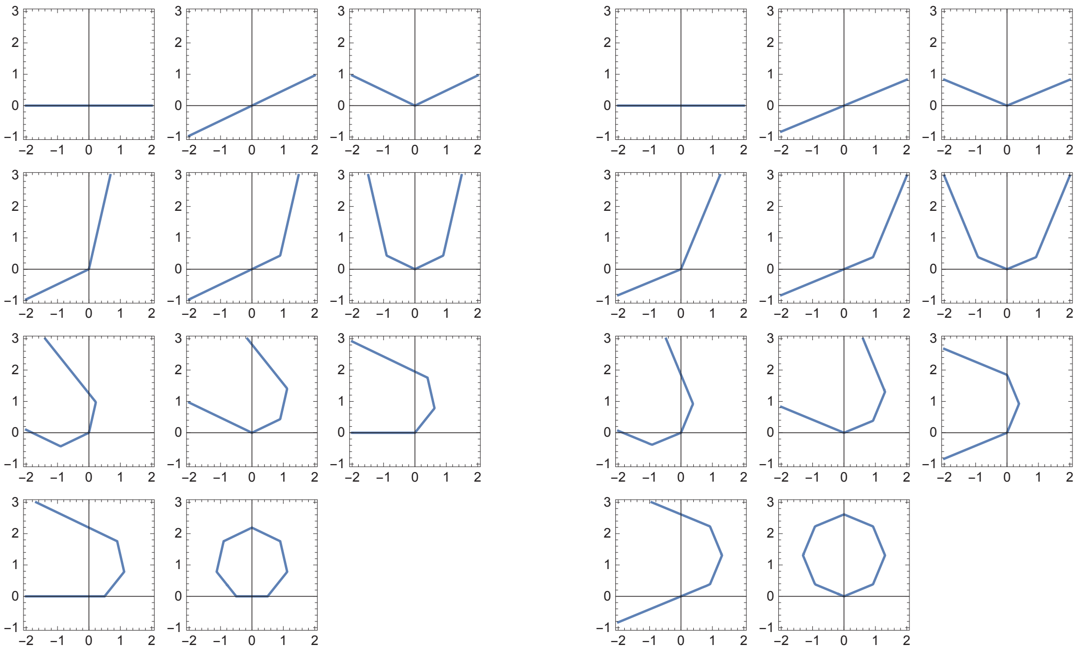
例 4.5 [**正 8 角形**] $\theta=3\pi/4,\varphi=\pi/8, f(x,y)=y$ とすると，定理より，$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)^3 f(x,y)=0$ ですが，ここでも A を一つ省略した形でも与えられる：

$$R_\varphi A(R_{2\varphi}T_\theta A)(R_{2\varphi}T_\theta)(R_{2\varphi}T_\theta A)\, f(x,y)=0 \tag{4.10}$$

これを数式で表すと

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1)\left(|x|+\left|\sqrt{1+1/\sqrt{2}}-y\right|\right)-\left||x|-\left|\sqrt{1+1/\sqrt{2}}-y\right|\right|=0$$

であり，比較的簡単な式です．それぞれのアートな図は下記になります．



テーマ３.「自由課題」

解説.　　　　　　　　　日本数学コンクール実行委員会委員　宇沢達（名古屋大学）
伊師英之（名古屋大学）

論文賞金賞を受賞した兒玉太陽君（海陽中等教育学校５年）の論文「初等幾何的解法の存在する角度の問題」は，和問題なる幾何学的問題を導入し，ラングレーの問題をはじめとする「角度を求める問題」が和問題に帰着することを示す一方，この和問題が有理数を解とするときには正多角形を組み合わせて初等幾何的に解けることを示しました．結果の定式化の興味深さもさることながら，抽象代数学を道具として用いる鮮やかな議論は非常に高く評価されました．

論文賞銀賞を受賞した佐藤ふたばさん（千葉県立船橋高校３年）の論文「ブレスレットモデルを用いたルカ数列の拡張」は，ルカ数列 $\{L_n\}$ が n 連１重ブレスレット の組み合わせ数という意味付けをもつことを踏まえて，m 重 n 連ブレスレットの組み合わせ数として二重数列 $\{l_n^{(m)}\}$ を定義し, その性質を徹底的に研究しました．この $l_n^{(m)}$ の計算は一般には複雑で困難ですが，様々な場合に漸化式を導出して計算したり，合同式を証明するといった結果を得ています．卓越した計算力は，まさに特筆すべきものです．

論文賞銅賞を受賞した大野敦士君，三上奈桜さん，井端千尋さん（いずれも岐阜県立恵那高校３年）の論文「ベイズ統計学によるポーカーの必勝法」は，単純化したポーカーゲームの最善の戦略を，ベイズ統計の観点から探求しています．その発想は興味深く，シミュレーションを実行して検証したことも評価できます．櫻田恭佑君（英明高校３年）の論文「余次元から見た中線定理の拡張とその背景にある恒等式について」は，四面体について「中線定理の面積版」の定理を発見し，証明しました．定理の主張そのものの美しさと，証明の代数的な美しさの両面で素晴らしいものです．新井一希君（名古屋大学附属高校３年）の論文「階差展開とその応用」では，数列の k 階階差について議論を展開し，数列の和の公式や微積分への応用を探求しました．既存の研究との関連を調査することで，さらに深い結果が得られることが期待できます．久島明洋君（穎明館高校２年）の論文「高校数学範囲内での線形 m 項間漸化式の研究」は，線形 m 項間漸化式の一般項を，特性方程式の根を用いて表す方法を提示しました．敢えて行列を用いずに，タフな計算力を駆使して結果を得たわけですが，今後は行列を用いて得られた結果と比較することで新しい知見を得ることも考えられます．横山怜君，内田淳也君，上西翔君（いずれも京都府立南陽高校３年）の論文「軽重不明の偽物を扱う天秤問題 — コイン枚数の上限を与える一般式の導出」は，有名な「１２枚のコインの問題」に代表される偽コインの判別問題について，n 回の天秤の使用で必ず偽物が判別できるコインの枚数の上限が $\frac{3^n-1}{2}$ であることを証明しました．結果は知られていることですが，丁寧に証明を記述したことが評価できます．

論文賞ジュニア部門銅賞を受賞した飾和真君（松阪市立殿町中学２年）の論文「グラフ描写アプリ「Desmos」で見られる数学の美」は，極座標の方程式 $r = \sin 828\theta$ で表される曲線をコンピュータで描くと，数学的に想定されるものとは異なっている現象を報告し，その原因を探っています．その着眼点も，プログラムの癖を予想しながら進めていく議論も非常に面白いものでした．同じく銅賞を受賞した服部圭太君（Axis International School ５年）の論文「フィボナッチ数列と指数に関するとある性質とその拡張」では，フィボナッチ数列およびトリボナッチ数列と等比数列 $\{2^n\}$ との関係を発見し，定理として証明しました．定理を予想し，証明するというプロセスがしっかり書かれています．このようにして，今後も新しい定理を次々に見つけることが大いに期待できます．

今年の論文賞ジュニア部門には，佐賀県武雄市の小中学校から多数の応募がありました．算数・数学に関連する話題でそれぞれが興味を持ったものを上手にまとめたものが多く，なかでも多久島真乃介君（武雄市立山内中学校２年）の論文「効率的な手順を，有効に使うために」は，野球の効率良い練習メニューを立てるという目標のもと，組み合わせや確率といった様々な数学の応用を書籍を参考にして多面的に見事にまとめています．今後は『調べる』から『自分で考える（計算する）』に一歩進むことで，さらなる問題解決力が養われることを期待します．

4. 受賞者一覧

第29回日本数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大賞（2名）

SS-4	岡林　生夫	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	3,4,5
SS-5	浅沼　英樹	愛知県	東海高等学校	高2	1,3

優秀賞（5名）

SS-1	増田　和俊	愛知県	愛知県立旭丘高等学校	高2	4,5
SS-8	久保　友悟	愛知県	名古屋市立工芸高等学校	高2	5
SS-27	小川　純平	愛知県	愛知県立明和高等学校	高1	5
SS-28	山神　敦弥	愛知県	愛知県立明和高等学校	高1	3
HSS-1	津本　歩雅	奈良県	智辯学園高等学校	高2	3

優良賞（3名）

SS-2	中村　佑匡	静岡県	静岡県立浜松北高等学校	高3	3
SS-40	川島　玲	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	1,3
TSS-3	南　奎佑	三重県	三重県立桑名高等学校	高1	1,3

奨励賞（7名）

SS-10	中川　倫太郎	愛知県	愛知県立旭丘高等学校	高1	1
SS-23	木谷　康希	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	3
SS-26	鈴木　果奈	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	4
SS-30	正光　紘大	愛知県	愛知県立明和高等学校	高1	1
OSS-1	後藤　颯汰	奈良県	東大寺学園高等学校	高2	1,3
OSS-2	高橋　志門	大阪府	向陽台高等学校	高1	1
OSS-3	眞弓　颯杜	大阪府	大阪府立大手前高等学校	高1	3

＊問題　1. 畳の敷き方　2. 靴ひもの結び方　3. 返品保証の有効活用
4. 鮎の養殖池　5. 立方体倍積問題の近似解

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第29回日本数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞(2組)

SG-16	東海C	渡口　雄太	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	1
		塩野　尚	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	
		石川　竜聖	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	
SG-17	We ♡ Country Ma'am	渡辺　空一翔	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	5
		中根　敦久	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	
		柳　健大	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	
		田中　梨太郎	愛知県	東海学園　東海高等学校	高1	

優秀賞(4組)

SG-4	文系	近藤　毅樹	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高2	5
		佐々木　慎太朗	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高2	
		広瀬　悟大	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高2	
		川久　保隼	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高2	
SG-15	Labyrinth	坂口　晴紀	岐阜県	多治見西高等学校	高2	4
		星野　響希	岐阜県	多治見西高等学校	高2	
		川瀬　里緒	岐阜県	多治見西高等学校	高2	
		根﨑　由衣	岐阜県	多治見西高等学校	高2	
SG-20	大狂乱の数狂たち	原田　丈司	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	3,4,5
		林　永幸	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	
		八尾　駿輝	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	
		杉井　秀伍	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	
SG-22	岐阜高校B	岡野　恵大	岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校	高1	2,3,5
		川瀬　広大	岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校	高1	
		大村　陸	岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校	高1	
		北野　鵬志	岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校	高1	

優良賞(6組)

SG-9	微分・積分・いい気分	千葉　将太郎	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	5
		冨田　空人	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	
		近藤　健太	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	
		坂本　結香	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	
SG-14	コスモポリタンズ	栗山　太一	愛知県	愛知県立瑞陵高等学校	高2	3
		橋場　奏	愛知県	愛知県立瑞陵高等学校	高2	
		平山　諒次	愛知県	愛知県立瑞陵高等学校	高2	
SG-18	槍壱	西山　拓希	愛知県	愛知県立一宮高等学校	高2	1,4
		吉岡　和志	愛知県	愛知県立一宮高等学校	高2	
		伊藤　広恭	愛知県	愛知県立一宮高等学校	高2	
		小澤　聖希	愛知県	愛知県立一宮高等学校	高1	
SG-25	積分群　～数は友を呼ぶ～	丹羽　駿輔	愛知県	滝高等学校	高2	5
		柳井　一希	愛知県	滝高等学校	高2	
		木村　文彦	愛知県	滝高等学校	高2	
OSG-2	Team 正方形	森本　拓実	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	3,4
		友澤　拓未	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
		窪田　大喜	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
		髙市　康平	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
TSG-4	ヤモリ	平田　一真	三重県	暁学園　暁中学校高等学校	高2	5
		木村　優奈	三重県	暁学園　暁中学校高等学校	高2	
		小山　尚貴	三重県	暁学園　暁中学校高等学校	高2	
		千種　優斗	三重県	暁学園　暁中学校高等学校	高2	

奨励賞（8組）

HSG-1	智辯学園	岡本 卓巳	奈良県	智辯学園高等学校	高3	1
		三船 裕輝	奈良県	智辯学園高等学校	高3	
SG-7	jishukan β	吉田 裕登	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高1	1
		菊地 遥生	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高1	
		河合 永登	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高1	
		布藤 希海	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高1	
OSG-1	Team ヒシガタ	中本 太一	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	1
		杉浦 凌介	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
		小野 快斗	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
		山﨑 脩生	愛媛県	愛媛県立松山南高等学校	高2	
SG-19	栃木高校	近藤 貴大	栃木県	栃木県立栃木高等学校	高2	1
		大橋 亮介	栃木県	栃木県立栃木高等学校	高2	
		黒田 裕太	栃木県	栃木県立栃木高等学校	高1	
		多田 圭吾	栃木県	栃木県立栃木高等学校	高2	
TSG-6	四ツ五	大西 輝	三重県	三重県立津高等学校	高2	1
		小島 颯斗	三重県	三重県立津高等学校	高1	
		石河 圭太	三重県	三重県立津高等学校	高1	
		中川 美咲	三重県	三重県立津高等学校	高1	
SG-12	学校のすみっこぐらし	伊藤 維胤	愛知県	名古屋大学教育学部附属高等学校	高2	3
		幸村 宗和	愛知県	名古屋大学教育学部附属高等学校	高2	
		下田 多陽地	愛知県	名古屋大学教育学部附属高等学校	高2	
TSG-8	野生の馬	杉本 雄基	三重県	鈴鹿高等学校（6年制）	高2	3
		樋口 友菜	三重県	鈴鹿高等学校（6年制）	高2	
		松室 輝	三重県	鈴鹿高等学校（6年制）	高2	
		高橋 拓矢	三重県	鈴鹿高等学校（6年制）	高2	
FSG-3	ニシマル	池村 泉美	福井県	北陸高等学校	高1	3
		高山 京佳	福井県	北陸高等学校	高1	
		田中 里桜	福井県	北陸高等学校	高1	
		寺崎 晴華	福井県	北陸高等学校	高1	

＊問題　１．畳の敷き方　２．靴ひもの結び方　３．返品保証の有効活用
４．鮎の養殖池　５．立方体倍積問題の近似解

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第22回日本ジュニア数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大　賞(1名)

JS-27	三宅　智史	愛知県	東海中学校	中2	1,5

優秀賞(3名)

JS-6	飯田 奈那	東京都	白百合学園中学校	中3	1,4
OJS-2	猪倉 彼方	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	3,4,5
FJS-1	森山　和	富山県	富山大学人間発達科学部附属中学校	中3	2,4,5

優良賞(4名)

JS-10	井上　聡士	愛知県	名古屋市立神丘中学校	中3	1,3,5
JS-13	廣瀬　大也	岐阜県	岐阜東中学校	中3	3
JS-18	蜂矢　倫久	兵庫県	灘中学校	中2	1
JS-25	横山　玄英	愛知県	東海中学校	中2	5

奨励賞(2名)

JS-14	藤谷　崚介	岐阜県	岐阜市立岩野田中学校	中3	1
JS-26	栗林　和輝	愛知県	東海中学校	中2	3

＊問題　1．畳の敷き方　2．靴ひもの結び方　3．返品保証の有効活用
4．鮎の養殖池　5．立方体倍積問題の近似解

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第22回日本ジュニア数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞（1組）

JG-28	筑駒創造てるてる	津田　遼人	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	1,2,4,5
		齋藤　信輝	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
		秋吉　悠希	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	

優秀賞（3組）

JG-7	TKハンド	上嶋　凌央	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	1,4,5
		松木　悠大郎	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
		佐藤　拓海	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
		土肥　巧弥	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
JG-27	筑駒挑戦きんきん	石堀　朝陽	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	1,4,5
		中村　恒介	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
		加藤　弘之	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
JG-29	筑駒貢献こたこた	床呂　光太	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	3
		片山　皓太	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	
		竹内　紘	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	

優良賞（3組）

JG-6	unknowns	小川　健斗	愛知県	一宮市立大和中学校	中3	3,4,5
		木村　天春	愛知県	一宮市立大和中学校	中3	
		石原　諒祐	愛知県	一宮市立大和中学校	中3	
		稲垣　宗矩	愛知県	一宮市立大和中学校	中3	
TJG-2	UE-I☆	枚本　菜緒	三重県	高田中学校	中3	2,5
		宮口　紗良	三重県	高田中学校	中3	
		前川　陽香	三重県	高田中学校	中3	
		飯田　美乃里	三重県	高田中学校	中3	
TJG-15	チームKYO	細野　晴信	三重県	津市立橋北中学校	中3	5
		宮川　太陽	三重県	津市立橋北中学校	中3	
		山際　大輝	三重県	津市立橋北中学校	中3	
		山本　莞太郎	三重県	津市立橋北中学校	中3	

奨励賞（8組）

JG-15	チーム附属中	豊田　凌大	愛知県	愛知教育大学附属岡崎中学校	中3	1
		一澤　瑛	愛知県	愛知教育大学附属岡崎中学校	中3	
		西原　周音	愛知県	愛知教育大学附属岡崎中学校	中3	
		山之内　淳	愛知県	愛知教育大学附属岡崎中学校	中3	
TJG-1	TKD 数研	鈴木　涼真	三重県	高田中学校	中2	1
		井森　啓介	三重県	高田中学校	中2	
		岸野　大輝	三重県	高田中学校	中2	
		山口　真弘	三重県	高田中学校	中2	
TJG-11	チーム高田	木本　茉佑	三重県	高田中学校	中2	1
		亀谷　柊瑠	三重県	高田中学校	中2	
		谷口　広翔	三重県	高田中学校	中2	
		山内　康平	三重県	高田中学校	中2	
JG-40	南中ボーイズ　third	谷口　悠馬	愛知県	豊川市立南部中学校	中3	2
		佐々木　飛翔	愛知県	豊川市立南部中学校	中3	
		中村　哲也	愛知県	豊川市立南部中学校	中3	
JG-5	チームΣ	杢藤　拓真	愛知県	名古屋市立駒方中学校	中1	3
		藤原　彩聖	愛知県	名古屋市立駒方中学校	中1	
JG-12	チームはるまき	植村　春斗	岐阜県	関市立緑ヶ丘中学校	中2	3
		足立　翔琉	岐阜県	関市立緑ヶ丘中学校	中2	
		那須　瑛太	岐阜県	関市立緑ヶ丘中学校	中2	
		古田　桜一朗	岐阜県	関市立緑ヶ丘中学校	中2	
JG-26	ぶらすばんど	柳井　悠依名	三重県	鈴鹿中学校	中3	3
		谷口　千歩	三重県	鈴鹿中学校	中3	
		藤田　歩実	三重県	鈴鹿中学校	中3	
		瀧　彩純	三重県	鈴鹿中学校	中3	
TJG-13	UI大使館	宇井　泰志	三重県	鈴鹿中等教育学校	中2	4
		大萩　玲奈	三重県	鈴鹿中等教育学校	中2	
		伊世　竣弥	三重県	鈴鹿中等教育学校	中2	
		岡崎　楓河	三重県	鈴鹿中等教育学校	中2	

＊問題　1. 畳の敷き方　 2. 靴ひもの結び方　 3. 返品保証の有効活用
4. 鮎の養殖池　 5. 立方体倍積問題の近似解

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第19回日本数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

兒玉　太陽	愛知県	海陽中等教育学校	5年	初等幾何的解法の存在する角度の問題
星野　泰佑	愛知県	東海高等学校	2年	絶対値の効用

銀賞

佐藤　ふたば	千葉県	千葉県立船橋高等学校	3年	ブレスレットモデルを用いたルカ数列の拡張
川添　裕功 楢原　晃都	福岡県	久留米工業高等学校	3年 共著2名	絶対値の効用

銅賞

大野　敦士 三上　奈桜 井端　千尋	岐阜県	岐阜県立恵那高等学校	3年 共著3名	ベイズ統計学によるポーカーの必勝法
櫻田　恭佑	香川県	英明高等学校	3年	余次元から見た中線定理の拡張とその背景にある恒等式について
新井　一希	愛知県	名古屋大学教育学部附属高等学校	3年	階差展開とその応用
久島　明洋	東京都	潁明館高等学校	2年	高校数学範囲内での線形m項間漸化式の研究
横山　怜 内田　淳也 上西　翔	京都府	京都府立南陽高等学校	3年 共著3名	軽重不明の偽者を扱う天秤問題 ―― コイン枚数の上限を与える一般式の導出 ――

第19回日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

該当者なし

銀賞

宮澤　秀隆	広島県	広島市立翠町中学校	3年	絶対値の効用

銅賞

飾　和真	三重県	三重県松阪市立殿町中学校	2年	グラフ描写アプリ「Desmos」で見られる数学の美
服部　圭太	東京都	Axis Internatilnal School	5年	フィボナッチ数列と指数に関するとある性質とその拡張

＊テーマ　1. 絶対値の効用　2. エネルギー最小状態
3. 自由課題　4. 感想戦

表記は次の順にしてあります。 氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象のテーマ。

5. 日本数学コンクール参加状況

第29回日本数学コンクール参加状況一覧　個人戦　　　参加数　55

会場	地域	学校所在地	性別	高校生						計	
				1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	11	13	8	9	0	0	19	22
			女	2		1		0		3	
		岐阜	男	0	0	8	8	2	2	10	10
			女	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
		静岡	男	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0		0		0		0	
	関東	東京	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
		神奈川	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	13	15	17	18	3	3	33	36
			女	2		1		0		3	
津高校	中部	三重	男	2	3	1	1	0	0	3	4
			女	1		0		0		1	
	小計		男	2	3	1	1	0	0	3	4
			女	1		0		0		1	
大手前高校	近畿	大阪	男	10	10	2	2	0	0	12	12
			女	0		0		0		0	
		奈良	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	10	10	3	3	0	0	13	13
			女	0		0		0		0	
橋本市	近畿	奈良	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
福井大学	中部	福井	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
合計			男	25	28	23	24	3	3	51	55
			女	3		1		0		4	

第29回日本数学コンクール参加状況一覧　団体戦　　参加数　173

会場	地域	学校所在地	性別	高校生 1年		2年		3年		計	
名古屋大学	中部	愛知	男	26	36	26	29	0	0	52	65
			女	10		3		0		13	
		岐阜	男	7	7	5	7	0	0	12	14
			女	0		2		0		2	
		三重	男	0	0	0	0	0	0	0	0
			女	0		0		0		0	
	関東	東京	男	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
		神奈川	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
		栃木	男	1	1	3	3	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**38**	**48**	**38**	**43**	**0**	**0**	**76**	**91**
			女	**10**		**5**		**0**		**15**	
津高校	中部	三重	男	2	5	18	22	0	0	20	27
			女	3		4		0		7	
	小計		**男**	**2**	**5**	**18**	**22**	**0**	**0**	**20**	**27**
			女	**3**		**4**		**0**		**7**	
大手前高校	近畿	大阪	男	7	8	1	2	0	0	8	10
			女	1		1		0		2	
	四国	愛媛	男	0	0	8	8	0	0	8	8
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**7**	**8**	**9**	**10**	**0**	**0**	**16**	**18**
			女	**1**		**1**		**0**		**2**	
橋本市	近畿	和歌山	男	3	3	3	4	0	0	6	7
			女	0		1		0		1	
		奈良	男	0	0	0	0	2	2	2	2
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**3**	**3**	**3**	**4**	**2**	**2**	**8**	**9**
			女	**0**		**1**		**0**		**1**	
福井大学	中部	福井	男	17	28	0	0	0	0	17	28
			女	11		0		0		11	
	小計		**男**	**17**	**28**	**0**	**0**	**0**	**0**	**17**	**28**
			女	**11**		**0**		**0**		**11**	
合計			**男**	**67**	**92**	**68**	**79**	**2**	**2**	**137**	**173**
			女	**25**		**11**		**0**		**36**	

第29回日本数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学校名
愛知県	愛知県立旭丘高等学校
	愛知県立一宮高等学校
	愛知県立瑞陵高等学校
	愛知県立時習館高等学校
	愛知県立半田高等学校
	愛知県立明和高等学校
	椙山女学園高等学校
	名古屋大学教育学部附属高等学校
	愛知県立豊橋南高等学校
	愛知県立春日井高等学校
	滝高等学校
	東海高等学校
	名古屋市立工芸高等学校
	名城大学附属高等学校
三重県	暁高等学校
	三重県立津高等学校
	セントヨゼフ女子学園高等学校
	三重県立桑名高等学校
	三重県立松阪高等学校
	三重高等学校
	鈴鹿高等学校

学校所在都道府県	学校名
岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校
	多治見西高等学校
	岐阜県立恵那高等学校
	鶯谷高等学校
栃木県	栃木県立栃木高等学校
福井県	敦賀気比高等学校
東京都	筑波大学附属駒場高等学校
神奈川県	栄光学園高等学校
	鎌倉学園高等学校
静岡県	静岡県立浜松北高等学校
大阪府	大阪府立大手前高等学校
	近畿大学附属高等学校
	向陽台高等学校
	大阪府立四條畷高等学校
奈良県	智辯学園高等学校
	東大寺学園高等学校
福井県	北陸高等学校
和歌山県	和歌山県立橋本高等学校
	高野山高等学校
	初芝橋本高等学校
愛媛県	愛媛県立松山南高等学校

第22回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　個人戦　　　参加数　38

会場	地域	学校所在地	性別	小学生 5年	小学生 6年	中学生 1年		中学生 2年		中学生 3年		計	
名古屋大学	中部	愛知	男	0	1	1	1	5	6	5	6	12	14
			女	0	0	0		1		1		2	
		岐阜	男	0	0	0	0	1	1	5	5	6	6
			女	0	0	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
			女	0	0	1		0		0		1	
	関東	東京	男	2	0	1	1	0	0	0	1	3	4
			女	0	0	0		0		1		1	
		神奈川	男	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2
			女	0	0	0		0		1		1	
		千葉	男	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
			女	0	0	0		1		0		1	
		群馬	男	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	近畿	兵庫	男	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
		奈良	男	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	2	1	4	5	7	9	11	14	25	31
			女	0	0	1		2		3		6	
津高校	中部	三重	男	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2
			女	0	0	1		0		1		2	
	小計		男	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2
			女	0	0	1		0		1		2	
大手前高校	関東	東京	男	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	近畿	兵庫	男	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
		奈良	男	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	1	0	0	1	1	1	1	3	3
			女	0	0	0		0		0		0	
福井大学	中部	富山	男	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
合計			男	2	2	4	6	8	10	14	18	30	38
			女	0	0	2		2		4		8	

第22回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　団体戦　　参加数　247

会場	地域	学校所在地	性別	小学生	中学生						計	
				6年	1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	1	4	9	31	36	48	61	84	108
			女	1	5		5		13		24	
		岐阜	男	0	0	0	12	14	2	2	14	16
			女	0	0		2		0		2	
		三重	男	0	0	0	0	0	13	24	13	24
			女	0	0		0		11		11	
	関東	東京	男	0	0	0	0	0	14	15	14	15
			女	0	0		0		1		1	
		神奈川	男	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0		0		0		0	
	小計		男	1	4	9	43	50	78	103	126	164
			女	1	5		7		25		38	
津高校	中部	三重	男	0	0	3	16	23	13	34	29	60
			女	0	3		7		21		31	
	小計		男	0	0	3	16	23	13	34	29	60
			女	0	3		7		21		31	
大手前高校	近畿	京都	男	0	0	0	0	4	3	4	3	8
			女	0	0		4		1		5	
	小計		男	0	0	0	0	4	3	4	3	8
			女	0	0		4		1		5	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	5	8	0	4	2	3	7	15
			女	0	3		4		1		8	
	小計		男	0	5	8	0	4	2	3	7	15
			女	0	3		4		1		8	
合計			男	1	9	20	59	81	96	144	165	247
			女	1	11		22		48		82	

第22回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学校名
愛知県	蒲郡市立大塚中学校
	岡崎市立美川中学校
	東海中学校
	名古屋大学教育学部附属中学校
	豊川市立南部中学校
	名古屋市立南陽東中学校
	愛知教育大学附属岡崎中学校
	愛知教育大学附属名古屋小学校
	一宮市立大和中学校
	稲沢市立大里中学校
	刈谷市立朝日中学校
	椙山女学園中学校
	瀬戸市立品野中学校
	中部大学春日丘中学校
	東郷町立高嶺小学校
	南山国際中学校
	名古屋市立駒方中学校
	名古屋市立守山中学校
	名古屋市立神丘中学校
	名古屋市立川名中学校
岐阜県	中津川市立蛭川中学校
	関市立緑ヶ丘中学校
	羽島市立中島中学校
	岐阜市立岩野田中学校
	岐阜市立長森南中学校
	岐阜大学教育学部附属中学校
	岐阜東中学校
	大野町立大野中学校

学校所在都道府県	学校名
三重県	暁中学校
	津市立橋北中学校
	鈴鹿中等教育学校
	セントヨゼフ女子学園中学校
	四日市市立富田中学校
	高田中学校
	三重大学教育学部附属中学校
	松阪市立中部中学校
富山県	富山大学人間発達科学部附属中学校
群馬県	高崎市立倉賀野中学校
神奈川県	浅野中学校
	桐蔭学園中学校
	栄光学園中学校
東京都	開成中学校
	Axis Internatilnal School
	学習院初等科
	桜蔭中学校
	筑波大学附属駒場中学校
	白百合学園中学校
千葉県	渋谷教育学園幕張中学校
奈良県	東大寺学園中学校
	智辯学園中学校
京都府	京都教育大学附属京都小中学校
	立命館中学校
兵庫県	灘中学校
和歌山県	和歌山県立古佐田丘中学校
	橋本市立高野口中学校
	橋本市立あやの台小学校

６. 参加者アンケート調査結果

日本数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　54（参加者55名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	15 人	（ 27.8 %）
イ	先生から	26 人	（ 48.1 %）
ウ	友人から	1 人	（ 1.9 %）
エ	両親から	4 人	（ 7.4 %）
オ	兄弟姉妹から	0 人	（ 0.0 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	6 人	（ 11.1 %）
コ	その他	2 人	（ 3.7 %）
	○ 部活動	1 人	
	○ 案内が届いて	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	32 人	（ 48.5 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	2 人	（ 3.0 %）
ウ	数学が苦手だから	1 人	（ 1.5 %）
エ	以前参加して有意義だったから	7 人	（ 10.6 %）
オ	先生に勧められたから	13 人	（ 19.7 %）
カ	両親に勧められたから	1 人	（ 1.5 %）
キ	友人に誘われたから	2 人	（ 3.0 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	1 人	（ 1.5 %）
ケ	何となく興味があったから	4 人	（ 6.1 %）
コ	参考書持参が自由だから	0 人	（ 0.0 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	1 人	（ 1.5 %）
シ	その他	2 人	（ 3.0 %）
	○ 部活動	2 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	17 人	（ 25.0 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	26 人	（ 38.2 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	7 人	（ 10.3 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	13 人	（ 19.1 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	3 人	（ 4.4 %）
キ	その他	2 人	（ 2.9 %）
	○ 5000兆時間欲しい！！！	1 人	
	○ 時間が意外と足りなかった	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	26 人	（ 43.3 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	1 人	（ 1.7 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	33 人	（ 55.0 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	（ 0.0 %）
オ	その他	0 人	（ 0.0 %）

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

10名 物理
8名 化学
＊ その他（各1名ずつ）
天文、地学、情報処理、科学総合（物化生地数の全ての知識を用いて解くもの）、政治・経済、漢字に関する問題

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

5 名 数学ガール
4 名 浜村渚の計算ノート
3 名 博士の愛した数式
＊ その他（各1名ずつ）
Newton、青の数学、面白くて眠れなくなる数学、虚数の情緒、高校数学の美しい物語、史上最強図解 これならわかる！ ベイズ統計学、素数はめぐる、モノグラフ ベクトル、理系が恋に落ちたので証明してみた、志田晶先生の参考書、代数論・初等幾何の本

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月28日(土)「3x+1問題(コラッツ予想)について」「上一桁の数字の法則」
5月26日(土)「べき乗和の公式と，その先の話」「原点可視格子点～好きなあの子が見える
6月23日(土)「…等間隔の列に魅せられて…」「ルービックキューブと数学」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	20 人	（ 37.0 %）
②知らない	32 人	（ 59.3 %）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	13 人	（ 24.1 %）
②ない	6 人	（ 11.1 %）
③わからない	33 人	（ 61.1 %）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
○ 数学コンクール解説編
○ 2進数～コンピュータでの～
○ n進数
○ 音楽と数学の関連性
○ ゲーム理論
○ 正則連分数展開
○ ABC予想
○ ゲルフォント＝シュナイダーの定理
○ 素数
○ パスカルの三角形の拡張
○ トポロジーについて
○ トランプゲームのブラックジャックについて
○ モンティ・ホール問題
○ 四次元系統
○ 方程式に関連したもの

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- 授業などの数学の問題とは違いかなり難しかった
- とても難しかったけど、時間を忘れて解いてしまって、はじまる前は長すぎると思ったけど、楽しく解くことができました。
- 高校数学は多少は出来るけど、自分が学んでいるのはほんの一握りの分野で、ひたすら発展させていくとここまで難しいことを考えていけるようになるのかと驚きました
- 東京会場を作って頂きたいです。
- 問題4では同じ文字が複数の設問にわたって使われており問題文の理解が困難だった
- とても楽しかったです。もっと数学について考えや知識を深めたいと思いました。
- 1年後はもっと解きたい
- とても楽しかったです！最後の数コン（今年高3なので）でしたが、来年も参加したいくらいです！充実した時間でした。3年間ありがとうございました（今年の問題3がこの3年の中で1番楽しかったです）
- 自由って感じがした。解法の見える普段の問題と良い意味ですごく違っていて驚いた
- 今までに解いたことがないような問題ばかりでとても難しかったです。全て解答できなかったし、本当にわからないものもあって悔しかったです。
- とても難しかったけどやっている問はおもしろかったです。
- 数学に対する考えの変わるよい機会になりました
- 数学コンクールに参加するのが2回目ですが、全く問題が分からず、時が過ぎるのを待つだけ、という形になってしまいました。次参加する時は数学をもっと勉強して解けるようにしていきたいと思います。
- 難しすぎる（笑）けど面白い。家でも考えてみたい。
- 知識的には高1でもある程度わかった。言葉が難しかった。問題が実用的だった。問題が難しかった。いつもとは違った。
- ありがとうございました。
- 難しい問題が多く、延々と考えられるような問題だった。1つの問題を深く考えることはいい経験になったので、またこのような大会に出たいと思いました。
- 難しいとは思っていたけど想像以上に難しかった。
- おもしろかった。
- 整数論や微積分などを使う問題があればと思う
- 普段はないような問題を解くことができてとても楽しかったです。
- 解き方がさっぱりわからなかった。もっと自分の知識を生かすような問題を今後取り組みたいと思った。5時間半考えることができたのでよかった。
- 問題が難しく、また普段とは違い苦戦した。自分なりにこの問題だけでも解答しようと思い、解いたのはとても楽しかった。
- また受けてみたいです。
- 図形の問題に出る作図と、無理数を表す連分数に関係があることを初めて知りました。
- 問題3の返品保証の問題がインターネットで買い物をする僕たちにとって非常に興味深く面白い問題だと感じました～　今まで申し訳なくて返品なんてしたことがないのですが、これからはどんどん返品していきたいと思います！！

日本数学コンクール【団体戦】

アンケート総数　161（参加者173名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	19 人	（ 11.2 %）
イ	先生から	86 人	（ 50.6 %）
ウ	友人から	31 人	（ 18.2 %）
エ	両親から	2 人	（ 1.2 %）
オ	兄弟姉妹から	0 人	（ 0.0 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	2 人	（ 1.2 %）
コ	その他	30 人	（ 17.6 %）
	○ SSH重点枠 2nd stageの一環	14 人	
	○ 去年参加した	4 人	
	○ 部活	3 人	
	○ 郵便物	2 人	
	○ 学校の指示を受けて	1 人	
	○ いつのまにか	1 人	
	○ 御告げ	1 人	
	○ 強制参加	1 人	
	○ 神託	1 人	
	○ ネットサーフィン中	1 人	
	○ 元から	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	54 人	（ 26.3 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	6 人	（ 2.9 %）
ウ	数学が苦手だから	5 人	（ 2.4 %）
エ	以前参加して有意義だったから	15 人	（ 7.3 %）
オ	先生に勧められたから	45 人	（ 22.0 %）
カ	両親に勧められたから	0 人	（ 0.0 %）
キ	友人に誘われたから	24 人	（ 11.7 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	4 人	（ 2.0 %）
ケ	何となく興味があったから	26 人	（ 12.7 %）
コ	参考書持参が自由だから	2 人	（ 1.0 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	2 人	（ 1.0 %）
シ	その他	22 人	（ 10.7 %）
	○ SSH重点枠 2nd stageの一環	13 人	
	○ 部活	4 人	
	○ 強制参加	2 人	
	○ いつのまにか	1 人	
	○ このグループ名で挑戦したかったから	1 人	
	○ そこにコンクールがあるから	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	69 人	（ 31.9 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	64 人	（ 29.6 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	1 人	（ 0.5 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	28 人	（ 13.0 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	29 人	（ 13.4 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	19 人	（ 8.8 %）
キ	その他	6 人	（ 2.8 %）
	○ 例年より難しかったように感じます	1 人	
	○ つかれた	1 人	
	○ まだ見てない	1 人	
	○ 問題で不明点が多かった	1 人	
	○ 神社に奉納してください	1 人	
	○ 簡単で時間が余った	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	58 人	（ 36.5 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	10 人	（ 6.3 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	82 人	（ 51.6 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	5 人	（ 3.1 %）
オ	その他	4 人	（ 2.5 %）
	○ たのしー	1 人	
	○ 夏休みの辛い一日だと思って次に踏み出す	1 人	
	○ 時間が足りない	1 人	
	○ 数学をドラえもん学に応用していけたらいいと思う	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

31 名 物理
24 名 化学
7 名 生物
3 名 経済
3 名 情報
3 名 魔方陣
2 名 英語
2 名 政治
2 名 歴史

＊ その他（各1名ずつ）

情報分野、アルゴリズム（プログラミング等）、理科、理工、さんすう、地学、地理、哲学、道徳、法律、英語長文和訳、漢文、吉川の漢文、吉川の現代社会、言語学、保健体育、発表力、アイデア、雑学、ドラえもん学、謎解き、ナンプレ、俳句、パズル系統、理系科目と工作を組み合わせたもの、数学自体かなり範囲が広いと思う、いっぱいあれば参加したいです

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

9 名 博士の愛した数式
8 名 数学ガール
7 名 浜村渚の計算ノート
3 名 黄金比の謎 美の法則を求めて
3 名 最近、妹がグレブナー基底に興味をもちはじめたのだが
3 名 フェルマーの最終定理
2 名 Newton
2 名 お任せ！数学屋さん
2 名 面白くて眠れなくなる数学
2 名 解析入門
2 名 数の悪魔
2 名 四色問題
2 名 チャート

＊ 各1名ずつ

数学ガールの秘密ノート、12の美しい数式、Focus Gold、ユークリッド「原論」、HIPRIME、γ、青チャート、彩菊あやかし算法帖、アルゴリズム大図鑑、円周率の謎を追う 江戸の天才数学者・関孝和の挑戦、オイラーとリーマンのゼータ関数、オイラーの贈物、確率捜査官御子柴岳人、確率論、数に強くなる本、神は数学者か？、キテレツ大百科、教科書、空想科学読本、高校数学+α、高校数学の美しい物語、算がくトンネル、塾技100数学、人生を変える「数学」そして「音楽」、ゾウの時間 ネズミの時間、ディーラーをやっつけろ！ブラックジャックの必勝法、はじめてであうすうがくの絵本、ハッピーになれる数学、恋愛を数学する、大数、数学の考え方、論理学で学ぶ数学、和算百科、相対性理論を数式で理解する、微分・積分入門、物理のための数学入門、線形代数 写像、ドラえもん、小学生向けのドラえもんの数学漫画

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月28日(土)「3x+1問題(コラッツ予想)について」「上一桁の数字の法則」
5月26日(土)「べき乗和の公式と，その先の話」「原点可視格子点～好きなあの子が見える確率～」
6月23日(土)「…等間隔の列に魅せられて…」「ルービックキューブと数学」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	29 人	(18.0 %)
②知らない	127 人	(78.9 %)

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	27 人	(16.8 %)
②ない	22 人	(13.7 %)
③わからない	107 人	(66.5 %)

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

○ 魔方陣
○ 素数
○ 11
○ n倍完全数
○ 雨が地面に落ちるときの落下点の間隔の法則について
○ あらゆる確率
○ アルゴリズム
○ 宇宙と数学
○ オイラーの法則
○ 関数
○ ギャンブルと数学
○ 群論
○ ゲーム理論

- 数学コンクールの解説会
- 数学的に「ドラえもん」を解析していく
- 関孝和の計算を現代数学で読み解く
- 接点
- 大問4
- テイラー展開を高校生にも分かるように証明
- 特殊な漸化式の解法
- トポロジー
- パズルと数学
- 鳩の巣理論
- 微分幾何
- 非ユークリッド幾何学
- フーリエ変換
- 不等式証明のコツ
- ポワンカレ予想
- 無限論
- 結び目
- リーマン予想
- 量子論のあれこれ
- 恋愛を数学する

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- むずかしかったです
- 数学なのか分からない問題ばかりで驚いた
- 難しかったです
- 色々な問題と出会えて面白かったです
- 面白い問題と出会えて楽しかったです。
- つかれた・・・。
- 問1に時間をとられました…でも楽しかったです。
- 数の広がりを実感できた
- 楽しかった
- １つの問題に何時間もかけることになるとは思わなかった
- 楽しかった
- 水ではなくブドウ糖をくばったほうがいいと思います
- 来年もがんばります
- さむかったです
- たたみの問題も難しかった
- むずかしい！！！
- 楽しかったです。
- 楽しかったです。
- 問題文を読み取るのが難しかった
- 知らないことばかりだった。数学のおくぶかさを感じることができた。
- コンクールで出題された内容はあまり見たことのないものばかりだったので、とてもよい経験になりました。
- おもしろい問題が5問あって、時間数が短く感じられました。
- 楽しかった
- 面白かったです。もっと勉強して来年来ます
- 自由な雰囲気の中、自分のペースで集中することができました。解答時間がもっとほしいです。
- 楽しかったです。難しかったです。終了1時間前から集中しました。
- 5問目がとても面白かった。Π やeでもあのように書けるのか気になる
- E-girlsの坂東希に会いたいです。Wi-Fi環境を整えて下さい。
- たたみや結び方など身近なものでも数学的に考えると面白いものがたくさんあることに気づきました。
- 身近な何気ないことも数学的に考えればこんなにも難しくなるのかと思いました。とても良い経験になりました。ありがとうございました。
- 用語・知識がなくてもひらめき次第で解ける問題が好きなので増やしてほしい。面白かったです
- SSHの企画に含めるのはいいが、３日でポスターを作って発表した直後にやられてもつかれててぜんぜんとけない。考えたくないしそもそも
- たのしかったです。
- 楽しませてもらいました
- 難しかったが、とてもおもしろかったです。
- とても難しかったです。
- 楽しかったです。
- 数学コンクールの問題は難しいなと思った。また数学は身の回りにあることを体感できた。
- 楽しかったです。ありがとうございました。
- 難しい難易度だった
- 非常に難しくまったくとけなかった。力不足を感じた。
- 楽しかったです。
- 手をうごかしながら考える作業が多かったので楽しかった。ただ頭の中で考えていることを言葉にするのがとても難しかった。
- 初めて参加して問題の難しさに圧倒されました。でも難しい問題を解きながら楽しむことができたので良かったです。
- 自由な形で数学の問題を解くことができたので、貴重な経験になったと思います。
- 難しかったけど、いつもと違う考え方がたくさんできた。
- こんなに長く考えたことはなかったので疲れました。もうちょっとひらめけたらいけた気がして楽しかった。
- むずい
- もってもおもしろい問題ばかりだった。
- 数学という分野の奥深さを感じた
- 学校の勉強とはまた違った考え方で問題を解くことは新鮮な気持ちでした。
- 普段と全然ちがう考え方でといてみて楽しかったけれどむずかしすぎてなえそうでした。
- 数学が自由な考え方だなーと思いました。ジュースやシャープペンをもらえて嬉しかったです！
- 自分の力が確認できた。もっと実力をつけたい。

○ 部屋が暑かったです。思ってたよりも楽しかったです。学校では、1問に対してこんなにも悩める時間があるというのはなかなかないことなので、貴重な体験ができたと思います。
○ 楽しかった。自分とは視点の異なる友人たちと力を合わせていっけん難しそうな数学の問題を解くのは新鮮だった。
○ 部屋が暑かった。5時間半かけて問題を解いたのは初めてだったけど、あっという間だった。友達と協力して解くことが楽しかった。参加して良かったと思った。
○ シャープペンとジュースありがとうございました。今まで、数学の問題1問にこんなに時間をかけて考えたことがなかったので、新しい感覚でした。友達と相談をしてもなかなか解けないし、いろいろと深くまで考えることができて楽しかったです。
○ 今年も楽しかったです！
○ 楽しかった。
○ 会場が暑いです。問題文がわかりにくかった。
○ 結構集中できないくらい暑かった。数学はすごい嫌いだし、やりたくもなかったけど、友達とできて楽しかった。
○ あつかった。
○ 楽しかった。
○ 楽しかったです。
○ 仲間との関係も深められて、来て良かったと思いました。本日は、数学コンクールを開催していただき、ありがとうございました。
○ 良かった。
○ 難しいけど楽しかった。

日本ジュニア数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　38（参加者38名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	5 人	（ 13.2 %）
イ 先生から	14 人	（ 36.8 %）
ウ 友人から	2 人	（ 5.3 %）
エ 両親から	7 人	（ 18.4 %）
オ 兄弟姉妹から	1 人	（ 2.6 %）
カ 新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク 雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ 日本数学コンクールのホームページから	6 人	（ 15.8 %）
コ その他	3 人	（ 7.9 %）
○ 数学研究部	1 人	
○ 去年参加したから	1 人	
○ お母さんから	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	20 人	（ 42.6 %）
イ 数学が好きになりたいと思ったから	0 人	（ 0.0 %）
ウ 数学が苦手だから	1 人	（ 2.1 %）
エ 以前参加して有意義だったから	11 人	（ 23.4 %）
オ 先生に勧められたから	9 人	（ 19.1 %）
カ 両親に勧められたから	2 人	（ 4.3 %）
キ 友人に誘われたから	0 人	（ 0.0 %）
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	0 人	（ 0.0 %）
ケ 何となく興味があったから	3 人	（ 6.4 %）
コ 参考書持参が自由だから	0 人	（ 0.0 %）
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	1 人	（ 2.1 %）
シ その他	0 人	（ 0.0 %）

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	15 人	（ 26.8 %）
イ 問題は難しいけれど楽しかった	25 人	（ 44.6 %）
ウ 問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	4 人	（ 7.1 %）
オ 数学の学問的広さを感じた	9 人	（ 16.1 %）
カ 問題文の意味が分かりにくい	1 人	（ 1.8 %）
キ その他	2 人	（ 3.6 %）
○ もっと考えてみたかった	1 人	
○ 説明が不足していて理解のできないところがいくつかあった	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	19 人	（ 41.3 %）
イ 今後の進路を考える参考になると思った	1 人	（ 2.2 %）
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	23 人	（ 50.0 %）
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	（ 0.0 %）
オ その他	3 人	（ 6.5 %）
○ 謙虚になれると思う	1 人	
○ 数学を日常生活に活用してみようと思う	1 人	
○ 予想以上に数学というものが深くて面白いものだと思った	1 人	

5．数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。
あれば，それはどのような分野ですか。

9 名 化学
5 名 物理
2 名 生物

＊ その他（各1名ずつ）
生物、地学、地理、力学、情報科学、理系、元素、英語、経営学、経済学、国語読解力、さつまいも、化学（大学範囲の化学を、誘導を交えながら解いていくようなコンクール）、中学・高校の数学の本当の使い道、脳の柔軟（子どもでも解ける謎解きなど）

6．今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

4 名 数の悪魔
4 名 数学ガール
2 名 博士の愛した数式
2 名 フェルマーの最終定理

＊ 各1名ずつ
πの話、お任せ！数学屋さん、高校入試１対１の数式演習、創作数学演義、大数学者、使える数学、ラマヌジャン探検、理系のための線形代数の基礎

7．名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は１０月～１月と3月～６月の第４土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟５０９講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

４月２８日(土)「3x+1問題(コラッツ予想)について」「上一桁の数字の法則」
５月２６日(土)「べき乗和の公式と，その先の話」「原点可視格子点～好きなあの子が見える確率～」
６月２３日(土)「…等間隔の列に魅せられて…」「ルービックキューブと数学」

Ａ 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	17 人	（ 44.7 ％）
②知らない	20 人	（ 52.6 ％）

Ｂ これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	8 人	（ 21.1 ％）
②ない	7 人	（ 18.4 ％）
③わからない	21 人	（ 55.3 ％）

Ｃ これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
○ リーマン予想について
○ 完全数
○ πについて
○ 高次方程式の解法の仕方
○ 今まで加速器で造られた粒子のエネルギーの算出
○ じゃがいも
○ 全部難しそうな内容ばかりなので、中学生でも分かりやすそうな内容のテーマを行ってほしいです。
○ とくにないけど、何でもいいからいっぱいやってほしい

８．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- シャーペン・消しゴム、ありがとうございます
- 難しかった
- この１年、謙虚に生活できそうです。有難う御座いました。
- 個人でこのような問題を解くのは苦しいと感じた。
- (1)(2)あたりは苦労して、解けましたが、それ以降は難しすぎたので、そういう問題にも関心が持てるようにしていきたいです。
- 時間がたりなかったです。5時か6時くらいまでやりたかった
- とても面白い問題だった
- JSの部屋のイスがつかいづらい
- 難しかったです
- 問題を解くことが楽しかったです
- むずかしかったが知識が広がった
- 楽しかった
- もう少し問題文が中学生にも分かるようにしてほしい
- なにかを証明する問題はとてもたのしかったです
- この数学コンクールの問題は難しい問題ばかりなので今後も勉強をがんばり今日やった問題を解けるようにしたい
- ５の作図できないものを作図によって近似するというのが面白かった
- 僕自身の数学に対する見識を広める非常に良い機会になりました。これからも気が向けば数学コンクールに参加させてもらおうと思っています。ありがとうございました。
- 難しくて時間があっという間にすぎた。何回も頭がこんがらがって、分からなくなった。けど考えるのはおもしろかった。もっと問題1，2のような問題を出してほしい。eisuのパズル道場のような問題を出してほしい。答えを出すのに時間がかかる問題が多く、学校にはあまりない種類の問題だと思った。問題がくつひもや畳、あゆの養殖池、ブランドの自転車など日常でもありそうな場面や物がでてきて、身近な内容になっていておもしろかった

日本ジュニア数学コンクール【団体戦】

アンケート総数 247 （参加者247名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	73 人	（ 26.5 %）
イ	先生から	119 人	（ 43.3 %）
ウ	友人から	63 人	（ 22.9 %）
エ	両親から	8 人	（ 2.9 %）
オ	兄弟姉妹から	3 人	（ 1.1 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	5 人	（ 1.8 %）
コ	その他	4 人	（ 1.5 %）
	○ 郵便で	1 人	
	○ 前回のを受けて	1 人	
	○ ポスターで	1 人	
	○ 直接	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	91 人	（ 24.8 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	8 人	（ 2.2 %）
ウ	数学が苦手だから	5 人	（ 1.4 %）
エ	以前参加して有意義だったから	19 人	（ 5.2 %）
オ	先生に勧められたから	38 人	（ 10.4 %）
カ	両親に勧められたから	6 人	（ 1.6 %）
キ	友人に誘われたから	107 人	（ 29.2 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	11 人	（ 3.0 %）
ケ	何となく興味があったから	60 人	（ 16.3 %）
コ	参考書持参が自由だから	6 人	（ 1.6 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	10 人	（ 2.7 %）
シ	その他	6 人	（ 1.6 %）
	○ ほぼ強制	1 人	
	○ 以前論文賞に応募したから	1 人	
	○ 夏休みが暇すぎる	1 人	
	○ 去年楽しかったから	1 人	
	○ 難問を解く達成感が好きだから	1 人	
	○ 数学コンクールやから	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	100 人	（ 26.5 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	122 人	（ 32.4 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	1 人	（ 0.3 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	63 人	（ 16.7 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	41 人	（ 10.9 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	45 人	（ 11.9 %）
キ	その他	5 人	（ 1.3 %）
	○ たのしかった	1 人	
	○ 殆ど分からないような問題が多く、自分の思考の未熟さを感じた	1 人	
	○ 学校でもこういう問題を解きたい	1 人	
	○ やっぱこうじゃないとと思った	1 人	
	○ 問題が少ししかできなかった	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	73 人	（ 27.0 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	24 人	（ 8.9 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	153 人	（ 56.7 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	5 人	（ 1.9 %）
オ	その他	15 人	（ 5.6 %）
	○ これからも参加したい・来年も頑張りたい・もう一度やりたい等	7 人	
	○ 何も思わなかった	2 人	
	○ 更なる高みを目指して	1 人	
	○ 問題の難易度が違いすぎる	1 人	
	○ これからも数学を愛し続けたい	1 人	
	○ 数学が万能だと感じた	1 人	
	○ 数学という科目にとらわれず柔軟に考える大切さや楽しさを知りまし	1 人	
	○ あんま変わっていない	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

35 名 化学
21 名 物理
13 名 英語
13 名 歴史
11 名 科学
9 名 理科
8 名 生物
8 名 地理
5 名 国語
5 名 地学
4 名 技術
4 名 なぞなぞ
4 名 日本史
3 名 宇宙
3 名 クイズ
3 名 公民
3 名 社会
3 名 哲学
2 名 音楽
2 名 計算
2 名 体育
2 名 天文
2 名 美術
2 名 プログラミング

＊ その他（各1名）
視写、和文英訳、歴史（日本史+外国史）、歴史（日本）、倫理、理科なら何でも、理科（生物、地学など）、やる気コンクール、物作り、法学、ヘリクツ、文学、プログラム、プレゼン、物理工学、微分、ビブリオバトル、美術史、美術（工作など知恵の輪をほどくみたいな･･･）、パソコン、パズル、日本ジュニア言語学コンクール、電子情報、ディベート、ディベート（実際にやる）、中学で学んだ広い知識を使った計算、総合、積分、世界地理、世界史、世界遺産、数学の計算の速さ、数学の学年別の個人で問題集を解く学校のテストみたいなコンクールがあったらいいな、心理学、情報技術、実験、時事問題、思考力でなく答えの正確さと速さを競う数学のコンクール、算数、古生物学、国語の作文（決められたお題で5時間作文を書き続ける）、現代文、国語現代文、国語（グループで作品（本みたいな）を作る）、交通、合コン（合唱コンクール）、経済、空想科学、漢字、韓国語、外国人観光客おもてなし英語表現、英作文、英会話、遺伝子、言い回し、足の器用さ

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

7 名 お任せ！数学屋さん
6 名 数の悪魔
6 名 数学ガール
6 名 博士の愛した数式
5 名 浜村渚の計算ノート
5 名 フェルマーの最終定理
4 名 青の数学
4 名 面白くて眠れなくなる数学
3 名 Newton
3 名 円周率の謎を追え
3 名 数学ガールの秘密ノート
3 名 不等式
2 名 殺すう

＊ その他（各1名ずつ）
眠れなくなるほど面白い 数学の定理、数の悪魔、空想科学読本、数の不思議、トリプルゼロの算数事件簿、数のモンスターアタック、解析入門、お助け数学屋、図解数学 三角関数、数学の考え方、関数の本、円周率、円周率1000000桁表、数学マジックについて、数論の未解決問題事典、線形代数、多面体、巨大数、P≠NP問題、トポロジーについて、ファジー理論についてのもの、ポアンカレ予想について、関孝和の本、雪江整数1，２、雪江代数1、計算ドリル、インド式計算方法、中学･高校への数学、高校数学、中学校3年分の数学が教えられるほどよくわかる、最高水準問題集、数オリの対策本、数学検定＜3級＞、哲学的な何か，あと数学とか、数学的な何か

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月28日(土)「3x+1問題(コラッツ予想)について」「上一桁の数字の法則」
5月26日(土)「べき乗和の公式と，その先の話」「原点可視格子点～好きなあの子が見える確率～」
6月23日(土)「…等間隔の列に魅せられて…」「ルービックキューブと数学」

A　数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	22 人	(8.9 %)
②知らない	215 人	(87.0 %)

B　これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	17 人	(6.9 %)
②ない	35 人	(14.2 %)
③わからない	183 人	(74.1 %)

C　これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

- ○ インド式計算
- ○ 円周率の不思議
- ○ 円のなぞ、１日が25時間だったら
- ○ 黄金数φ
- ○ 指数関数・複素数平面
- ○ 数学が関係しているものとは
- ○ 数学と自然の関係性について
- ○ 数列の美しさ
- ○ 正の数と負の数
- ○ 素数ゼミの謎
- ○ 素数の規則性
- ○ 素数の並びの規則性
- ○ 素数の領域
- ○ 空が青い理由
- ○ 素粒子について詳しく教えていただきたいです
- ○ 地学と数学
- ○ ハノイの塔における数学について　音(周波数など)
- ○ 人は何のために生きるのか
- ○ フィボナッチ数のどんなところに使われているか、またその身近な利用法
- ○ フィボナッチ数列
- ○ フェルマーの最終定理
- ○ フェルマーの最終定理の中・高校生向け講座
- ○ ポアンカレ予想
- ○ 魔方陣
- ○ 名大の入試の傾向の解説
- ○ 最も小さい数
- ○ 倫理

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- ○ たのしかったです！
- ○ 習っていない単語について説明を書いてほしい
- ○ とても楽しかったし勉強になった
- ○ 数学おもしろい！！
- ○ 楽しかった
- ○ 疲れました。時間はそこまでいらないです。
- ○ 時間が長すぎる
- ○ 数学は迷官である
- ○ ふくめん算などのパズル的なものがほしい
- ○ ほとんど分からなくて、自分のスキルの少なさを感じました。これから学んでいくことを生かして、今回の問題を解けるようになりたいと思いました。
- ○ 日頃解いている問題と違っていて面白かったです
- ○ みんなで協力して解くのが楽しかった
- ○ 来年も参加したいと思った
- ○ 説明者の声が小さい
- ○ とても楽しかった
- ○ かなり難しくどれも驚くようなものばかりでとてもいい勉強になりました
- ○ 問題が思っていたよりかなり難しかった
- ○ 1問1問すごく難しかったですがグループの子と団結して取り組む事ができ。すごくよい体験となりました。1問1問すごく頭をひねらないといけないので解いたときはすごくスッキリしました。
- ○ 数学は数学でもすごく幅広いんだということが分かりました
- ○ どの問題もかなりレベルが高かったですが、1つ1つじっくり考えてみると、答えが見えてくるような感じでした。入試もこのような応用問題が多数出題されると思うので、短時間で正しい答えを導き出せるように頑張っていきたいです
- ○ 問題はとても難しかったのですが、楽しませてもらいました。今回のコンクールで、より難しいことに対する探究心が大きくなりました。有意義なものになったので、また参加したいです。
- ○ 問題がとても難しくやりごたえがありました
- ○ 初めてのコンクールでとても固い印象だったが、やってみるととても協力しながらできたので良かったしもっと数学に興味を持てた
- ○ 今日は初めて来てとても楽しかった。しかし同じ仲間の分担は信用できる人にと思った。
- ○ また挑戦してみたいなと思いました。
- ○ 問題1では地道に考えて法則を見つけたので良かったです。冬にも行ってほしいと思いました。
- ○ 問題文を読めば読むほどに合理的、論理的に考えることが難しくなっていきました。でも数学が生活に根付いていることが確認できたのは良かったと思います。
- ○ 今日の数学コンクールは、普段の学校の授業とは全然違い、またテストなどとは違った雰囲気だったので新鮮でした。問題はどれも難しくて最後まではたどりつくことはできませんでしたが、1つに何時間もかけて考えて分かったときはすごく嬉しかったし達成感がありました。私は根気よく解くことや1つ1つ理由づけして順番に解いていくことはあまり得意ではないけれど、まわりの数学が得意な人たちに刺激されて今日はチームのメンバーと協力してやり切ることができたと思います。今回のコンクールで、普段の勉強とは違う頭の遣い方が学べて楽しかったです。
- ○ とても疲れたし、そのわりにはあまり解けず苦しんだ。けど楽しかったと思う。
- ○ ひび割れ壊れゆく世界は果てしなく未知なる創造がいま秩序を無くしてく重ね合う痛みが繰り返す現実君との毎日がその闇に意味を投げた
- ○ ありがとうございました
- ○ とてもおもしろく、刺激的でした

- とても難しかったですが、楽しんで解けました
- （ペンローズの三角形） Aを(0,0,0)とする。Aからx軸方向に1移動して、B(1,0,0)。Bからy軸方向に1移動して、C(1,1,0)。Cからz軸方向に1移動して、A(1,1,1)。よって1=0。 Q.E.D.
- 1=2より成立
- 日々みないような解答が安易ではない問題をとくことができとてもおもしろかった。
- 問3がプログラミングみたいだった。あと問３が少しかんたんだった
- 楽しかったです。
- 普通の数学の問題にはないような問題を解けてうれしかった
- 難しかったけどだからこそやりがいを感じました
- 問題がとても難しかったのでもう少しかんたんになるともっとやりがいを感じます
- とても楽しかったです。自分の得意分野がはっきりと分かる難易度だったのでこれからの数学の勉強法も見えてきた気がします。また、最近学校の数学が計算ばかりで簡単だしつまらなかったので、数学に対する意欲が低くなってきていましたが、今日また改めて数学の楽しさが実感できました。これからもこの気持ちを忘れずに数学の学習に励んでいきたいと思いました。
- 協力してとけて楽しかったです
- かなりちがった視点で見る・考えることが大事だと思った
- 問題がすごくおもしろかったです。ありがとうございました。
- チームで協力して、難しい問題が少しだけ出来た
- ちゃんと考えて意見をチームの人に言えた
- 今回、参加時間が短くなってしまいましたが、すごく楽しませていただきました。去年にひきつづき今回もすごくたのしかったです。
- しっかりと問題にとりくむことができた
- チームで考えて問題をといた
- 楽しく数学に触れられた
- 難しい問題だったがみんなで解くということが楽しかった。これからも続けてほしいです
- 楽しかったです
- グループで楽しくやれました
- 問題は難しかったけどみんなで一緒に考えることでいろいろな意見が分かり考え方の参考になった。おもしろかったです！！
- がんばりました
- とてもむずかしくてコンクールを甘くみていました。全くとくことができなくて残念でした
- 難しかったです
- 涼しかったです
- 来年もやりたいです
- 難しかったけど、来年も数学コンクールをきょうせんしたいです
- 毎年きているのですが今年は物を使った物もあり良いと思いました。
- 問題をみんなで解き、答えが導き出せた時の達成感がすごいです。すごく楽しかったです。
- 参加賞うれしかったです
- 難しいと思った
- 難しかった
- 難しい問題が多くて大変だったけど仲間と協力してできました
- とても難しかった
- 今回で数学にはたくさんの可能性があるんだと思いました
- 楽しかったです。とくに１つひらめくと一気に想像が膨らむところが。
- １つ分かったことが見つかると楽しく感じられました。
- これが・・・中学生にやらせる問題ですか・・・？まあ、おもしろいからいいんですけど・・・
- とても難しい問題ばかりでしたが友達と協力して楽しくできました
- 外の空気が吸いたい
- みんなと相談して答えを導きだしてたのしかったです
- 生活の中にも数学が潜んでいておもしろかったです
- 充填率の求め方を調べてもわからなかったり、○を動かすことができないで、どう計算するのかがよくわからなかった
- 床がきたない
- 楽しかったです
- 難しい問題ばかりでしたがグループのみんなと考えながら考えるのは楽しかったです。
- 問題は難しかったけれど、グループで協力し、解くことができたので良かった
- 難しかったけど楽しかったし、解けなかった問題はもし解答が出れば絶対理解したいです。普段解けないような問題が解けて嬉しかったです。これからももっともっと数学の広さを実感したいと思いました。
- 同じ年代にこんな問題をとける人がいるなんてすごいと思った。
- 楽しかったです。最後の4と5が全然分かりませんでした。
- 1年前にいただいたシャーペンを使ってます！
- このように団体で思考する機会があるのはいいと思う。
- また友達と来たいです
- PCを利用することを可にすると数学的な考え方で解くのではなくプログラミングの問題として解けてしまうと思います。
- たのしかった。ジュースおいしかった。
- 問題は難しかったですが、その1つ1つの問題に長くねばることができなかったです。
- 一人だと思いもつかなかったようなことが、仲間と一緒に解くことによって新たな考え方ができることに驚いた。問題はとても難しかったです。
- とても難しかったが、色んな考えを聞けてよかった。
- すごく難しかったけれど、時間が多かったのでよかった。
- たのしかった
- とてもためになりました。1つの問題を時間をかけてじっくり解くことで、考える力がついたと思います。楽しかったです。ありがとうございました。
- 自分の理解できていない所が分かった。
- 思っていたより自由で楽しかった。問題はとても難しかったけどいつもより考えれた。

○ 問3の説明文の●4つ目の所に誤植がありました。
○ 自由に記述できるのが楽しかったです。
○ たのしかったです。
○ 自分の知識や発想力のなさがよくわかった。
○ 難しかったけれどある程度解けた。
○ 問題2の（オ）を見て問題作成者に泣きつきたくなりました。シャーペンが去年より高い。わーい。
○ 問題が難しかったけれど友達と相談したりじっくり考えたりして解いていくのは楽しかったです。
○ サイコーやった！！生きてるうちにこのコンクールに、これらの問題に出会えてよかった。感謝！！
○ SAN値ピンチです。
○ 去年やおととしも参加したけど、だんだんむずかしくなっているような気がした。でも毎年楽しみがあって良い。おもしろかった。
○ これからも続けてほしい
○ たのしかった。またやりたい。
○ 疲れました。
○ 楽しかったです！！ありがとうございました。
○ パソコンをもっと使える機会がほしい
○ 問題がunderstandできません。
○ チームになって難しい数学の問題を解くことは楽しかった。
○ これからの勉強についていくにはこのような問題を解いていく必要があると感じた。全然わからない問題もあったのでしっかり勉強していきたい
○ こうゆうのに参加するのは初めてだったのできんちょうしました。
○ 毎年毎年、数学の色々な問題があっておもしろいなと思っています。2の問題が難しかったけど、すごい楽しい問題でした。
○ とても楽しく頭を使えました。
○ 数学の答えは求めるのに多くの時間がかかると思った。
○ 問題は難しかったけど結構楽しかったです。それに考える力もついたと思います。
○ 数学についてはよく考えることができ、これからの生活にも役立ちそうな問題だった。
○ 問題の4と5が全然分からなかった。
○ 全部問題は難しかったけど楽しかった
○ また来年ちょうせんしたい
○ 数学が牙をむくとはこのことだと思いました。
○ すごく難しかったが結構面白かった。

日本数学コンクール実行委員会委員名簿

学内委員	宇澤　達	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	大平　徹	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	林　正人	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	伊師　英之	（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
	松下　琢	（名古屋大学理学研究科　講師）
	西村　治道	（名古屋大学情報学研究科　教授）
	花薗　誠	（名古屋大学経済学研究科　教授）
	田地　宏一	（名古屋大学工学研究科　准教授）
	渡邉　武志	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
	若山　晃治	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
学外委員	鈴木　紀明	（名城大学理工学部　教授）
	松川　和彦	（愛知きわみ看護短期大学　事務局長）
	高田　宗樹	（福井大学学術研究院工学系部門　教授）
	服部　展之	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	野村　昌人	（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
	村田　英康	（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
	小島　洋平	（愛知県立岡崎高等学校　教諭）
	渡辺　喜長	（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
	青木　勝人	（愛知県立旭丘高等学校　定時制　教諭）
	髙原　文規	（愛知県立千種高等学校　教諭）
	伊藤　慎吾	（愛知県立鳴海高等学校　教諭）
	小島　彰二	（愛知県立名古屋西高等学校　教諭）
	奥田　真吾	（三重県立津高等学校　講師）
	岩本　隆宏	（三重高等学校　講師）
	小倉　一輝	（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
	市川　敏	（椙山女学園高等学校　教諭）
	大須賀　裕貴	（愛知県立愛知総合工科高等学校　教諭）
	青木　健一郎	（愛知県立刈谷高等学校　教諭）
	田邉　篤	（三重県立津高等学校　教諭）
	岡﨑　建太	（京都大学数理解析研究所　研究員）
	谷口　美喜夫	（大阪府立千里高等学校　教諭）
	高木　由起子	（愛知県立東海商業高等学校　教諭）
	川上　祥子	（愛知県立豊田西高等学校　教諭）
顧問	大沢　健夫	（元名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	安本　雅洋	（元名古屋大学情報科学研究科　教授）
	丹羽　一雄	
	樋口　英次	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	矢野　秀樹	（大同大学大同高等学校　教諭）
	田所　秀明	（元三重県立伊勢高等学校　教諭）

日本数学コンクール委員会委員名簿

委員長	髙 橋　雅 英	（理事・副総長）
委　員	納　谷　信	（多元数理科学研究科長）
	福 澤 直 樹	（経済学研究科長）
	村　瀬　洋	（情報学研究科長）
	杉　山　直	（理学研究科長）
	水 谷 法 美	（工学研究科長）
	上 月 正 博	（事務局長）
	吉　野　明	（研究協力部長）
	宇　澤　達	（実行委員会委員長）

（平成30年4月1日現在）

クラウドファンディング寄附者一覧

今回の日本数学コンクールではクラウドファンディングに挑戦し、多くの方から多大なるご寄附を賜りました。皆さまからご支援頂いた資金は、全額、表彰式で受賞者にお渡しした表彰状・メダルと、ポスターセッション開催費用に使用させていただきました。

感謝の意を表して、ここにご寄附いただいた方のご芳名を掲載いたします。皆さまの温かいご支援にスタッフ一同、心より御礼申し上げます。

西田　誠幸 様	高橋　雅英 様
野田　慶 様	中東　正文 様
深川　久 様	山下　貴央 様
徳弘　康代 様	畔上　秀幸 様
石谷　絢 様	伊藤　健悟 様
金井　篤子 様	松田　裕幸 様
髙頭　大昌 様	服部　哲弥 様
榎本　紀久 様	伊佐　碩恭 様
高田　宗樹 様	OGAWA, Takeshi 様
岸本　昌幸 様	加藤　宙 様
松浦　能行 様	藤井　篤之 様
山田　幸誠 様	高井　優 様
吉田　智彦 様	高井　とも子 様
大平　徹 様	松原　仁 様
本条　祐子 様	草野　隆史 様

（順不同）

※ご芳名の公表に同意されなかった方を除きます。

主　　催

名　古　屋　大　学
日本数学コンクール委員会
名古屋市千種区不老町

後　　援

愛知県教育委員会	岐阜県教育委員会
三重県教育委員会	名古屋市教育委員会
大阪市教育委員会	愛知県高等学校数学研究会
和歌山県橋本市教育委員会	三重県高等学校数学教育研究会
岐阜県高等学校数学教育研究会	中日新聞社
大阪高等学校数学教育会	東海テレビ放送株式会社
テレビ愛知株式会社	

■■■ 編　集　後　記 ■■■

本まとめ冊子は、今年度からPDFファイルの形でのみ発行することになりました。紙媒体の良さも捨てがたいのですが、IT技術によって発行費用が削減できる恩恵を積極的に享受することを選択しました。そして、日本数学コンクールでも「PC・タブレット持ち込み可」「インターネット接続可」という大きな決断をしました。使える道具は何でも使って問題解決する姿勢を推奨する一方で、検索して解けるような安易な問題は出さず、良く考えて初めて解ける問題を出すという出題者の意気込みを、生徒さんたちに感じ取ってもらえたら幸いです。