2019
日本数学コンクールのまとめ

第30回　日本数学コンクール
第23回　日本ジュニア数学コンクール

―令和元年8月3日実施―

第20回　日本数学コンクール論文賞

日本数学コンクール委員会
名古屋大学

目　　　　次

１．はじめに

日本数学コンクールを開催して

日本数学コンクール委員会委員長　髙橋　雅英
（名古屋大学研究担当理事）

令和元年 8 月に、名古屋大学主催の第 30 回日本数学コンクール、第 23 回日本ジュニア数学コンクールおよび第20回日本数学コンクール論文賞を無事開催することができ、ご尽力いただいた関係者の皆様に心より感謝申し上げます。3 年連続で 500 名を超える小中高生の皆さんが参加してくれ、活気と熱気に満ちたコンクールになりました。本コンクールには個人戦、団体戦、論文賞という 3 つのカテゴリーがあり、本年は個人戦に 82 名、団体戦に 119 チーム 424 名、論文賞には 39 本の応募がありました。毎年、仲間と一緒に協力して問題を解く団体戦に参加する生徒数が徐々に増えています。

本コンクールは学校での数学の試験とは異なり、5 時間半という持ち時間の中で、自由な発想、独創的な発想で問題を解いてもらうことが特色です。中高生には経験のない長い時間を数学だけに集中して、問題を解くユニークなコンクールです。特定の 1 問だけに集中しても良いし、複数の問題にチャレンジしても良く、参加者の個性を大事にするコンクールとして企画されています。本年の出題問題も「自販機の釣り銭」「待ち合わせの場所は決められる？」といった身の回りの題材を取り上げたものから、「2 次方程式で遊ぼう！」「円盤の模様」など、数学の本質を問いかけるものまで幅広く、数学の楽しさを実感してもらう工夫がちりばめられています。参加者からはいつものように「問題は難しかったけど楽しかった」という感想が多く寄せられ、「数学のイメージがこれまでより広がった」と感じた参加者も多く、いつもと違う考え方で数学の問題を解く面白さを味わってもらう機会になったものと思います。

本コンクールを通じて数学が楽しいと思う若者が育ち、将来数学で学んだことを様々な分野で応用でき、活躍する人材の育成につながれば、私たちとしても嬉しい限りです。近年の IT 産業の発展の中で、深い数学的な知識を有する人材がますます必要になり、活躍する機会も多くなってくると思います。受賞した人も、残念ながら受賞を逃した人も引き続き数学の面白さを追求していってください。最後に、お忙しい中で問題を考え、作成していただいた先生方、解答の評価をしていただいた先生方に心より御礼を申し上げます。来年度も多くの小中高生の参加を期待しています。

２．日本数学コンクール開催の趣旨

開催の趣旨

今日世界はいろいろな意味で大きな転機に立っています。産業技術の高度化や高度情報化の技術革新は急速な進展を見せていますが，反面，人口爆発，エネルギー問題，環境汚染等人類がかつて経験したことのない複雑多岐にわたる課題に直面しています。このような問題を解決し，将来にわたって人類社会の発達と繁栄を享受していくためにも，総合的，学際的な学術研究の振興が必要です。このことは，必然的に汎科学性を有する数学の一層の飛躍とそれによる新しい科学の発展が求められており，それを支える優れた数学的思考力を持ち，探求心と創造性豊かな人材の育成が急務となっています。

このような情勢にかんがみ，新しい科学と技術の開拓を担う夢とロマンを秘めた青少年の発掘，伸長を図っていくため，中・高校生を対象に，平成 2 年度から「日本数学コンクール」を，同 9 年度からは「日本ジュニア数学コンクール」を，同 12 年度からは「論文賞」を開催してきました。そして同 27 年度からは，協力して解を導き出せる人材の発掘・育成のため「団体戦」を導入しました。私ども委員会は今後とも数学コンクールを実施し，もって世界の学術研究進展の基礎形成に寄与していくものです。

特　色

◎自由にゆったり考える

一題に絞っての解答も可能です。参考書やノート等の持ち込みも自由です。途中，試験会場で昼食や飲み物などを自由に取ることができます。

◎楽しい数学の発見

学校における数学の教育課程，教科書にとらわれず，数学の本質に根ざした考えていて楽しい問題を提供します。数理実験も積極的に採り入れます。

◎多彩な才能の評価

優秀な能力をもった生徒，ユニークな発想をもった生徒等様々な参加者の才能を多面的に評価します。特定の一題に集中して素晴らしい発想を出した生徒も顕彰します。

◎優れた人材の育成

日本数学コンクール参加者の数学的な能力，資質を一層高めるために，定期的に，中・高校生を対象に数学の公開講座「数理ウェーブ」を開催しています。

なお，「数理ウェーブ」は一般の方々の参加も認めており，多数の参加があります。

３．講評と解説

（１）２０１９年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評

日本数学コンクール実行委員会委員長　宇澤　達
（名古屋大学多元数理科学研究科教授）

問題１　（シニア）「自販機の釣り銭」
　自動販売機に限らず、現金をやり取りする場合には必ず「釣り銭」の問題が発生します。ここでは釣り銭が切れないようにするためにはどうしたら良いか、ということを最適化の観点から考えてもらいました。

問題２（シニア）　「二次方程式で遊ぼう！」
　この問題はみなさんにおなじみの２次方程式の解法を考えてよう，という問題です．整数係数の方程式が整数解を持つか，という問題は古くからありディオファントス（ 201-215(?) – 285-299(?)）というギリシャ人の数学者が最初のまとまった書物「算術論」を著したことにより、ディオファントス方程式と呼ばれます。有名な Fermat の問題もこの本の欄外に書かれました。ここではガウスが辿った道を再現してみました。ガウスの仕事が面白い点は、現代の整数論の様々な問題の源流となっているところです。思いつくだけでも、イデアル論、類数の概念とその有限性、など彼の仕事を理解していくなかで出てきた概念たちです。

問題１（ジュニア）　「待ち合わせの場所は決められる？」
　この種の問題は、ロケットの打ち上げ、人工衛星の制御の問題に起源があります。地上との交信に時間がかかるため、複数の計算機を載せて計算を行った結果が異なった時にどうしたら良いか、というのは数学の問題となります。いろいろな状況が考えられますが、みなさんいろいろよく考えたと思います。

問題２　（ジュニア）「入れ替わり」
　入れ替わりの問題は数学では群論と呼ばれる分野、特に置換群とよばれるものの中心的な問題の一つです。例えば「あみだくじ」の問題は、コクセター群と呼ばれる鏡映で生成される幾何的に定義される群の理論の一部であることがわかっています。この問題ではその世界から一歩踏み出してみました。

共通問題３　「50＋50＝98」
　この問題は，1+1 が２にならない理由を考えてもらう問題です．水とアルコールを混ぜると 1+1 が少し減るのはなぜか，という一つの説明を水の分子，アルコールの分子の大きさの差に着目するものです．いろいろ身近な問題もこのように考えてみると面白いと思います．またここでは分子間の相互作用については一番簡単な場合しか考えていないことに注意してください。

共通問題４　「円盤の模様」
　この問題は、「交差」のしかたを制限したときにどのような分割がでてくるかをみている問題です。「石鹸膜」についてこの様な問題は「プラトーの法則」（19 世紀の物理学者プラトーが実験的に発見した法則）のようなものもあります。この法則はアメリカの女性数学者 Jean Taylor さんによって証明されました。みなさんもいろいろな現象を観察していくと新しい法則を見つけてほしいと思います。

　以上全ての問題について、参加者の皆さん、よく頑張ってくださいました。ありがとうございます。

（２）日本数学コンクール問題第１問の解説

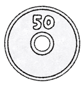
日本数学コンクール実行委員会委員

岡﨑　建太（京都大学数理解析研究所　研究員）
田邉　　篤（三重県立津高等学校　教諭）
奥田　真吾（三重県立津高等学校　講師）
岩本　隆宏（三重高等学校　講師）
小倉　一輝（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）

「自販機の釣り銭」

金額が全て120円の飲料を売っている自動販売機（自販機）について、釣り銭切れを起こさないように硬貨を用意することを考えます。

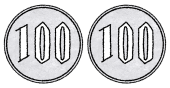
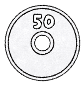
[ケースA]
ある街の自販機Aを考えます。この自販機には十円玉以外の硬貨は充分な数だけ用意されているとします。事前の調査により、自販機Aのお客のお金の払い方の割合が次のようになっていることが分かっているとします。

払い方	割合	百円玉	五十円玉	十円玉	合計(円)	お釣り(円)
1	0.5		-	 	120	0
2	0.5			-	150	30

つまり、50％のお客は百円玉1枚と十円玉2枚で飲料を購入し、残り50％のお客は百円玉1枚と五十円玉1枚で購入してお釣り30円を十円玉3枚で受け取るものとします。

(1) 自販機Aに十円玉が12枚入っているとします。5人のお客が飲料を買いに来るとするとき、釣り銭切れが起こる確率を求めて下さい。
(2) 自販機Aに十円玉が8枚入っているとします。5人のお客が飲料を買いに来るとするとき、釣り銭切れが起こる確率を求めて下さい。
(3) 5人のお客が飲料を買いに来るとするとき、釣り銭切れが起こる確率を10％未満にするためには、自販機Aにあらかじめ十円玉を最低何枚用意しておけばよいでしょうか。
(4) (3)の「5人」が「100人」、「10％未満」が「5％未満」である場合に、同じ問題について答えて下さい。

[ケースB]
ある街の自販機Bを考えます。この自販機には十円玉と五十円玉以外の硬貨は充分な数だけ用意されているとします。事前の調査により、自販機Bのお客のお金の払い方の割合が次のようになっていることが分かっているとします。

払い方	割合	百円玉	五十円玉	十円玉	合計(円)	お釣り(円)
1	0.50		-		120	0
2	0.25		-	-	200	80
3	0.25			-	150	30

(5) 自販機Bに十円玉が8枚、五十円玉が1枚入っているとします。4人のお客が飲料を買いに来るとするとき、釣り銭切れが起こる確率を求めて下さい。ただし、払い方2のお客へのお釣りの80円は必ず五十円玉1枚と十円玉3枚で払うものとし、10円玉8枚で払うことは出来ないものとします。
(6) (5)の「ただし、～」の制限がないとき、同じ問題について答えて下さい。
(7) 4人のお客が自販機Bの飲料を買いに来るとするとき、釣り銭切れが起こる確率を5%未満にするためには、自販機Bにあらかじめ十円玉と五十円玉を各々最低何枚ずつ用意しておけばよいでしょうか。(5)の「ただし、～」の制限を付けるか付けないか決めた上で答えて下さい。
(8) (7)の「4人」が「100人」である場合に、同じ問題について答えて下さい。

[ケースC]

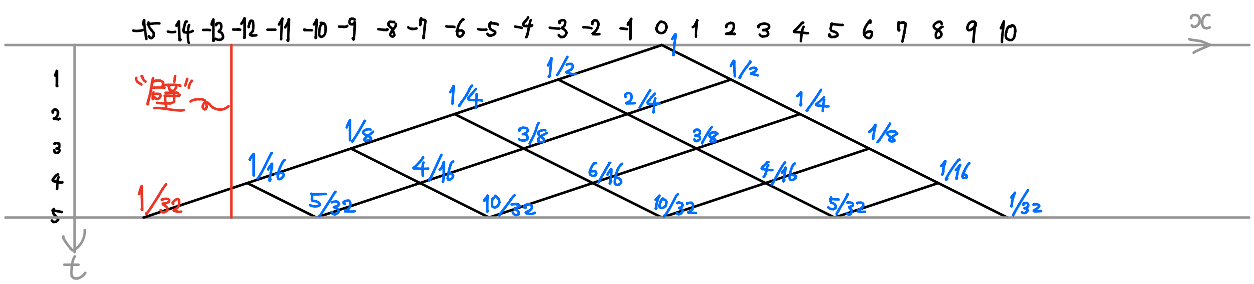
(9) “一般の場合”、つまりどの硬貨も釣り銭切れを起こす可能性があり、お客のお金の払い方も様々であるとき、同様の問題を自由に考えてみて下さい。千円札などの紙幣についても考える必要があるでしょう。三十円玉や百七十円玉があるような異世界について考えてもいいですよ。

[諸注意]
(a) 硬貨は、五百円玉、百円玉、五十円玉、十円玉のみを考えます（五円玉、一円玉、記念硬貨などは考えません）。
(b) 「釣り銭切れが起こる」とは、お客が飲料を購入したくても購入出来ない状態が起こること、と（この問題では）定めます。
(c) お客は1人ずつ順番に飲料を買いに来るものとし、その間隔は充分離れているものとします。
(d) お金の払い方はお客ごとにあらかじめ1通りに決まっており、釣り銭切れなどの状況に影響されることはないものとします（釣り銭切れだからカバンの奥から十円玉を取り出したり、隣のお客に硬貨を貸してもらう、などは無し）。
(e) 自販機の支払い方法は現金のみで、電子マネー等には対応していないものとします。
(f) お客が払った硬貨を別のお客の釣り銭として用いてもよいとします。

（文責：岡崎 建太）

お客が来るごとに十円玉の枚数が $\xleftarrow[-3]{1/2}\circ\xrightarrow[+2]{1/2}$（確率）と変化するので，
十円玉の枚数の変化は，来たお客の人数 t を時刻とする，
直線に置かれた粒子のランダムウォークだと思うことができる．

(1) 次の図を考える．



（答）：$\dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32} \approx 0.031 = 3.1\%$

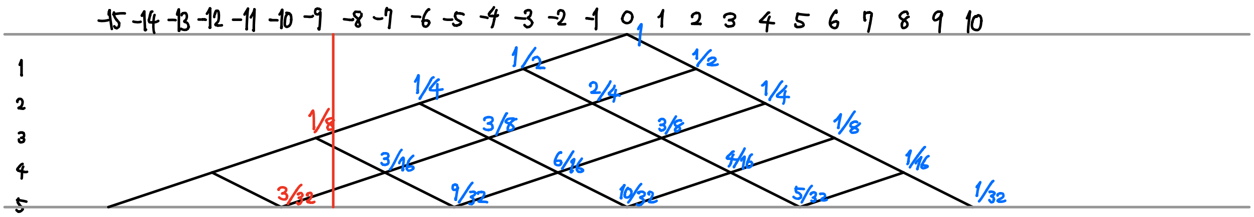
ただし横軸は十円玉の枚数の変化量 x，
縦軸はお客の人数 t を表し，(x, t) に書かれた数値は
お客が t 人来たとき十円玉の枚数の変化量が x 枚
である確率 $p(x,t)$ を表す．（何も書いてない所は確率 0）．
(1) では十円玉が 12 枚用意されているが，これを $x=-12.5$ に「壁」を描く
ことで表現する．粒子がこの壁を横切るときつり銭切れが起き，
粒子はそこで停止する．

$$p(x, t+1) = \frac{1}{2}p(x-2, t) + \frac{1}{2}p(x+3, t)$$

なので，上のように確率を順次書き込んでいくことができる．

（実際に計算するときは，分母の $/2^t$ を略して分子だけ書くと楽．）

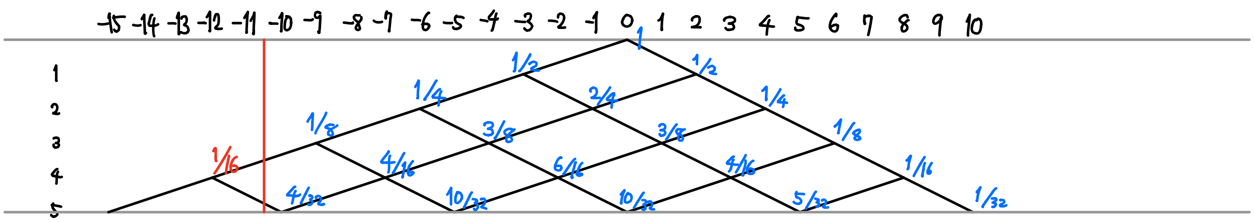
(2) 同様にして



(答): $\frac{1}{8}+\frac{3}{32}=\underline{\frac{7}{32}\approx 21.9\%}$

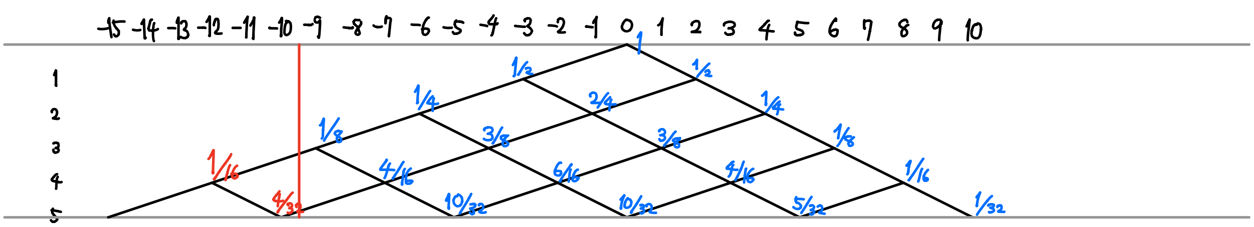
(3) $\frac{m}{2^5}<0.10$ を解くと $m<0.10\times 32=3.2$.

• 10枚用意したとき



つり銭切れが起こる確率は $\frac{1}{16}<0.10$.

• 9枚用意したとき



つり銭切れが起こる確率は $\frac{1}{16}+\frac{4}{32}=\frac{6}{32}>0.10$.

よって<u>最低10枚</u>が必要.

(4) プログラムでごりごり計算 (Mathematica の SparceArray 関数を用いた.)

十円玉 93枚用意: 約5.24 %

94 : 4.96 % ∴ 答: 94枚

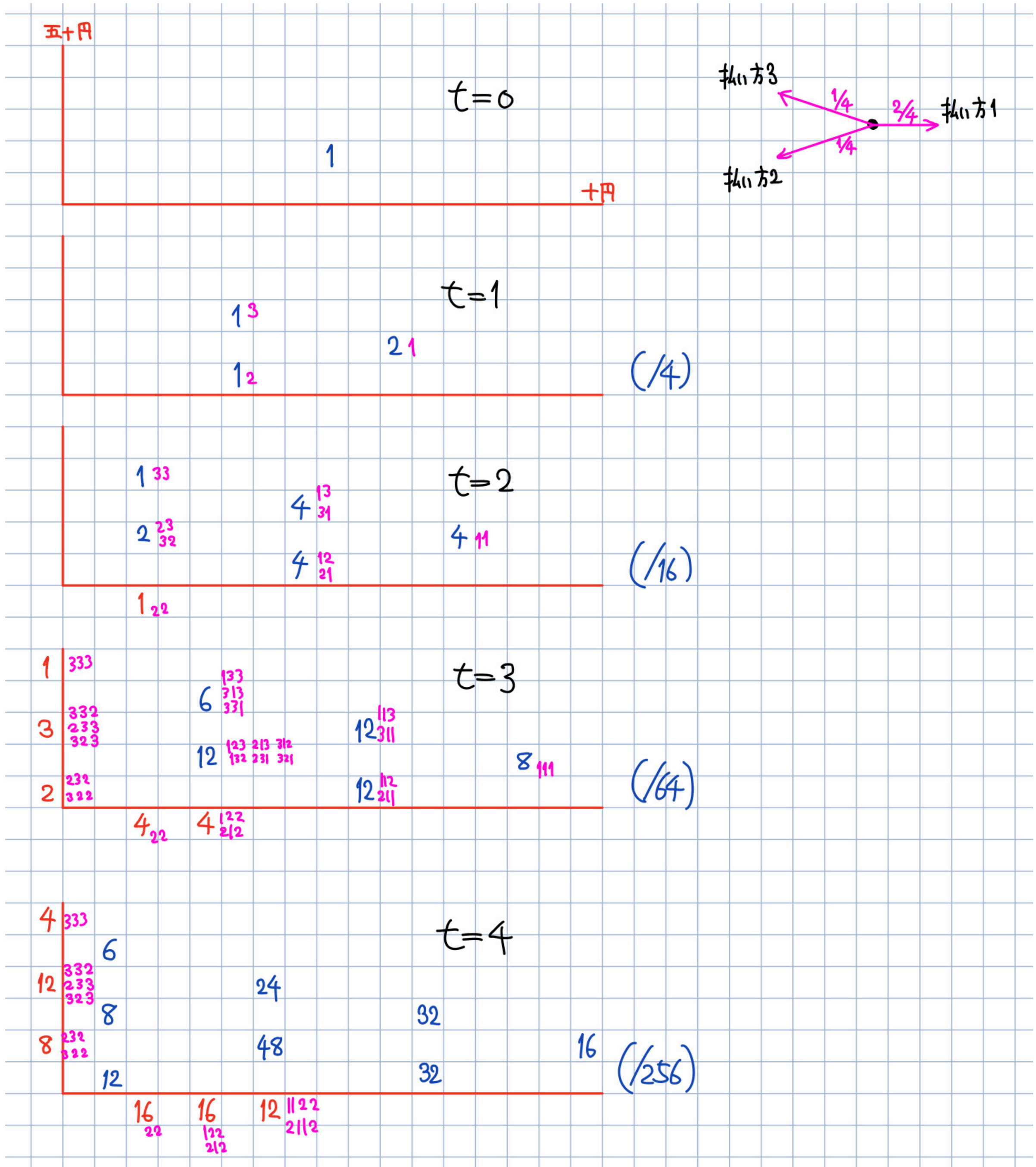
```
p1 = 1/2; p2 = 1/2;
P2[size_] :=
  SparseArray[{Band[{4, 1}] → p2, Band[{2, 4}] → p1, {1, 1} → 1, {2, 1} → p2, {3, 1} → p2 },
   {size, size}];

q2[w_, 0, size_] := SparseArray[{{1, w + 2} → 1}, {1, size}];
q2[w_, t_, size_] /; (t > 0) := q2[w, t, size] =
   q2[w, 0, size].MatrixPower[P2[size], t];

qq2[w_, t_, size_] := 2^t q2[w, t, size];

P2[7] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← 一般項を求めるには
このような行列を対角化して
やればよい.

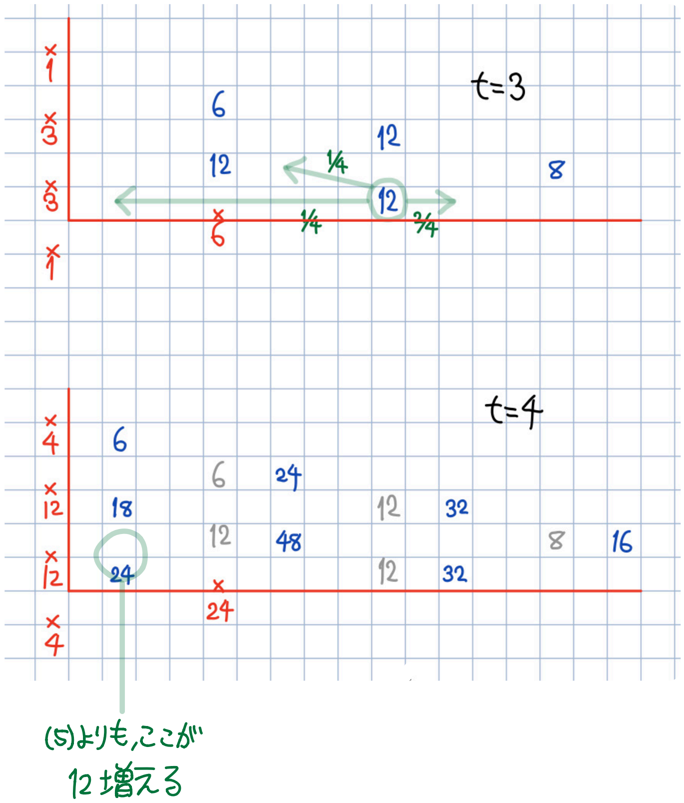
```
(* (4) *)
q2[93, 100, 300][[1, 1]] // N
q2[94, 100, 300][[1, 1]] // N
(* 100人のお客が来るとき, 釣り銭切れが起きる確率は,
  十円玉を93枚用意しておくと 約 5.24% > 5%;
  十円玉を94枚用意しておくと 約 4.96% < 5%;
  ゆえに 答:94枚
 *)

0.0523748

0.0496097
```

(5) 硬貨が2種類になったので，平面上を動く粒子のランダムウォークを考えてやればよい.



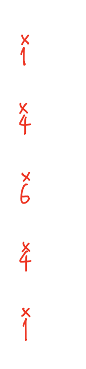
よって (答) $\dfrac{4+12+8+16+16+12}{4^4}=\dfrac{68}{256}=\dfrac{17}{64}\approx 26.6\%$.

(6)



よって (答) $1-\dfrac{200}{4^4}=\dfrac{56}{256}=\dfrac{7}{32}\approx 21.9\ \%$.

(7) 「ただし〜」ありの場合：



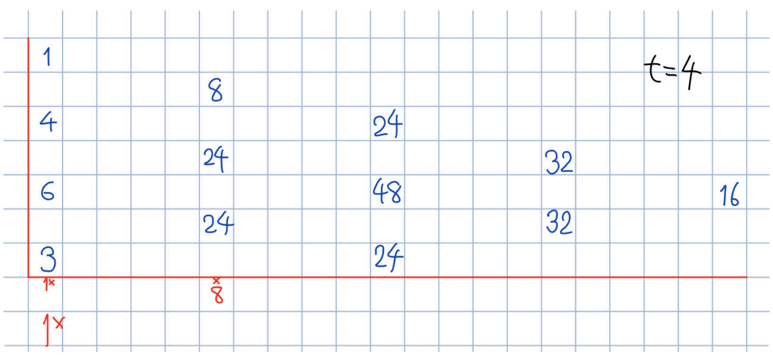
十円玉が12枚未満だと…
釣り銭切れを起こす確率P

$$\geq \frac{1}{4^4}(1+4+6+4+1) \approx 6.3\% > 5\%$$

よって十円玉は最低12枚必要.

十円玉が12枚以上用意されているとき,
五十円玉2枚ならば

$$P \geq \frac{10}{4^4} \approx 3.9\% < 5\% .$$



五十円玉1枚ならば

$$P \approx 18.0\% > 5\%$$

よって　(答) 最低でも $\begin{cases} \text{十円玉12枚} \\ \text{五十円玉2枚} \end{cases}$ 必要.

(8) 一般解がまだわからず，強引に確率を計算することもできていないので，乱数発生でシミュレーションしてみた．

つり銭切れが起こる確率を p と書く．客：100人，「ただし～」あり．

◎ 十円玉たくさん（300枚）のとき，

五十円玉 12枚で $p \approx 6.81\%$

13枚で $p \approx 4.93\%$

14枚で $p \approx 3.33\%$

（試行回数：各 100,000回）

```
In[33]:= 硬貨残数[0] = {十円玉, 五十円玉} = {300, 14};
客数 = 100;
釣り銭切れ発生回数 = 0;
試行回数 = 100 000;

For[i = 1, i ≤ 試行回数, i++
  For[t = 1, t ≤ 客数, t++,
   払い方 = RandomChoice[{2/4, 1/4, 1/4} → {1, 2, 3}];
   硬貨残数[t] =
    Which[
     払い方 == 1, 硬貨残数[t - 1] + {+2, 0},
     払い方 == 2, 硬貨残数[t - 1] + {-3, -1},
     払い方 == 3, 硬貨残数[t - 1] + {-3, +1}
     ];
   If[Min[硬貨残数[t]] < 0, 釣り銭切れ発生回数++; Break[];]
   ];
 ]

釣り銭切れ発生回数
Out[38]= 3328
```

◎ 五十円玉たくさん（100枚）のとき，

十円玉 80枚で $p \approx 13.32\%$

90枚で $p \approx 6.47\%$

93枚で $p \approx 5.37\%$

94枚で $p \approx 4.98\%$

95枚で $p \approx 4.18\%$

100枚で $p \approx 2.60\%$

（試行回数：各 100,000回）

```
In[63]:= 硬貨残数[0] = {十円玉, 五十円玉} = {100, 100};
客数 = 100;
釣り銭切れ発生回数 = 0;
試行回数 = 100 000;

For[i = 1, i ≤ 試行回数, i++
  For[t = 1, t ≤ 客数, t++,
   払い方 = RandomChoice[{2/4, 1/4, 1/4} → {1, 2, 3}];
   硬貨残数[t] =
    Which[
     払い方 == 1, 硬貨残数[t - 1] + {+2, 0},
     払い方 == 2, 硬貨残数[t - 1] + {-3, -1},
     払い方 == 3, 硬貨残数[t - 1] + {-3, +1}
     ];
   If[Min[硬貨残数[t]] < 0, 釣り銭切れ発生回数++; Break[];]
   ];
 ]

釣り銭切れ発生回数
Out[68]= 2597
```

以上から，例えば十円玉，五十円玉をそれぞれ

<u>(300枚，14枚)</u> や <u>(95枚，100枚)</u> ずつ

用意してやれば $p < 5\%$ になると予想される．

（3）日本数学コンクール問題第２問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　宇澤　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）

「二次方程式で遊ぼう！」

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について色々考えましょう．a,b,c を実数の範囲で考えた時は，

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

と平方完成をするのが非常に良いアイデアでした．バビロニア人は $x^2+ax=b^2$ の形の方程式を上の方法で解いているのは驚くべきことです．

ビタゴラスの定理 $x^2+y^2=z^2$ もいろいろなところで活躍しています．とくに，$x=3,y=4,z=5$ のようにすべてが整数になるような解は直角をつくるためにつかわれました．そこで，ここでも「整数」とか，「有理数」の範囲でどんな解があるか考えましょう．a,b,c を整数とした時に（つまり分母を払ってしまいましょう）$ax^2+bx+c=0$ の有理数解を考えましょう．p,q を整数として，有理数解が $\frac{q}{p}$ と表されたとしますと，

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)+c=0$$

から，

$$aq^2+bpq+cp^2=0$$

という形の a,b,c,p,q が全て整数の方程式を考えることになります．そこで．$ax^2+bxy+cy^2$ の形の式全体を考えましょう．この時，整数 r,s,u,v を用いて，$x'=rx+sy,\ y'=ux+vy$ とどんどん変数を変換していって簡単な形にすることを考えましょう．例えば平方完成をする時には，$b=0$ となる変換を探しているわけです．

1. r,s,u,v は整数だとしましょう．$(0,0),(r,s),(u,v),(r+u,s+v)$ を頂点とする平行四辺形の<u>内部</u>にある格子点の数を N とするとその平行四辺形の面積は $\pm(N+1)$ となることを証明してください．内部にある格子点とは，境界の上にある格子点は数えないものとします．例えば，$(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ の場合は，内部に格子点は無いので，$N=0$ となります．

2. $rv - su = \pm 1$ であれば，$x' = rx + sy$, $y' = ux + vy$ は x, y を x', y' について表してください．
3. 二式 $ax^2 + bxy + cy^2$ の判別式を $b^2 - 4ac$ として定義します．上記問 2 の変換により，判別式 $b^2 - 4ac$ は変わらないことを証明してください．
4. $x^2 + y^2$ の判別式は -4 となります．判別式が -4 となる二次式 $ax^2 + bxy + cy^2$ は全て $x^2 + y^2$ の形に持っていくことができることを確かめてください．
5. $b^2 - 4ac = -23$ となる $ax^2 + bxy + cy^2$ の最も簡単な形を定義して求めてください．（ヒント：二つあります）

解説と講評

1. この問題は，次のように考えるとわかりやすくなります．平面をこの平行四辺形の各辺に沿った平行移動により敷き詰めることができます．タイリングとよばれます．平面上の十分に大きな領域を考えると，その面積 M は領域の中の格子点の数にほぼ等しいはずです．そこで，領域内の平行四辺形の数を L とすれば，格子点の数は L (内部の格子点の数 + 1/2(辺の上の格子点の数) + 1) となるはずです．ここで辺の上の格子点の数を半分にしているのは，その辺で隣り合っている平行四辺形と共有しているからですし，最後の 1 は頂点の寄与ですが，頂点はちょうど 4 っつの平行四辺形が共有しているので 4x 1/4 = 1 となります．平行四辺形の面積を A とすれば，$M = LA$ ですから，結局 A = 内部の格子点の数 + 1/2(辺の上の格子点の数) + 1 となります．
2. ベクトル $(r, s), (u, v)$ に対して，$rv - su$ は平行四辺形の向き付きの面積になっていることを使うと考えやすくなります．この問題はみなさんよくできていました．答えは，

$$x = \pm(vx' - sy')$$
$$y = \pm(-ux' + ry')$$

となります．この式の形から r, s, u, v が整数であれば，逆変換の整数係数になることがわかります．
3. この問題では式全体を ± 1 倍したものも同値，と定義したほうがよ

かったと思います．以下この変換も許します．最初に問 4 でも使用する一般的なコメントをします．$x' = -y, y' = x$ という変換と，$x' = x-y, y' = y$ という二つの変換を考えると，係数が $(a,b,c) \mapsto (c,-b,a)$, $(a,b,c) \mapsto (a, b-2a, a-b+c)$ と変換されます．$b^2-4ac = -4$ ですから，$(b/2)^2+1 = ac$ となります．したがって，b を任意の偶数とすれば，判別式が -4 となるような a, c が必ず存在します．小さい b についてリストアップすると ($a \le c$ とします)，$b = 0$ のとき，x^2+y^2 となります．$b = 2$ のときは，$(1,2,2)$ となり，$x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$ となります．$b = 6$ の時には $(1,6,10), (2,6,5)$ の二つの可能性がありますが，2 番目の変換を用いると $(1,6,10) \mapsto (1,4,5)$ ですし，$(2,6,5) \mapsto (2,2,1)$ と b を減らすことができます．最終的には x^2+y^2 の形に持っていくことができます．直接的には，$x^2+6xy+10y^2 = (x+3y)^2+y^2$, $x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$ によって正しいことがわかります．2 番目の変換は b を $b-2a$ に持っていきますから，b を $2a$ より小さくすることができます．$(b/2)^2+1 = ac$ に注意すれば，b をどんどん小さくすることができます．そして上のリストに帰着させることができます．

4. この問題については $b^2-4ac = -23$ ですから，b は奇数となります．このとき，$4ac = b^2+23$ は必ずとけることに注意しましょう[*1]．小さい b について考えるましょう．$b = 1$ の時には，$4ac = 24$ より，$(1,1,6), (2,1,3)$ の二つの可能性があります．問 3 と同様にして，任意の判別式が -23 となる整数係数の二次形式は上の二つの形に持っていくことができます．上の二つが同値ではない（互いに移り合うことがない）ことは次のようにして確かめるのが良いと思います．互いに移り合う二次形式は表現できる整数の集合が等しくなります．$x^2+xy+6y^2$ は $x = 1, y = 0$ とおけば 1 を表現します．$2x^2+xy+3y^2 = 1$ となる整数 x, y が存在しないことを示しましょう．2 を法として考えれば，$2x^2+xy+3y^2 \cong xy+y^2 = (x+y)y \cong 1$ となるので，$y, x+y$ は奇数となります．そのとき，$2x^2+xy+3y^2$ は偶数となるので矛盾となります．

[*1] 4 を法として考えてください

（４）日本ジュニア数学コンクール問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員

小島　彰二（愛知県立名古屋西高等学校　教諭）
服部　展之（愛知県立明和高等学校　教諭）
市川　　敏（椙山女学園高等学校　教諭）
児玉　靖宏（愛知県立刈谷北高等学校　教諭）
西村　治道（名古屋大学情報学研究科　教授）

「待ち合わせの場所は決められる？」

遠く離れて住む３人、ＡさんＢさんＣさんが久しぶりに会うために待ち合わせ場所を手紙で連絡して決めようとしました。待ち合わせ場所としては、Ｐ駅とＱ駅があります。しかし郵便事情が悪いので、出した手紙がいつ届くか全く分かりません。また、３人はそれぞれ持病をもっており、緊急入院した場合、手紙の送信、受信ができなくなる可能性があります。誰かが入院した場合は、連絡のつく者だけが待ち合わせ場所に合意できれば良いとします。３人はどのようにして待ち合わせ場所を決めれば良いかを考えます。

最も簡単な方法は、３人がそれぞれ「Ｐ駅とＱ駅のどちらが良いか」を他の２人に送って、多数決を取ることが考えられます。しかし、Ｃさんが万一入院した場合、ＡさんもＢさんもＣさんからの手紙を待ち続けることになり永遠に合意できないことになります。

そこで、このような決めることが出来ない状況（デッドロック）を避けるために、「一定時間待っても手紙が来なかったら、入院したとみなして無視する」とします。また、このとき、２人の意見しか集まらないと、意見が分かれて決まらないことがあるので、その場合はＰ駅とすることにする。

このようにルールを決めておいた状態で、Ｃさんから一定時間の間に手紙が届きませんでした。このため、ＡさんとＢさんはルールに従い、待ち合わせ場所を決めることにしました。ＡさんはＰ駅、ＢさんＱ駅と希望が分かれたので、待ち合わせ場所はＰ駅ということで合意されました。これだけであれば問題はありません。

しかし、実際にはＣさんは入院しておらず、手紙の配達が遅れただけで、Ｑ駅を希望した手紙を出していたとするとどうでしょう。この時、Ｃさんには、Ａさんの手紙もＢさんの手紙も届いていたとします。Ｃさんは多数決でＱ駅に決定したと認識してしまい、ＡさんとＢさんの決定内容と合っていないことになります。

問題

(1) このような状況を踏まえ、参加人数３人、緊急入院ｘ人(0≦x≦3)として、合意出来るか出来ないかを判定しなさい。

(2) ４人の場合に、(1)と同様に、参加人数４人、緊急入院ｘ人(0≦x≦4)として、合意できるか出来ないかを判定しなさい。

(3) 一般に、参加人数ｎ人、緊急入院ｔ人とするとき、合意出来るための条件を求め、それを証明しなさい。

注意）上記(1)～(3)の場合、通信手段は手紙のみであり、電話、メール等は使用できないものとします。

解説と講評

出題意図：遠隔地にいる人同士の合理的な合意形成についての考察を問う問題です。

状況設定が前時代的だったかも知れません。今どきは、携帯電話で直接話が出来ますし、メールも使えます。またＳＮＳ等のツールも豊富です。離島、山間部で通信の基地局がなくて、通信ができないとか、災害等により通信障害が長期化した場合などが今回の問題の状況に近いかもしれません。

採点基準：どこまで合意形成のための考察を深めているかを基準に採点を行いました。

絶対的な基準を設けるのではなく、あくまでも相対評価で採点しました。本問はこれが正解という問題ではなく、如何に合意形成を図るかの判断基準まで含めての答案作成が出来るかが問われた問題です。

問題の背景:「分散環境における合意形成」は、現代の IOT 社会では極めて重要な事柄です。ビットコインに代表される仮想通貨も、その基盤を支える考えの一つにこの「分散環境における合意形成」があります。取引（お金の送信記録）をどうやって認証するかがカギとなる仮想通貨。その数理科学的な原理を考察する問題を発想しようと試行錯誤しました。プロトタイプの問題を作成したところ、内容レベルが高度であり、高校 2 年生以上の数学力が問われるレベルです。出題対象がジュニア（中学生以下）に設定されたことに伴い、急遽内容を再検討し、今回の出題形式としました。

今後の学習と研究：「仮想通貨の数理科学的な考察」をテーマにした学習をお薦めします。分散環境の合意形成の解析に成功した人の一人として、レスリー・ランポート氏を紹介します。数式を含む文書作成システム LaTex の開発者としてつとに有名な彼が「分散環境の合意形成問題」を「ビザンチン将軍問題」として定式化し、既に論文の形で解決しています。もうかれこれ 30 年以前のことです。その論文を下地に作成されたのがビットコインなのです。しかしそのビットコインを脅かす存在が出現しそうです。それはＩＢＭ―Ｑシリーズに代表される量子コンピュータ群。暗号化技術にとって量子コンピュータの出現は正にもろ刃の剣と言えます。このように数学、情報科学は今後も IOT 社会の基盤を支える学問として今まで以上に重要な役割を果たし続けるでしょう。

（５）日本ジュニア数学コンクール問題第２問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　松下　琢（名古屋大学理学研究科　講師）
田地　宏一（名古屋大学工学研究科　准教授）
樋野　励（名古屋大学経済学研究科　教授）

「入れ替わり」

映画や漫画でよくあるように、ぶつかった拍子に 2 人の間で中身が入れ替わってしまうような出来事が起こるとします。たとえば、A さんと B さんで入れ替わると、A さんの体に B さんの中の心が、B さんの体に A さんの中の心が入ってしまう、というような状況が起きます。

1. ある時から 3 人の間のいろんなペアで入れ替わりが何回も起こり始めたとして、全員がそろって元々の自分に戻れるのは最短で何回目の入れ替わりが起きたときですか？　次に短い場合は何回目ですか？　また、入れ替わりが起きるペアや順序の違うパターンは、それぞれの場合どのくらいの数がありますか？　但し、ある入れ替わったペアがその後二人とも他の人とは入れ替わりを起こさないで、再び入れ替わって前の状態に戻る、ということはないとします。

2. 同様に 4 人の間でペアの入れ替わりが起き始めた場合は最短で何回目で元に戻れるでしょうか？　また、どのくらいのパターンがありますか？　但し、4 人全員が 1 度は入れ替わりを経験するとします。

3. 5 人の間で入れ替わる場合は最短で何回目で戻れますか？　また、5 人になるとパターンの数を求めるのは急に大変になりますが、4 人以下の場合と大きく変わった点は何でしょうか？　ここでは実際のパターン数まで出さなくてもよいです。

4. さらに、某ヒットアニメ映画のように時間をこえた入れ替わりも起こるとします。 これまでの問題同様、ある入れ替わったペアが他の入れ替わりなしに再び入れ替わって前の状態に戻る、ということはないとすると、例えば、2018 年の誰かが 2020 年の別の人と入れ替われば、その人は 2019 年をスキップしてしまい、その年に起きた出来事を全く経験しないということも起きるでしょう。 4 人の間で何回もペアの入れ替わりが起きているとして、4 人がある同じ期間を全員スキップしてしまう、ということはありうるでしょうか？　この場合、この 4 人以外の入れ替わりに加わっていない周囲の人から見ると、その期間の彼らはどうなっている？

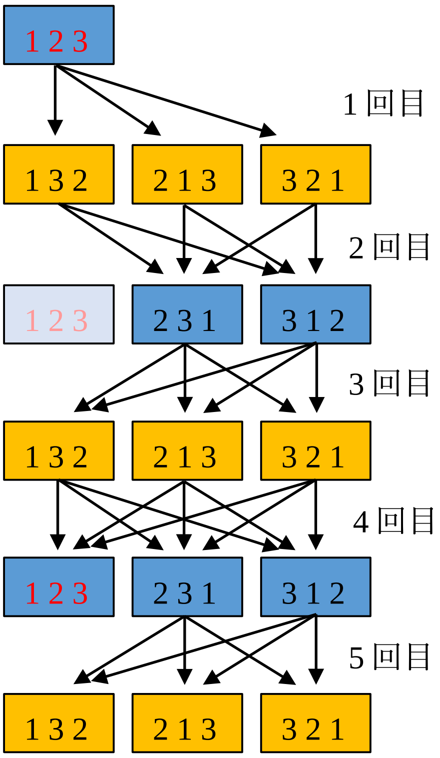
5. 条件を変えたり、新しい設定を加えるなどで、さらに面白い問題ができそうなら、作って解いてみてください。

解説と講評

この問題ではペアの入れ替わりが起きるごとにどのように中身が移り変わっていくかの経過を追いかけていくと、入れ替わりの回数を追うごとにどんどんパターンが増えていってしまうので、なかなか大変です。しかし、入れ替わりがどう起きたかではなく、入れ替わった後どういう風に中身がそれぞれの体に入ったかという中身の配置について考えるとその種類自体はそれほど多くはないので、そちらに着目する方が実は得策であることがわかります。

1. 最初に 3 人の場合に何回か入れ替わった後にどうなったか、起こりうる中身の入り方(配置)の数を数えてみると、(3 人のうち誰が a さんの体に入るか)×(残りの 2 人のうち誰が b さんの体に入るか)×(残り 1 人のうち誰が c さんの体に入るか)ですので、実は 3×2×1＝3!＝6 通りしかないことがわかります(!は階乗を意味します。)。

まず全員が元々の体に入っている状態から 1 回ペアの入れ替わりが起きた場合を考えます。その後にとりうる中身の配置の数は誰が入れ替わりに加わらなかったか、によって 3 通りあります(左図参照)。ここで元々の配置とあわせると既に配置としては 4 通りでてきたことになるので、実は残っている配置は他に 2 通りしかありません。



後は繰り返し

実際、次にもう一度 2 回目の入れ替わりを起こしてみると 2 通りの配置しか現れないことがわかります。体の順を 1 2 3 に固定して中身の順だけ書くと、2 3 1 と 3 1 2 の 2 つの配置で、各自が一つづつ隣にずれる置き換えを行った状態(巡回置換といいます)です。とりあえず、ここでは前者を左回り、後者を右回りと呼ぶことにしましょう。入れ替えの経過を追っていった場合にはパターンの数は(最初誰が余るか)×(次に他の 2 つのペアのどちらが入れ替わるか)＝3×2＝6 通りあるはずですが、実際にはその結果として現れる配置は 2 通りしかなく、そこに行きつく経過のパターンがそれぞれ 3 通りづつあることがわかります。

2 回入れ替わりが起きたところでとりうる中身の配置はすべて出尽くしているので、そこから先には実はあまり新しいことは起きません。実際 3 回目の入れ替わりをやってみますと、1 回入れ替わったときに現れた 3 つの配置のいづれかに戻ります。後は基本的に繰り返しということです。

ここまで調べておくと、奇数回の入れ替わりで全員が元の体に戻ることはないとわかるので、2 回の入れ替わりをまとめて考えた方がよいことがわかります。上述の通り 2 回入れ替わりが起きると[右回りもしくは左回りの巡回置換]になり、それぞれの途中経過のパターンは 3 通りづつです。したがって最短で元の状態に戻るのは[右回り]の後の[左回り]、またはその逆の計 **4 回** のペアの入れ替わりが起きたあとで、パターン数は最初の 2 回の入れ替わりについて(右回りか左回りか)×(3 つのうちどのパターンか)＝2×3 通り、次の巡回置換は向きが逆回りに決まっていて、かつ 2 回目に入れ替わりを行ったペア以外から始まるパターンでなければいけないので 1×(3−1)通り、併せて [2×3] × [1×(3−1)] = **12 通り** ということになります。また次に短くて元に戻れるのは[右回り] 3 連続もしくは[左回り] 3 連続の **6 回** の入れ替わりを行った後で、パターン数は[2×3] × [1×(3−1)] × [1×(3−1)] = **24 通り** ということ

になります。

2. 問1で、奇数回の入れ替わりでは 1 人が元の体で 2 人が入れ替わった 3 通りの配置、偶数回の入れ替わりでは元の配置かその巡回置換のあわせて3通りと、入れ替わりが奇数回（**奇置換**）か偶数回（**偶置換**）かでとりうる中身の配置が分かれていることにきづきました。まず、このことがもっと人数が増えた場合でも一般的に言えるのか考えてみましょう。

　まず n 人の参加者に 1 から n まで番号を振って番号順に並んでもらいます。以後、体は順番に並んだ状態にしておき、中身の順だけを書いて入れ替わった状態を表すことにします。最初は中身も 1　2　3　4　…　n と並んでいるとして、そこで例えば i 番目の人と i+3 番目の人の中身が入れ替わるとします。すると中身は

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad i-1 \quad i+3 \quad i+1 \quad i+2 \quad i \quad i+4 \quad \ldots \quad n$$

という並びになって一部大小の順序がおかしくなります。この　n　人の中で色々作れるペアごとに見てみると、大きい数が前に行くように順序の変わったペアが全部で 5 つできたことがわかります（赤線で結んだペア）。そこから一般的に考えると m だけ数が離れたペアで入れ替わりが起きると順序のかわったペアの数が $2m-1$ の奇数個できることがわかります。次にそれに加えてさらにどこかの l だけ離れたペアで 2 回目の入れ替わりが起きた後を考えます。やはり奇数個 $2l-1$ のペアの順序が変わるので、合わせると順序の変わったペアは偶数個 $2m+2l-2$ になります。ただ、この場合 1 回目の既に順序が変わったペアと 2 回目で順序が変わるペアが一部重複する場合も考えられます。しかし、その数を a 個とすると、$2m-1$ のうち a 個が元の順序に戻され、$2l-1-a$ 個新たに順序を変えられるので、順序の変わったペアの数は合わせて $2m+2l-2-2a$ でやはり偶数個であることは変わりません。その後同様に 3 回目の入れ替わりが起きれば再び順序の違うペアは奇数個になることになります。このように、並んでる数をみて順序の違うペアの数（**転倒数**）を数えてみれば、奇数なら奇数回の入れ替わり（**奇置換**）があったこと、偶数なら偶数回の入れ替わり（**偶置換**）があったということが途中経過をみていなくてもわかるということになります。つまり奇置換と偶置換ではとりうる配置の種類が完全に分かれていること（**置換の偶奇性**）が証明されました。

　これをもとに考えると、参加者が何人の場合でも奇数回目の入れ替わりで元に戻ることはないので、やはり 2 回の入れ替わりをまとめて考えた方がよいことがわかります。4 人で入れ替わる場合は、何回かの入れ替わりの後とりうる中身の配置の数は 4!=24 通りで、偶数回の入れ替わり（**偶置換**）でとりうる配置の数はその半分の 12 通りです。2 回の入れ替わりを組にすると[A: 2 つの異なるペアの入れ替わり]と[B: 1 人はそのままで他の 3 人の巡回置換]の 2 種に大きく分けることができます。[A]を行った後にできる中身の配置は（ペアの取り方）=3 通りで、[B]の後の配置は（誰が余るか）×（右回りか左回りか）=4×2=8 通りあります。もともとの配置を加えるとあわせて 12 通りでちょうど偶置換でとりうる中身の配置の数と等しいので、この 12 種の配置すべてに 2 回の入れ替わりだけで移れるし、その 12 種の配置のどれからも適当な 2 回の入れ替わりを行なえば全員が元の体に戻れることがわかります。まず4回で元の体に戻る場合を考えてみると、[A]-[同じ A]では同ペアの連続入れ替わり禁止の条件に反し、[B]-[同じ B の逆回り]という形で元に戻ると一人が入れ替わりを経験せずやはり条件に反します。したがって、4 人の場合には、与えられた条件を満たして最短で元の体に戻れるのは 6 回の入れ替わりの後で、[A]-[別の A]-[別の A]、[A]-[B]-[特定の B]、[B]-[A]-[特定の B]、[B]-[別の B]-[特定の A か B]という形のいづれかになります。

入れ替わりのパターン数を数えましょう。[A]、[B]ともに 2 つの入れ替わりからなりますが、[B]は入れ替わりの順序によって結果が異なるので時間順に入替 1、入替 2 というように入れ替わるペアを区別します。[A]のパターン数は（ペアの取り方）×（入れ替わる順序）で、最大 3×2 通り、[B]のパターン数は（誰が余るか）×（右回りか左回りか）×（3 つのうちどのパターンか）で、最大 4×2×3 通りありますが、これに同ペアの連続入れ替わり禁止などの条件による制約が加わります。前述のように大まかには下記の a)から e)のパターンがあるのでそれぞれ見ていくことにします。

a) [A]-[別の A]-[別の A]

- ここでは 3 つの[A]はすべて異なるペアの取り方になります。

　パターン数は [3×2] × [(3−1)×2] × [1×2] = 48 通り

b) [A]-[B]-[特定の B]

- 同ペア連続入れ替わり禁止条件より[中間の B]の入替 1 は[最初の A]と異なるペアを取る必要があります。
- この場合、[中間の B]の入替 2 は常に[最後の B]には含まれず最後は 3 つのパターンのどれも可能です。

　パターン数は [3×2] × [4×2×(3−1)] × [1×1×3] = 288 通り

c) [B]-[A]-[特定の B]

- 同ペア連続入れ替わり禁止条件より[中間の A]で[最初の B]の入替 2 と異なるペアを取る必要があります。
- 同ペア連続入れ替わり禁止条件より[最後の B]の入替 1 は[中間の A]と異なるペアを取る必要があります。

　パターン数は [4×2×3] × [(3−1)×2] × [1×1×(3−1)] = 192 通り

以下のようにまず[B]を 2 回続ける場合は[最初の B]と[中間の B]の両方に含まれる体が 2 人分あるので、[中間の B]でそのうちの一人の心を元に戻す方向に回すか逆に回すかでその後が変わってきます。前者の場合が e)、後者は d)です。それぞれで[中間の B]の周る向きは決まっています。

d) [B]-[誰も元に戻さない向きの別の B]-[特定の A]

- [最初の B]の入替 2 の片方の人のみを[中間の B]の 3 人に含むか、両方を含むかで場合分けがあります。
- 前者の場合、[中間の B]で 3 つのパターンをどれもとれるように見えますが、実際は入替 2 が[最後の A]のペアと重ならないようにするために 2 通りしかとれません。
- 後者の場合、[中間の B]の入替 1 が[最初の B]の入替 2 と異なる必要があるので、やはり中間では 3 つのパターンのうち 2 通りしかとれません。そのかわりこの場合には常に[A]のペアとは重ならないようになります。

　パターン数は [4×2×3] × {[2×1×(3−1)] + [1×1×(3−1)]} × [1×2] = 288 通り

d)は b)と逆の順番で入れ替わりが起きており、b)とパターンの数は同じになるはずですので検算ができます。

e) [B]-[一人を元に戻す向きの別の B]-[特定の B]

- d)と同様に[中間の B]で、[最初の B]の入替 2 の片方の人のみを含むか、両方を含むか場合分けがあります。
- 前者では[中間の B]で 3 つのパターンをどれもとれますが、そのうちの 1 通りは入替 2 の 2 人が両方[最後の B]に含まれることになるので[最後の B]で 2 つのパターンしかとれません。
- 後者の場合[中間の B]で 2 つのパターンしかとれませんが、常に入替 2 の片方の人しか[最後の B]の 3 人には含まれないので最後は 3 つのパターンがとれます。

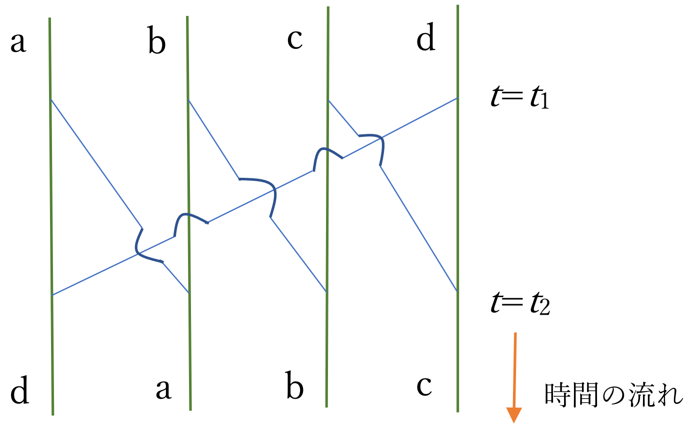
　[4×2×3] × {([2×1×2] × [1×1×3] + [2×1×1] × [1×1×(3−1)]) + [1×1×(3−1)] × [1×1×3]} = 528 通り

以上結論として、最短で元の体に戻れるのは **6 回** の入れ替わりのあとで合計 **1344 通り** のパターンがあります。

3. これまで同様 2 つの入れ替わりを組で考えます。5 人の場合、2 つの入れ替わりの組は[A′: 2 つの異なるペアの入れ替わり]と[B′: 2 人はそのままで他の 3 人の巡回置換]の 2 種類があります。[A′]の結果とりうる中身の配置の数は（2 つのペアの取り方）$={}_5C_2\times{}_3C_2/2!=15$ 通りで、後者では（どの 3 人をとるか）×（右回り or 左回り）$={}_5C_3\times 2!=20$ 通りです（${}_nC_m$ は n 個の中から m 個を選ぶ組み合わせの数を表す記号で ${}_nC_m=n!/m!/(n-m)!$です。）。もともとの場合を加えると 36 通りになりますが、5 人の中身が取りうる配置の数は 5!=120 通りありますので、そのうち偶置換でとりうる 5!/2=60 通りの配置の数には足りていません。偶置換で取りうるすべての配置をとるためには他に 4 回のペアの入れ替わりからなる[C: 5 人の巡回置換]（経路の取り方）=4!=24 通りが必要です（n 人を一人づつ隣にずらす巡回置換をペアの入れ替わりでやってみると、最短 $n-1$ 回目の入れ替わりで終わることはやってみるとわかります。しかし、3 人の巡回置換でみたようにペアの順番等のパターンは一通りではないことに注意しましょう。）。このように 5 人以上になると偶置換で取りうる配置でも全員が元の体に戻るために必要な入れ替わりの数が 2 回や 4 回とまちまちになるので、入れ替わりの総数に着目した今回のような問題ではパターン数を数えるのが複雑になります。

元に戻るための回数について考えます。とりあえず 5 人の巡回置換が 4 回のペアの入れ替わりでできるので、往復すると 8 回の入れ替わりをすれば全員が元の体に戻れることがわかります。したがって、ここではそれより少ない 6 回で戻ることができるかということが問題になります。全員が入れ替わりを経験するためには、後で戻ることを考えると遅くとも 4 回目の入れ替わりまでに全員一度は入れ替わる必要があります。そこで全員が入れ替わるという条件で[A′]と[B′]を 2 つ組み合わせて、[A′]か[B′]を 1 回行った場合の結果と同じ配置になるケースがあるかを探索すればよいということになります。実際調べてみると、唯一 6 回で元に戻れるパターンとして、2 人の入れ替わりと 3 人の巡回置換を別々に行う場合（[A′]-[B′]-[別の A′]や[B′]-[A′]-[別の A′]の形で、最初の[A′]の片方のペアが 2 人とも[B′]の 3 人に含まれるとき）が見つかりますが、この場合は 2 人の方が同じペアの連続交換になるのでルールに違反します。したがって 5 人の場合、最短で全員が元の体に戻れるのは **8 回** ということになります。

4. 結論としては **ありえます** 。例えば、まずある時刻 t_1 で a さんがそれより未来の時刻 t_2 の b さんの体の中にいる人と入れ替わるとします。同様に t_1 の b さんが t_2 の c さんの体の中にいる人、t_1 の c さんが t_2 の d さんの体にいる人、t_1 の d さんが t_2 の a さんの体にいる人と並行して入れ替わると、a,b,c,d 全員が t_1 と t_2 の間の期間をスキップしてしまったことになります。言葉で書くと複雑ですが、ペアの入れ替わりは実は「あみだくじ」の形できちんと図示することができます（問3までの問題でも使えます）。ここでは縦棒はそれぞれの体、横棒が入れ替わりを示し、それらの線を順にたどっていくのがそれぞれの中身と考えることができます。上から下に時間が流れていると考えれば、問3までの同時刻の通常の入れ替わりは水平の横棒、問4の時間を超えた入れ替わりは斜めの線で表せます。上で説明した例は以下のように書けます。



上からそれぞれの線を追っていくと、どの人も時刻 t_1 で時刻 t_2 の隣の人の体まで時間をスキップしていることがわかります。したがって時刻 t_1 から t_2 の間には 4 人の中身は存在していないという状態が作れました。しかし、図で見るように 4 人の体はその期間も依然存在しているので、周囲の人には 4 人が見えているはずです。いったいどうなっているのでしょう。あみだくじを追ってみて解釈してみると、この場合の答えは、t_1〜t_2 の時間に閉じ込められた **4 人以外の第 5 の人格が 4 人の体を周回し続けている** 、と考えられます。その結果としておきる諸々の状況を周囲の人はみることになります。

この問4の状況はいわゆる「タイムトラベルのパラドックス」が生じるおかしな状態ですので、これが唯一の答えではないかもしれません。論理に矛盾がないのであれば色々な正しい答えがあってもよい、と思います。

5. 自由課題ですので解答例は特にありません。基本的には作ってくれた問題の数学的な面白さが答えの良さの評価基準となります。

((講評))

この問題の設定は少々非現実的ですが映画や漫画ではよく起きる話なので、興味を持って多くの人が問題に取り組んでくれたのはうれしく思います。問1の 3 人の入れ替わりでは、チーム「TKD∩暇人」(私立高田中 3 年)のほか、いくつかの個人やグループが偶数回目と奇数回目に現れる心の配置の違いに着目して系統的に答を出すことに成功しています。ただ、残念ながらその知見を問2以降に十分活かした解答は多くはなく、その中では 4 人の心の配置を、元に戻すために必要な入れ替わり数で分類したチーム「うどん」(筑波大学附属駒場中 3 年)や、任意の人数での置換の偶奇性をまず証明したチーム「うど」(筑波大学附属駒場中 3 年)らが注目されました。問2のパターン数については皆さん苦戦したようで、正答は栗林和輝君(私立東海中 3 年)とチーム「スパーキングファイターズ」(Axis Intl. School 小 6・筑波大学附属駒場・私立灘・私立開成中 1 年混成)に限られました。問3では前問からの類推のみで単純に 2 回入れ替わりを増やすという解答が多く見られたのですが、必ずしもそうであるとは限りません(補足を参照)。その中でチーム「う」(筑波大学附属駒場中 3 年)は 8 回より少ない可能性についても議論を繰り広げています。ペアの入れ替わりに関しては、「まず体があって心が乗り移る」という考え方のほかに「心が主体で体を交換している」と考えた人も結構いたようです。問3まではどちらでも特に変わりはないのですが、同時刻に複数の体に同じ人の心が入っていたり、誰かの心がいなくなったりする問4の設定では、後者の考え方の人は混乱してしまったようです。問4では前記のチーム「う」が、ループする人がいるならば 4 人が同じ期間をスキップできる、というように状況を具体的に把握できていました。

((補足))

以下に示す 4 つの条件を満たす要素(元といいます)の集合を「群」と呼び、様々な数学的な構造が代数学の群論という分野で研究されています。この問題にあるような、ある集まり(この場合は参加者の中身)を別の配置(参加者の体)に 1 対 1 で置き換えるような操作(置換)はそのような群の典型例として知られています。まず決まった数の参加者に対するすべての置換を集めると群の 4 条件を満たすことを示しましょう。

1)演算に対して、元の集合が閉じていること。

まず元の間で演算が定義でき、任意の演算結果もまた元の一つであることが求められます。置換の場合は、ある置換 B のあとに別の置換 A を行うことを置換の「積」AB として定義できます。置換を連続して行っても結

局何らかの置換になることは明らかなので、置換の集合は閉じているということができます。

2)結合則(AB)C=A(BC)が成り立つ。

任意の置換の積は全く同じ結果をもたらす他の置換に置き換えることができ、その順序を変えなければばその置き換えをしてみても結局その置換前後の結果は変わらないので結合則が成り立つといえます。

3)他の元と演算してもその元が変わらない単位元 e が存在する。

「何も置き換えない」という操作も置換の一つ(恒等置換)と考えれば、これが単位元に該当します。

4)$AA^{-1}=e$ となる逆元 A^{-1}が存在する。

ある置換と逆方向の置換も置換の一つには違いないので逆元は元のなかに存在しています。

このように置換操作自体が群をなしており、*n* 人の配置を置き換えるすべての置換の集合は *n* 次対称群と呼ばれます。群を構成する元の数は群の位数と呼ばれ、ここでは置き換えた後にとりうる配置の数と等しいので *n*!です。

置換には偶置換と奇置換の 2 通りがあることを問2で見ました。奇置換だけでは 2 つの積をとると偶置換になるので群として閉じていませんが、偶置換は積をとっても偶置換なので、恒等置換を加えると対称群の中でさらに小さな群(部分群)をつくっていることがわかります(*n* 次交代群といいます)。この交代群の位数は対称群の半分で、操作もペアの入れ替わりを 2 つ組にすることで半分の数になるので、使用すると問題の扱いが大分簡単になります。上記の解答例ではこれを利用しました。問2の解答の a)をみると、3 種類の[A]型の置換は恒等置換とあわせてさらに小さな部分群(クラインの 4 元群)をつくっていることもわかりますね。

ほかにもいくつか置換の性質を調べてみると、この問題を解くときの見通しがよくなります。

問3では置換の一つとして参加者の中身を一つづつ隣に移す巡回置換というものがあることを示しました。*n* 人が巡回する長さ *n* の巡回置換は最少で *n*–1 回のペアの入れ替わり(数学では互換といいます)の積でつくることができ、巡回経路の取り方は(*n*–1)!種類あります。ペアの入れ替わり(互換)自体も長さ 2 の巡回置換ということができます。

任意の置換がどういう構造をもつか少し調べてみましょう。ここでは前と同じく体の順番は 1 2 3 …と順番にならべておくことにして、中身の順番だけを書くことにします。例えば中身が 1 2 3 4 5 であったのが 3 4 2 5 1 に移る置換を考えます。どう移るか順に追っていくと、まず 1 が 5 の体に移され、そこにいた 5 は 4 の体、そこにいた 4 は 2 の体、2 は 3 の体、3 は 1 の体へというように、体の順でみると 1⇒5⇒4⇒2⇒3⇒1 という経路の巡回置換になっていることがわかります。中身が 1 2 3 4 5 であったのが 3 4 5 2 1 に移る置換の場合はどうでしょう。まず 1 が 5 の体に移され、そこにいた 5 は 3 の体、そこにいた 3 は 1 の体という経路の巡回置換と、それとは別に 2 は 4 の体、4 は 2 の体へという巡回置換が見つかります。この場合のようにお互いに要素の交わりがない入れ替わりの集まり(互いに素といいます)がある場合は経路が複数に分かれることもありますが、それぞれはやはり巡回置換になっていることがわかります。これは中身が体を移っていく経路を追いかけていったとき、最後の人は最初の人があけた場所に自然に戻ることを考えれば当然の結果ともいえます。そこで次のことがいえます。

「(恒等置換以外の)任意の置換は一つの巡回置換あるいは互いに素な複数の巡回置換の積であらわせる。」

素因数分解と同じで互いに素な巡回置換への分け方は置換ごとに一通りしかありません。巡回置換は互換の積であらわせるので、任意の置換はすべて互換の積で表せることもわかります。

これらのことから対称群の元（置換）がどのような構成になっているかをみることができます。
例えば 5 人が参加する置換（5 次対称群）では

a) 誰も動かない　　恒等置換　（構成する互換は 0 個で偶置換）
b) 3 人が動かない　一つの互換　（構成する互換は 1 個で奇置換）
c) 2 人が動かない　長さ 3 の巡回置換　（構成する互換は 2 個で偶置換）
d) 1 人が動かない　長さ 4 の巡回置換　（構成する互換は 3 個で奇置換）
e) 1 人が動かない　互いに素な互換 2 つの組み合わせ　（構成する互換は 2 個で偶置換）
f) 全員が動く　長さ 5 の巡回置換　（構成する互換は 4 個で偶置換）
g) 全員が動く　互いに素な長さ 3 の巡回置換と互換の組み合わせ　（構成する互換は 3 個で奇置換）

と書き出すことができ、これですべての元（置換の種類）が示せていることになります。実際、それぞれの元の数を（巡回参加者の選び方）×（巡回経路の取り方）の形で具体的に計算してみると、a) 1 通り、b) ${}_5C_2\times1!=10$ 通り、c) ${}_5C_3\times2!=20$ 通り、d) ${}_5C_4\times3!=30$ 通り、e) $({}_5C_2\times1!)\times({}_3C_2\times1!)/2!=15$ 通り、f) ${}_5C_5\times4!=24$ 通り、g) $({}_5C_3\times2!)\times({}_2C_2\times1!)=20$ 通りですので、元の総数はとりうる配置の数 $5!=120$ 通りと合致し、偶置換と奇置換は同数であることも確かめられます。問3で見たように、4 人までは偶置換は恒等置換と互換 2 個で構成されるものしかないですが、5 人以上では互換 4 個以上のものが加わり単純ではなくなることがわかります。

また、任意の人数 n 人で入れ替わるときに最短で元の体に戻れるペアの入れ替わり（互換）の回数についても示唆が得られます。まず確実に全員が入れ替わりを経験する長さ n の巡回置換でも必要な互換の数は高々 $n-1$ 回ですので、合計で $2(n-1)$ 回以下の入れ替わりで元の体に戻れることはわかります。ただ、全員が入れ替わりを経験するのを目的とするなら互いに素な複数の巡回置換を取った方が実は必要な互換の数が少ないことも同時にわかるでしょう。問3の 5 人の場合では互いに素な巡回置換に分けるとすると、長さ 3 の巡回置換と互換の組み合わせになり、互換の方が同ペア連続入れ替わり禁止の条件に反してしまいました。しかし 6 人の場合を考えるなら、互いに素な 2 つの長さ 3 の巡回置換を行うと合わせて 8 回の互換で元の体に戻ることができ、長さ 6 の巡回置換を行う場合の $2\times(6-1)=10$ 回より少ない回数で済む、というようなことも見えてくるだろうと思います。

ここまで、置換について少し詳しく調べてみましたが、実は問4のような仮定をすると、その構造は根本から崩れてしまいます。たとえば誰かが時間をスキップしている期間をみれば、スキップしている人の中身はそこではいなくなっており、代わりに一人の中身が複数の体に入っているなど、そもそも中身の数というのが保存されておらず、ここには 1 対 1 の置き換えという対称群の基本的な構造ももはや存在していません。問4で示した例でも、最後の結果だけみれば長さ 4 の巡回置換の結果と同じですが、ペアの入れ替わりは通常の 3 回ではなく 4 回行われているのがわかります。また、この状態では入れ替わりの時刻や順序をどのように定義するかというのも実はなかなか難問であることもわかるでしょう。しかし、これらのことは問4で設定された状態が無秩序であるということを意味しているわけではありません。実際には、「あみだくじ」で曖昧さもなく図示できることでもわかるように、この状態にはこの状態なりの規則や秩序が厳然と存在しているわけです。その数学的構造をさらに突き詰めて調べてみるのも非常に面白いと思います。

（６）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール 共通問題第３問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　鈴木　紀明（名城大学理工学部　教授）
村田　英康（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
高原　文規（愛知県立千種高等学校　教諭）
青木　勝人（愛知県立旭丘高等学校　定時制　教諭）

「50 ＋ 50 ＝ 98」

ちょっと驚きますが，水 50cc にエチルアルコール 50cc を加えると，100cc ではなくて，およそ 98cc になります．この現象が起こる正確な理由の説明は難しいのですが，水の分子とエチルアルコールの分子の大小の違いが一つの要因と思われます．これをモデル化した以下の問題を考えて下さい．

(1) 横 10cm，縦 $a$cm の長方形があります．直径 10cm の円 1 個と直径 5cm の円 4 個を長方形内に重ならないように置くとき，a を 20 より小さくできます．できるだけ小さい a の値を求めなさい．

(2) 底辺が長さ 10cm の正方形，高さが b cm の直方体があります．直径 10cm の球 1 個と直径 5cm の球 8 個を直方体に入れるとき，b を 20 より小さくできます．できるだけ小さい b の値を求めなさい．

(3) n を 3 以上の整数とします．上記の (1), (2) の主張を n の場合に考えて下さい．すなわち，横 10cm，縦 $a_n$cm の長方形があります．直径 10cm の円 1 個と直径 $10/n$ cm の円 n^2 個を長方形内に重ならないように置くとき，a_n の最小値を求めなさい．また，底辺が長さ 10cm の正方形，高さが $b_n$cm の直方体があります．直径 10cm の球 1 個と直径 $10/n$cm の球 n^3 個を直方体に入れるとき，b_n の最小値を求めなさい．とりあえず $n=3$ の場合を考えてみて下さい．

解説と講評

§1. 水とアルコールを混ぜると体積が減少するという事実は 20 年程前に誰かに聞いて，ずっと頭の片隅にありました．昨年に一念発起？して，確認してみました．薬局でエチルアルコール (エタノール) を買い，化学実験室のメスシリンダーを借りて実際に混ぜてみると，確かに 50 + 50 が 98 くらいになりました．理科教育の専門家にこの事実について聞いたことがありますが，分子間引力や化学ポテンシャルなどの色々な要素が混じりあっていて，単に分子の大小によって説明できるものではないと言われました．この問題を議論しているときに，福井大学の保倉先生から 2 つの資料提供を受けました．

[1] アトキンス，物理化学 (上)，東京化学同人，8 版，2008

[2] 米山正信，化学のドレミファ (1)，反応式がわかるまで，黎明書房，1997

[1] は世界的な名著である大学生の物理化学の教科書です．この 5 章は単純な混合物についての記述があり，大量の水に少しのエタノールを加えた時の体積変化に触れていますが，私にはこの本からは「50 + 50 = 98」となる理由は理解できませんでした．[2] は化学に関する中高生向けの啓蒙書です．2 章で「50 + 50 = 96」を扱っています．

体積だけでなく，重さや密度も考えています．この本の結論は「すべての物質は粒からできている」と「粒と粒の間にはすき間がある」でした．ところで 98 ではなくて 96 と書かれているのは不思議ですが，使用したエタノールの濃度の違いに関係しているのではと思います．

異なる物質を混ぜ合わせると体積が減ることをを "一休さん" に聴いてみましょう[1]．庄屋さんに「コメを一升と大豆を一升上げましょう」と言われた一休さんは「それでは二升マスにまず大豆を一升分入れて下さい．それから二升マスが一杯になるまで米を入れて下さい」と頼みました．庄屋さんは同じことだと思って,「いいですよ．あなたの望み通りしましょう」と二升マスに大豆と米を入れてくれました．一休さんは米を一升より多く得たことがわかりますか？大豆の間に米が入り込んで，その分だけ多くの米を得ることができたのです[2]．なお，文献 [2] では米とゴマで同様なことが書かれています．

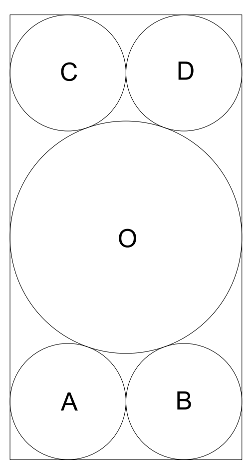
§2. それでは今回の問題の解説に移ります[3]．(1), (2) は非常によくできていて感心しました．シニアでは 30 人 (グループ)，ジュニアでも 15 人 (グループ) 程が正解に達していました．(1), (2) の解答の概略を書きます．

(1) $\boxed{\textbf{平面}, n=2 \textbf{のとき}}$ 下図のように置く場合が最小になります．各円の中心を A, B, C, D, O とし，円 A, B の接点を H とします．このとき，

$$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2 = \left(5 + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 50$$

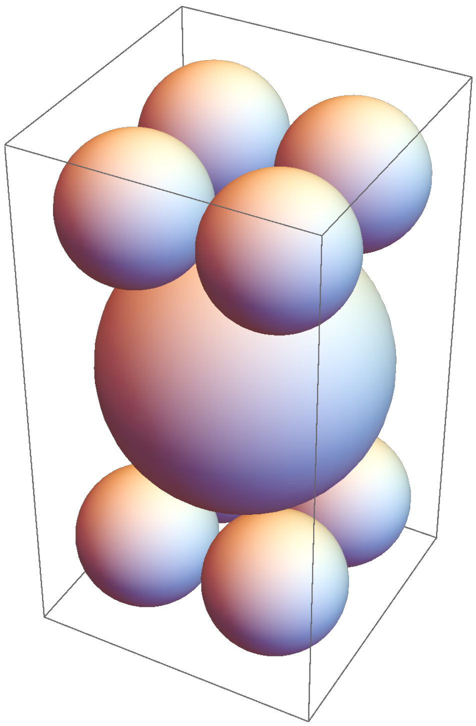
となるので

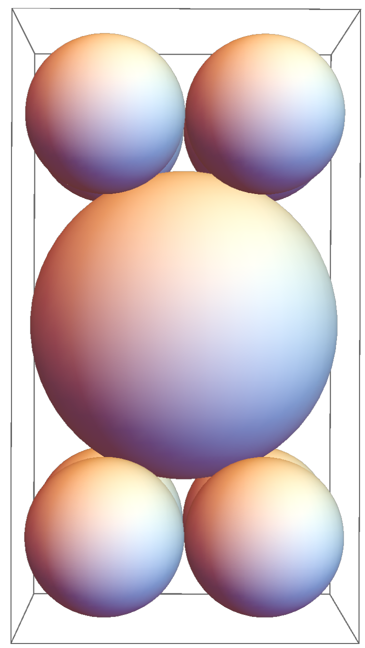
$$a = 2(\mathrm{OH} + \mathrm{AH}) = 10\sqrt{2} + 5.$$



[1]今の中高生の皆さんは "一休さん" を知っていますか？
[2]「大豆と米が混じり合って困る」などの余分なことは考えないこと．
[3]図の作成や幾つかの細かい計算について愛知工業大学の中村豪先生の手を煩わせました．ここに感謝を申し上げます．

(2) $\boxed{\textbf{空間}, n=2\ \textbf{のとき}}$ 下図の様に小さい球を 4 個置き，そのうえに大きい球を置いて，さらに小さい球を 4 個置くことになります．





右図は横から見たものです．下の 4 つの球の中心を A, B, C, D とし，半径 5 の大きい球の中心を O とします．O から正方形 ABCD への垂線の足を H とすると

$$\mathrm{OH}^2 = \left(5+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{175}{4}$$

なので

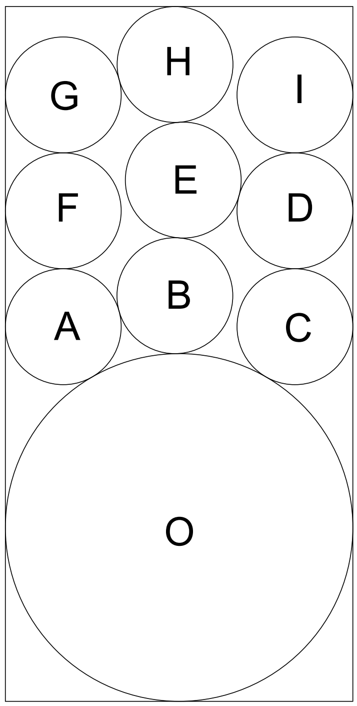
$$b = 2(\mathrm{OH}+\frac{\mathrm{AB}}{2}) = 5\sqrt{7}+5$$

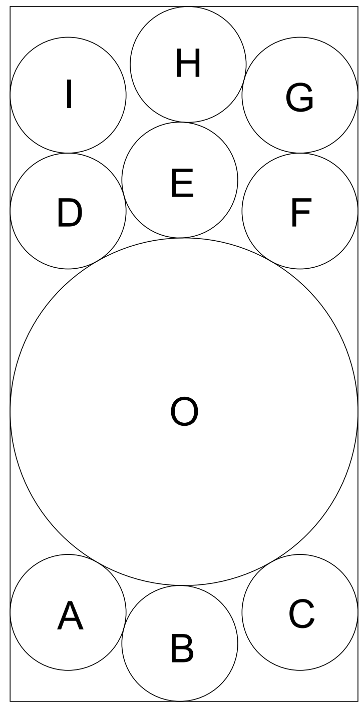
となります．

(3) $n=2$ の場合に比べると，$n=3$ はほとんどできていません．どうしたのかな？という感じです．$n=2$ のときは小さい円を左右対称に置きましたが，この考えが邪魔をしたのでしょうか？奇数の場合に左右対称に置くとちょうど 20cm になってしまいます．

$\boxed{\textbf{平面,}\ n=3\ \textbf{のとき}}$ 下左図は両端の円 A, F, G, C, D, I をそのまま積み上げ，その間の円 B, E, H を左，右に交互に接する様に置きました．

右図は一番上段にある G, H，I を下段に持ってき場合です．





OSS-6 の人の解答には左図が書かれていて，中学生のグループ JG-20 には右図が書かれていました．高校生のグループ SG-31 は右図の場合の高さを求めようと計算をしています． 残念ながら途中に計算ミスがあって最終的な値にはたどり着きませんでした．

左図の高さを a_3'，右図の高さを a_3'' とします．

計算は複雑なのでここでは省略しますが

$$a_3' \approx 19.9818\cdots < 20$$

$$a_3'' \approx 19.9891\cdots < 20$$

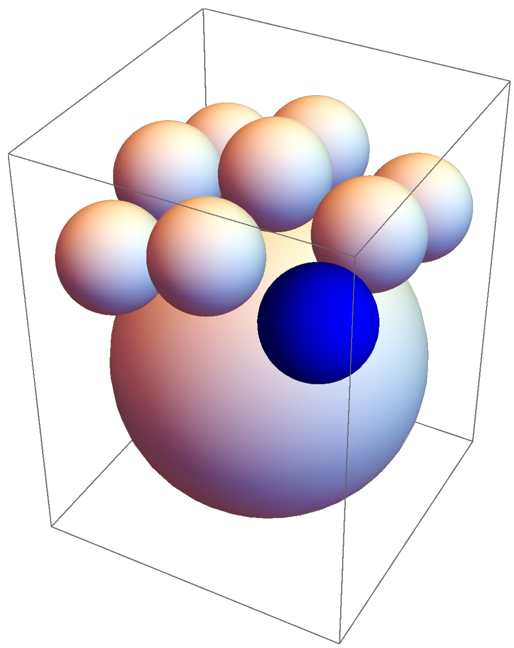
となり，ともに 20cm より小さくなります．左図の方が短いことは計算をしないとわからないと思います．

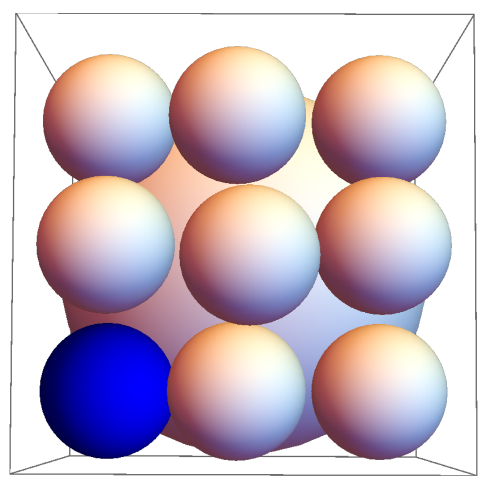
私は $a_3 = a_3'$ である，すなわち，左図の場合が最小であると思いますが，その証明はできてはいません[4]

[4]12 月 24 日に松下先生 (名大) からクリスマスプレゼント？の連絡があり，一つの疑問が否定的に解決しました.「上左図で円 F を E に接するように動かすと F は少し下がります．すると円 G も下がり，円 H も下がる」．中村先生 (愛工大) に計算して頂いたこのこの値は 19.9815 で確かに a_3' より小さくなります．私の予想は外れました．両先生に感謝申し上げます

空間, $n = 3$ のとき　この場合はさらに複雑になります．最小になるであろう配置を書いてみます．まず，次のように積み上げます (目印の意味で一つの球に青色をつけましたが，目印以上の意味があるわけではありません)．

1 段目



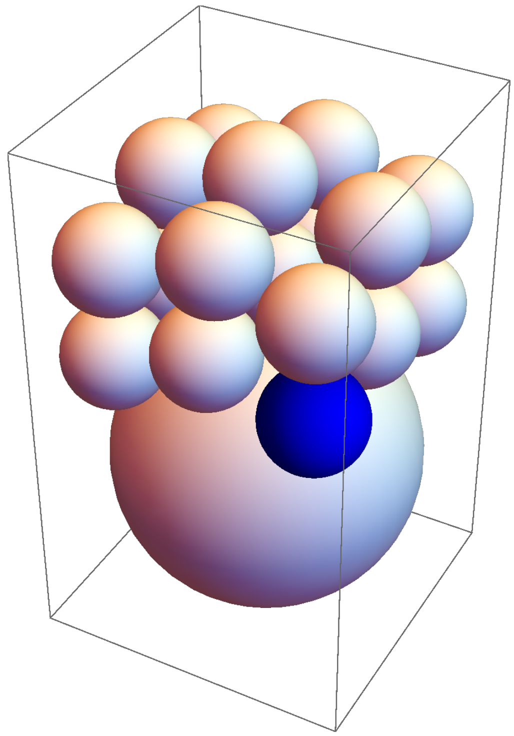


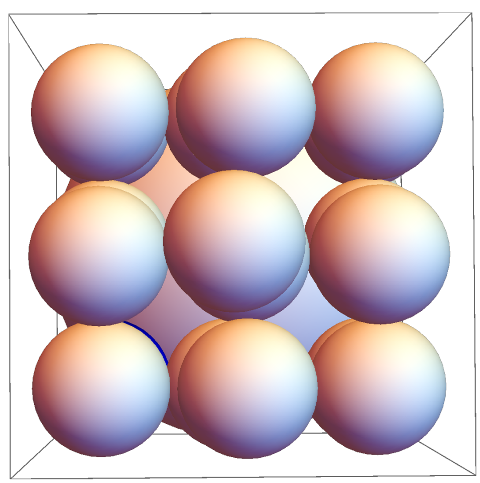
下図は 1 段目を上から見た図です．9 個の球を

G1	H1	I1
F1	E1	D1
A1	B1	C1

とします．まず 4 隅の A1, C1, G1, I1 は直方体の 2 つの側面に接するように配置します．右下隅の球 C1 には 2 つの球 B1 と D1 が接しないように，左上隅の球 G1 には 2 つの球 F1 と H1 が接するように，中央の球 E1 は B1 と D1 に接するように配置しています．

2段目



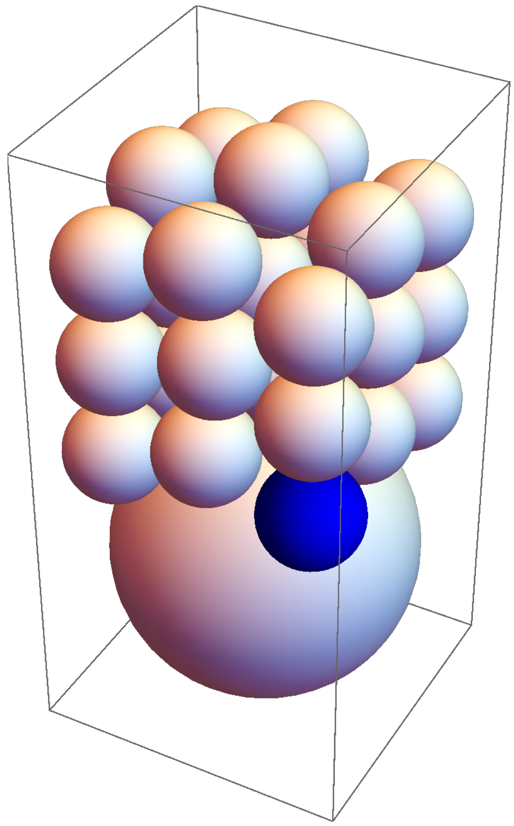


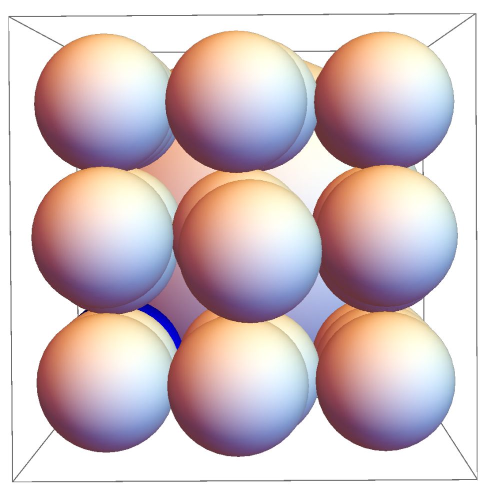
下図は2段目を上から見た図です．9個の球を

G2	H2	I2
F2	E2	D2
A2	B2	C2

とします．4隅A2, C2, G2, I2はそのまま球を積み上げ，C2にはB2とD2が接するように，G2にはF2とH2が接しないように，E2はF2とH2に接するように配置します．

3段目





下図は3段目を上から見た図です．9個の球を

G3	H3	I3
F3	E3	D3
A3	B3	C3

とします．4隅A3, C3, G3, I3はそのまま積み上げ，C3にはB3とD3が接しないように，G3にはF3とH3が接するように，E3はB3とD3に接するように配置しました．

計算は省略しますが，このとき直方体の高さ b'_3 は

$$b'_3 \approx 19.9536 < 20$$

となり，わずかですが 20cm より短くなります．b'_3 は最小と思いますが，証明ができているわけではありません．

平面，空間 $n=\infty$ のとき 残念ながら，$n \geq 4$ の場合の特筆すべき考察はありませんでしたが，SS-27 の人と二つのグループ OSG-3, FsG-1 は "$n=\infty$" の場合を考えました．このときは円や球は限りなく小さいわけですから，隙間なく入り込むと考えてよいでしょう．問題はどれだけの面積や体積を加えるかということです．100cm^2 と 1000cm^3 と考えるのも一案ですが，上記の人たちは，すべての n について

$$\text{半径 } 10/2n \text{ の円の } n^2 \text{ 個の総面積} = \pi(10/2n)^2 \times n^2 = 25\pi$$

であることを指摘しました．同様に球に関しても，小さい球の体積の総和は $1000\pi/6$ となります．$n=\infty$ の場合もこれらの面積や体積が増えると考えることは合理的です．これから

$$a_\infty = 5\pi, \quad b_\infty = \frac{10}{3}\pi \tag{1}$$

を得ています．これは興味深い指摘ですが，このことからすぐに，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5\pi, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{10}{3}\pi \tag{2}$$

が示されるわけではありません．a_n と b_n を正確に求めることは不可能と思いますが，等式 (2) は証明できるのではと思います．実際，面積と体積の比較により $a_\infty \leq a_n$，$b_\infty \leq b_n$ は容易に分かります．従って (2) を示すためには

$$a_n \leq a'_n \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} a'_n = a_\infty \tag{3}$$

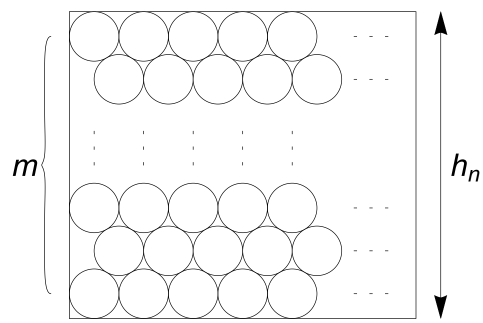
となるような "少し甘い評価 a'_n" を見つければよいのです．b_n についても同様です．ぜひ挑戦してみて下さい．

§3. 前節までの内容で 11 月 10 日 (日) の表彰式のときに問題解説をしました．一人の高校生に (1) の a_∞ (そして b_∞ も) はおかしいのではないかと言われました．私は，そのときも，彼に (1) や (2) が成り立つような説明をしたと思うのですが，いささか勘違いをしていたようです．翌日には，問題作成委員の松下琢先生からも，平面を円で充填する場合の充填率が約 90.7%である旨を含めたいくつかのご指摘をメールで頂きました．結果を述べるとお二人の指摘は正しく，私の予想した (2) は誤っていたようです．

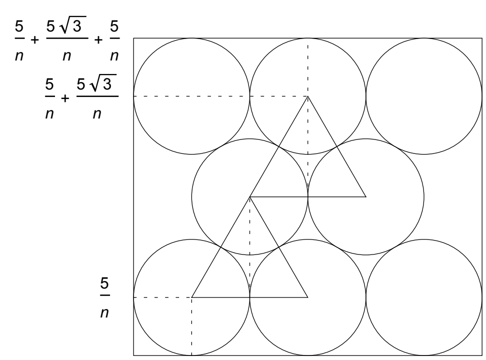
修正した“解答”を考えてみましたが，これは実験的考察なので論理の飛躍などがあるかもしれません．その点はご容赦願います．まず，“充填率”について考察します．直径 $10/n$ の小円が N_0 個あるとします．総面積を S_0 とすると $S_0 = 25\pi N_0/n^2$ です．これは横 10 の長方形とすると高さは

$$h_0 = \frac{S_0}{10} = \frac{5\pi N_0}{2n^2} \tag{4}$$

です．次に N_0 個の小円を下図のように並べます (横は 10cm です)．



この場合は小円は横には n 個と $n-1$ 個が交互になりますので，平均として，横に $(2n-1)/2$ 個並ぶと考えます．m 段まで並べると，個数は N_0 個なので，$N_0 = m(2n-1)/2$ です．底辺からの高さを h_n とします．例えば， $m=3$ のとき



より $h_n = 5/n + 5\sqrt{3}/n + 5/n$ です．同様に考えると，

$$h_n = \frac{5}{n} + \frac{5\sqrt{3}}{n} \times (m-2) + \frac{5}{n}$$

となります．よって $N_0 = \alpha n^2$ として書き換えると，$m = 2\alpha n^2/(2n-1)$ より

$$\frac{h_0}{h_n} = \frac{5\pi\alpha}{2}\left(\frac{10}{n} + \frac{5\sqrt{3}}{n} \times \left(\frac{2\alpha n^2}{2n-1} - 2\right)\right)^{-1}$$

となり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_0}{h_n}=\frac{5\pi\alpha}{2}\frac{1}{5\sqrt{3}\alpha}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\approx 0.9069 \tag{5}$$

を得ます．これは面積 S の集合の中に直径 $10/n$ の小円が

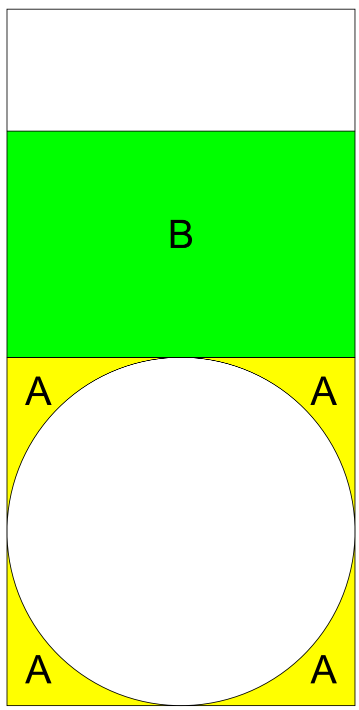
$$\frac{S}{25\pi/n^2}\times\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \tag{6}$$

個しか入らないことを意味します (充填率が約 90.7%ということです)[5].

さて，元の問題に戻ります．正方形から直径 10 の円を除いた集合 (下図の四隅の A の部分) の面積は $100-25\pi$ ですから，4 隅に入る小円の個数は (6) より

$$\frac{100-25\pi}{25\pi/n^2}\times\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\left(\frac{4}{\pi}-1\right)\frac{\pi}{2\sqrt{3}}n^2$$

となります.



これより，正方形の上の部分 B に置かれる小円の個数は

$$N_0=n^2-\left(\frac{4}{\pi}-1\right)\frac{\pi}{2\sqrt{3}}n^2=n^2\left(1-\frac{4-\pi}{2\sqrt{3}}\right)$$

[5] こちらも松下先生 (名大) から “首尾一貫” していないとの指摘を受けました．充填率を使うなら,「n^2 個の小円を並べると $25\pi\times 2\sqrt{3}/\pi=50\sqrt{3}$ の面積が必要である．4 隅の面積を引くと，B の部分の面積は $50\sqrt{3}-(100-25\pi)$ となり，横が 10 なので高さは $5(\sqrt{3}+\pi/2-2)$ がすぐに出ます」．私としては，(5) から充填率が得られることを書きたかったので，このように書いたのですが，(6) で一般論を使うのなら，話があっちゃこっちゃ(名古屋弁らしい) ですね.

です．このとき (4) から

$$h_0 = \frac{5\pi N_0}{2n^2} = \frac{5\pi}{2}\left(1 - \frac{4-\pi}{2\sqrt{3}}\right)$$

となるので (5) から

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h_0 \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = \frac{5\pi}{2}\left(1 - \frac{4-\pi}{2\sqrt{3}}\right) \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 5(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} - 2) \approx 6.5142$$

です．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値は (2) の $a_\infty = 5\pi \approx 15.7080$ に等しいのではなくて

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 10 + \lim_{n\to\infty} h_n = 10 + 5(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} - 2) \approx 16.5142$$

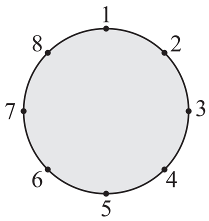
が正しい値だろうということです．

（７） 日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール
共通問題第４問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　岡﨑　建太（京都大学数理解析研究所　研究員）
伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）

「円盤の模様」

境界上にいくつかの点が等間隔に置かれた円盤を考えます。境界上の点たちには時計回りに番号 1, 2, 3,... が振られているとします。

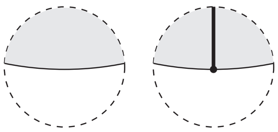


この円盤上に何本かの曲線を、円盤からはみ出したり浮かせたりせずに配置して「模様」を描こうと思います。ただし、この問題での曲線とは、端点を2つ持つ長さ有限の曲線のみを指すことにします。

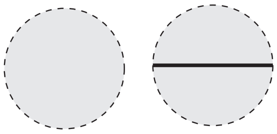
次のようにルールA、ルールBを定めます。

ルールA:

1. 円盤の境界上のどの位置においても、その十分近くでは次のいずれかのようになっている。
（ただし、細い実線は円盤の境界、太い実線は曲線の一部を表す。以下同様。）

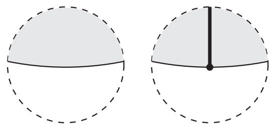


2. 円盤の境界以外のどの位置においても、その十分近くでは次のいずれかのようになっている。

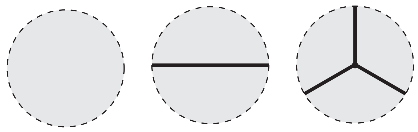


ルールB:

1. 円盤の境界上のどの位置においても、その十分近くでは次のいずれかのようになっている。



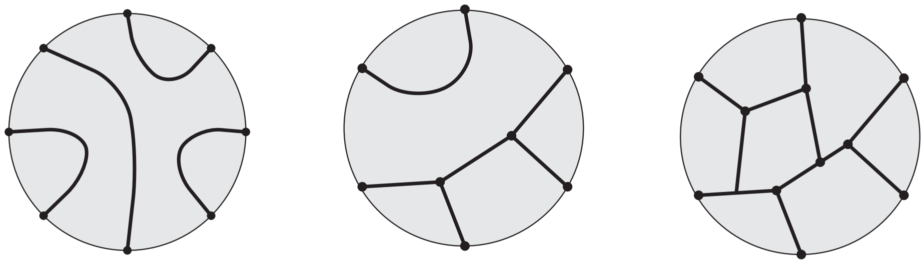
2. 円盤の境界以外のどの位置においても、その十分近くでは次のいずれかのようになっている。



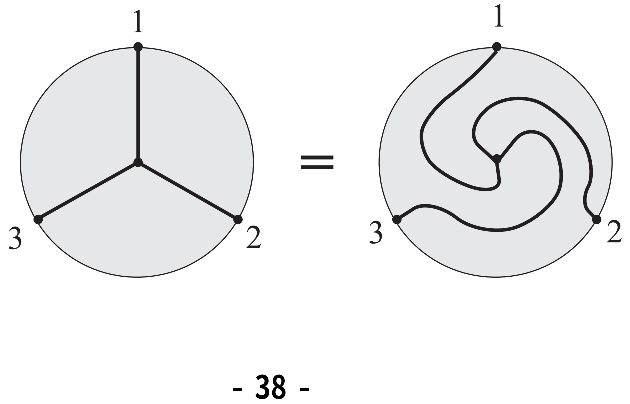
3. 曲線たちによって円盤はいくつかの領域に切り分けられるが、全ての領域は円盤の境界の一部に接している。つまり、曲線だけで囲まれるような領域は存在しない。

ルールAを満たすような曲線たちの配置を**A模様**、ルールBを満たすような曲線たちの配置を**B模様**と呼ぶことにします。特に、A模様はB模様です。A模様とB模様を併せて**模様**と呼ぶことにします。

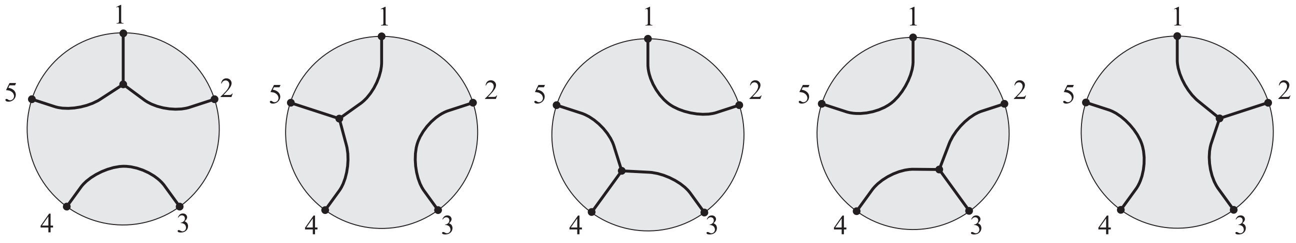
例えば次の図（境界上の点の番号は省略しています）の左はA模様（B模様でもある）、真ん中はB模様です。一方で、右はB模様ではありません。中央にある5角形の領域が円盤の境界と接しておらず、3. に反するからです。



ただし、円盤内で曲線を（円盤の境界上にある端点は固定しつつ）連続的に動かして一致する模様は同じ模様とみなします。例えば、

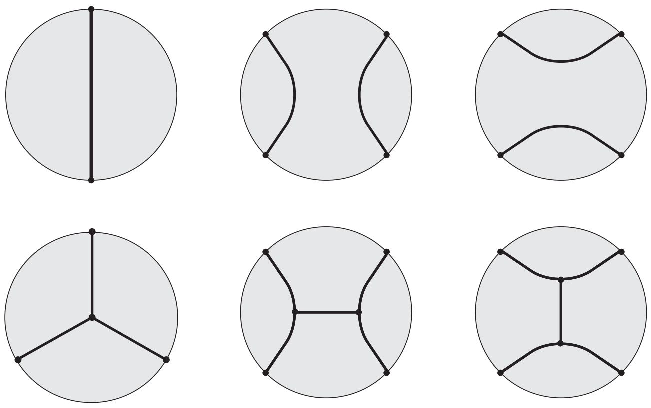


です。また、模様は境界上の点に振られた番号まで含めて区別するものとします。
例えば, 次の5つのB模様は全て異なります。



境界上の点の個数が $2m$ であるようなA模様の個数を a_m、境界上の点の個数が n であるようなB模様の個数を b_n とおきます。

例えば、次の図から $a_1=1$, $a_2=2$, $b_3=1$, $b_4 \geqq 4$ であることがわかります。また、$b_4=4$であることも実際に示すことができます。



問題

(1) a_3, a_4 の値を求めてください。

(2) a_m の値を求めてください。

(3) b_5 の値を求めてください。

(4) ルールBにもし3. が無かったら、任意の自然数 n に対して $b_n=\infty$、つまり、
境界上の点の個数が n であるようなB模様は無限個あることを示してください。

(5) 任意の自然数 n に対して b_n は有限であることを示してください。

(6) b_6 の値を求めてください。

(7) b_n の値を求めてください。

(8) あなたオリジナルの「模様」を定義して、その個数について論じてください。

（文責：岡崎 建太）

[はじめに]

本問では，円盤の「模様」の数え上げを通じて，そこに潜む数学的な構造と手法（複雑なモノを，より単純なモノに分けて考える）に気付いてもらうことを意図して出題しました．

「A模様」「B模様」という用語は本問だけのための造語ですし（“planar algebra” という元ネタはあるのですが），おそらく全ての生徒さんにとって慣れない概念であったと思います．

それにも関わらず，少なからぬ生徒さんが本問にトライしてくれたことに感謝いたします．

[解答例]

この問題の解き方に共通した指針は,

「困難は分割せよ」＝「複雑な図形は
より単純な図形に分けよ」

です.

A模様の数え上げ

まず,

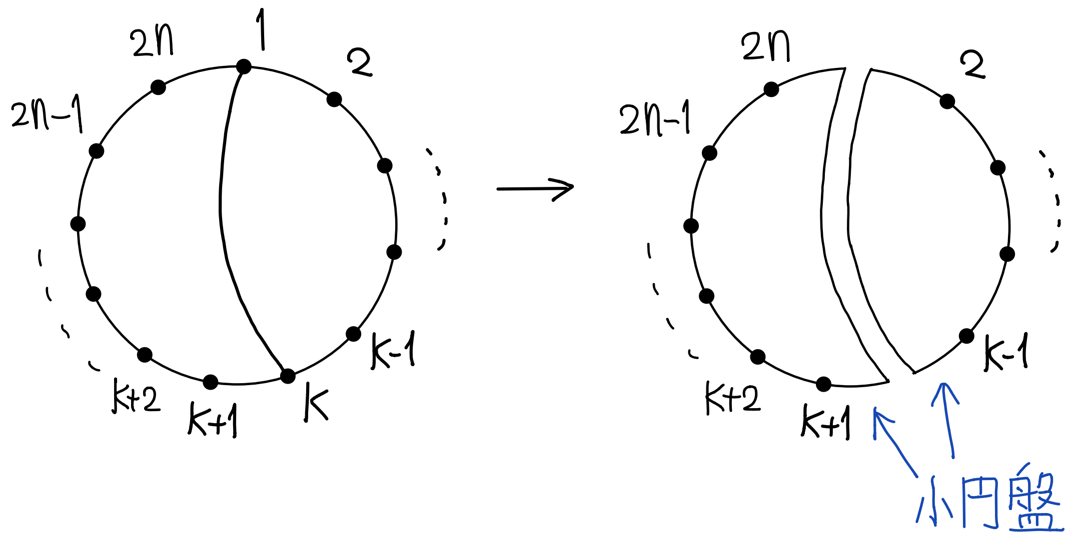
① 境界上の点が奇数個であるようなA模様は存在しない

ことに注意します. 曲線には必ず2つの端点があり, それが境界上の点に位置するからです.

次に, 点1は曲線によって点kとつながっていると

します．「困難は分割」の指針通り，この曲線

によって円盤を2つのパーツに切り分けます．



2つのパーツは各々

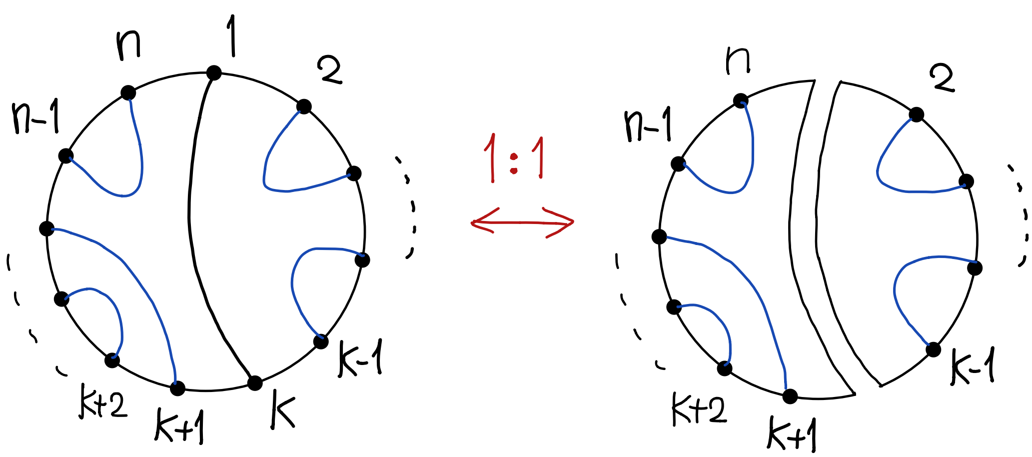
$2, 3, \cdots, k-1$ という $(k-2)$ 個の点，
$k+1, k+2, \cdots, 2n$ という $(2n-k)$ 個の点

が付いた小円盤だと思うことが出来ます．

（三日月みたいな形をしてて円盤じゃないじゃないか！
とツッこまれそうですが，そこはトポロジー的な
物の見方をしています．）

このとき注目してほしいのが,

> ②「点1～点kに曲線が引かれた円盤に
> A模様を書き込むこと」と,
> 「2つの小円盤にA模様を書き込むこと」
> は1対1対応している



ことです. このとき①により, $(k-2)$と$(2n-k)$は偶数,

つまり k は偶数でなくてはなりません. そこで

$k=2\ell$ とおくと, ℓは$1 \sim n$の値をとります.

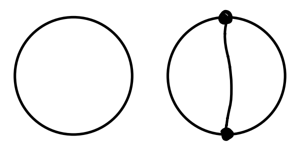
2つの小円盤は各々$2(\ell-1)$, $2(n-\ell)$個の点を

境界に持ちますから,

②より我々は次の漸化式を得ます。

$$③\quad a_n = \sum_{l=1}^{n} a_{l-1} a_{n-l}$$
$$= a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0 .$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$ であることは



定義よりほぼ明らかなので、

a_n は カタラン数 C_n であることがわかります:

$$④\quad a_n = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} .$$

ただし $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ です。中学高校では ${}_nC_k$ と表されることが多いです。

④きちんと示したい人は数学的帰納法を用いて下さい。

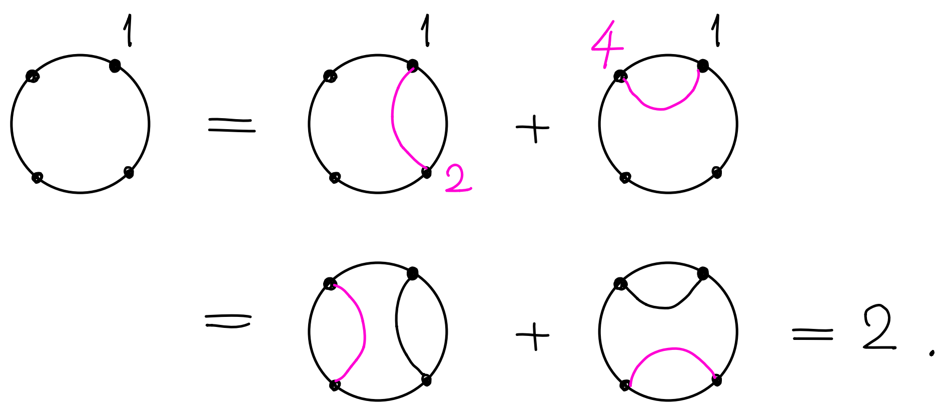
これにより，a_n の値は

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	--
a_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012	742900	--

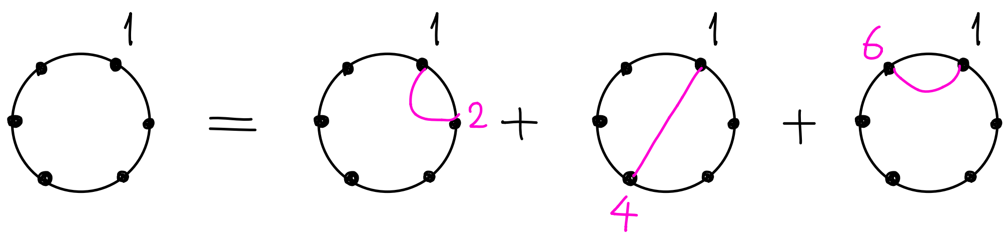
といくらでも求められますが，それだけでは味気ないので，

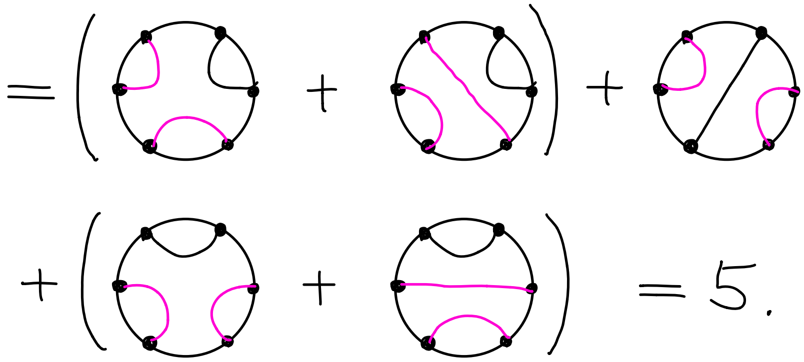
n が小さい所で A模様を実際に数え上げてみます．

<u>$n=2$</u>

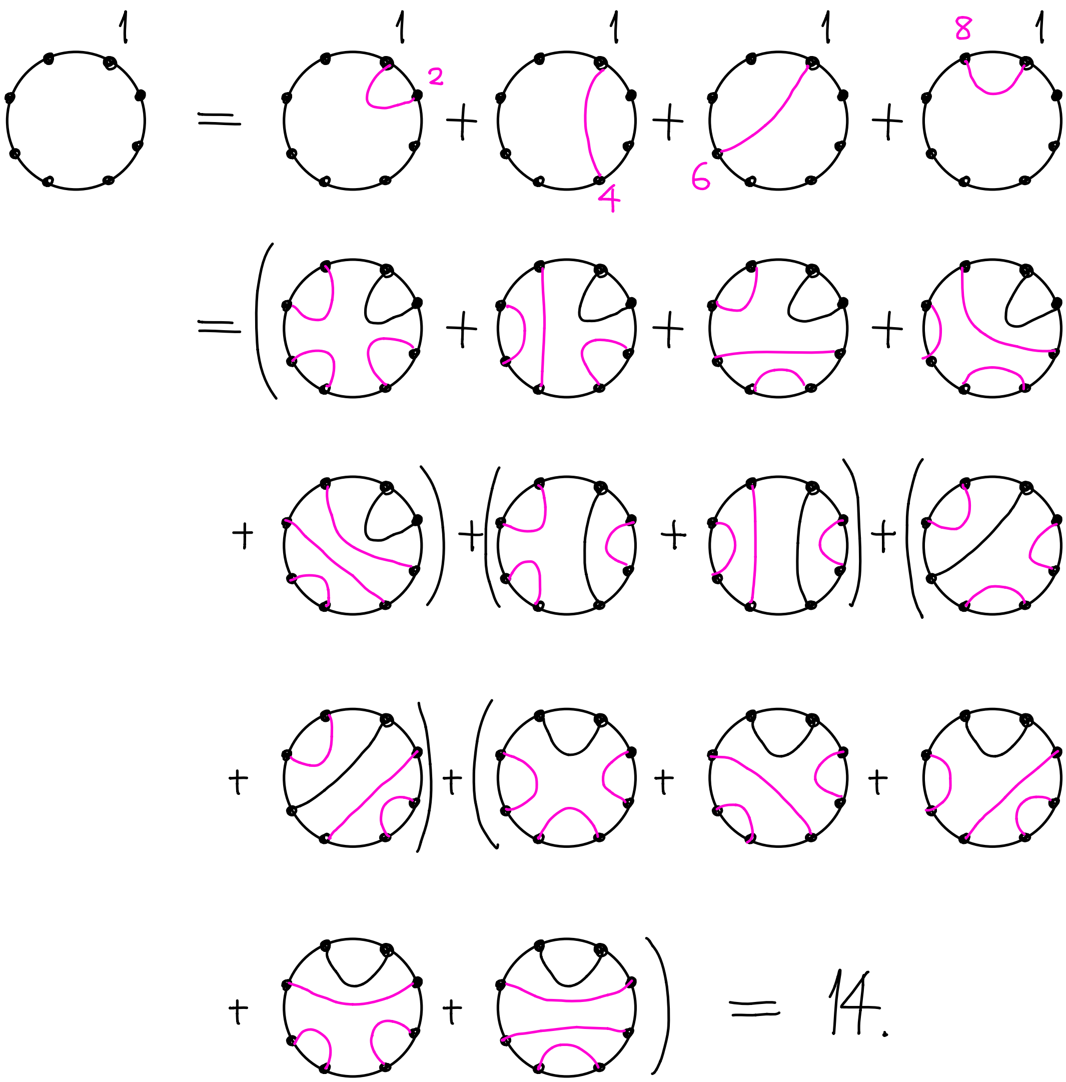


<u>$n=3$</u>

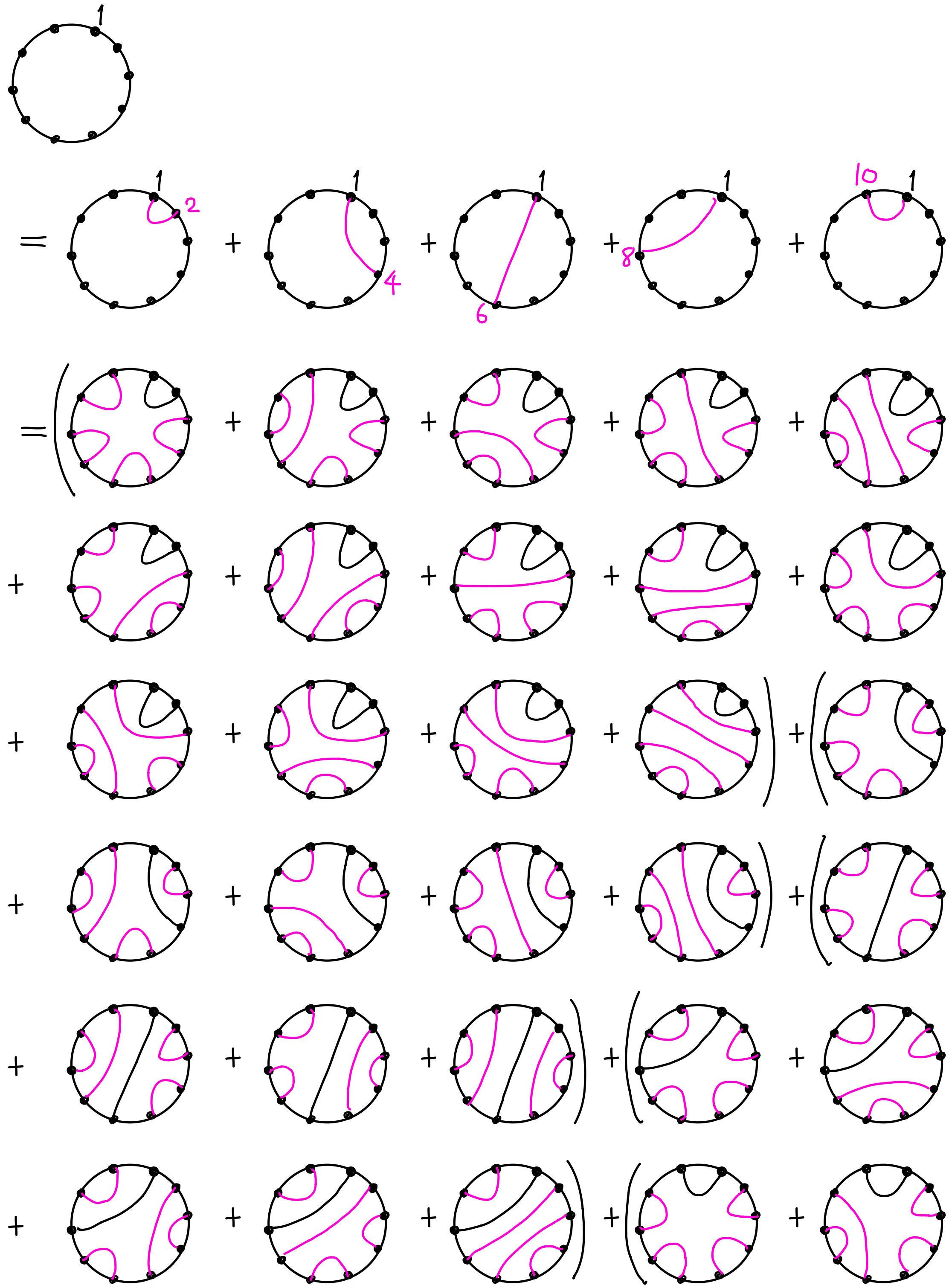


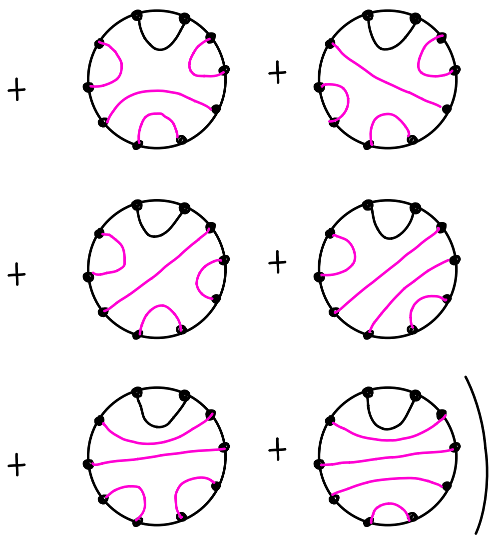


<u>n=4</u>



$n=5$





$= 42.$

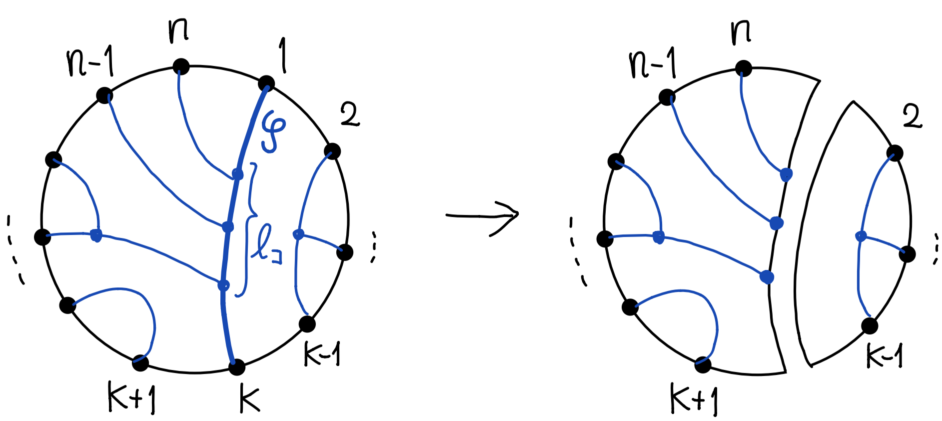
B模様の数え上げ

続いてB模様について考えます．A模様と同じように

円盤を2つに分割して考えたいのですが，実は安直に

同じ方法を用いることはできません．何故でしょうか．

次の図を見て下さい．



まず与えられたB模様に対し，先程と同様に，

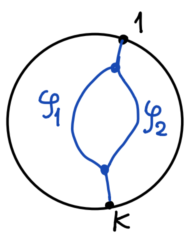
点1と曲線でつながっている境界上の点を点K

とおきたいのですが，先程と違いそのような点は

一般に複数個あります．そこで，点1と曲線で

つながっている境界上の点<u>の中で一番番号の小さい点</u>を点kとします．そして点1と点kをつなぐ曲線を$\wp$と呼びましょう． B模様のルール3.により，そのような$\wp$は1つしかないことがわかります．

(もし異なる2つの曲線$\wp_1$と$\wp_2$が共に点1と点kをつないでいるとすると，$\wp_1$と$\wp_2$によって囲まれる領域は円盤の境界に接しておらず，ルール3.に反します．



)

$\wp$には円盤内部の点が$l\ (\geqq 0)$個乗っているとします（上の図なら$l=3$です）．

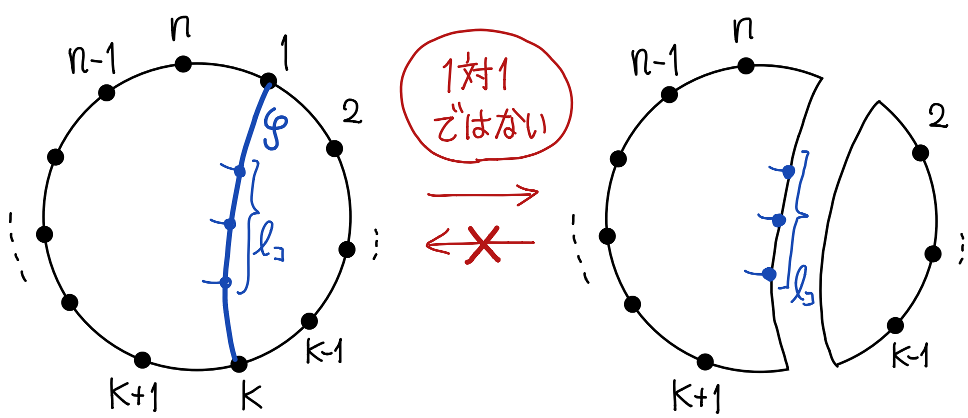
この$\wp$に沿って円盤を切り分けると，

境界に $(k-2)$ 個の点を持つB模様と，
境界に $(n-k+l)$ 個の点を持つB模様の組

が得られます．

フムフム，うまくいってるように見えます．が，ここで問題が

発生します． 実は，次の対応は1対1ではないのです！



- 境界にn個の点を持ち，
- 点1とつながっている点の中で
  一番番号が小さいものは点kで，
- 点1と点kをつなぐ曲線$\wp$には
  円盤内部の点がl個乗っている

ようなB模様

- 境界に $(k-2)$ 個の点
  を持つ B模様 と，
- 境界に $(n-k+l)$ 個の点
  を持つ B模様

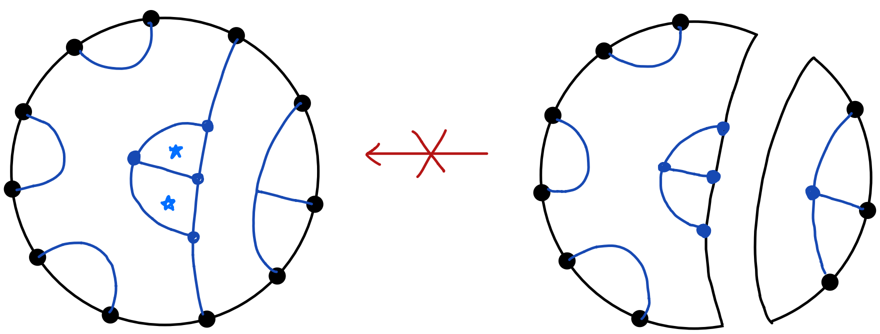
の組

何故でしょうか．端点に言うと，B模様を2つに切り分けると

2つのB模様ができますが，2つのB模様を貼り合わせたものは

B模様になるとは限らないのです．

このことは次の反例からすぐ分かります．



B模様でない！　　　　2つのB模様

左の図は，B模様のルール3．をみたしていません

（☆の面が境界に接していません）．

この齟齬（そご）を解消するため，以下ではB模様の

定義を拡張します．（このような考え方は数え上げの問題

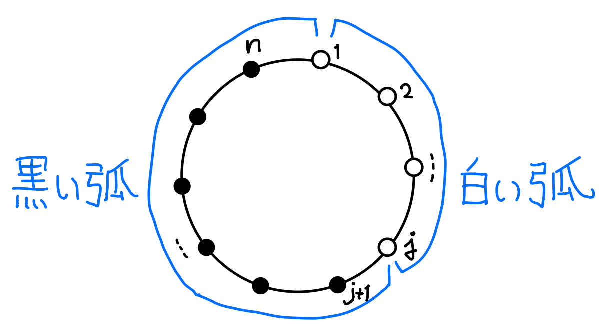
でしばしば出てきます（過去の数コンの問題など）．）

まず，用語をいくつか新しく定義します．

$b_0 = b_1 = 0$ なので，以下では $n \geqq 2$ のときのみを考えます．

- 境界上の点が n 個であるようなB模様を <u>B_n 模様</u> と呼ぶことにします．

- $1 \leqq j \leqq n/2$ をみたす自然数 j を固定します．
  点 $1, 2, \cdots, j$ を <u>白い点</u>，点 $j+1, j+2, \cdots, n$ を <u>黒い点</u>，
  隣り合った2つの白い点に挟まれた弧を <u>白い弧</u>，
  それ以外の弧を <u>黒い弧</u> と呼びます．



- <u>$B_{n,j}$ 模様</u> とは，B_n 模様で，更に次の

  $\boxed{\text{ルール } 3_j\text{：全ての領域は黒い弧に接している}}$

  をみたすものとします．

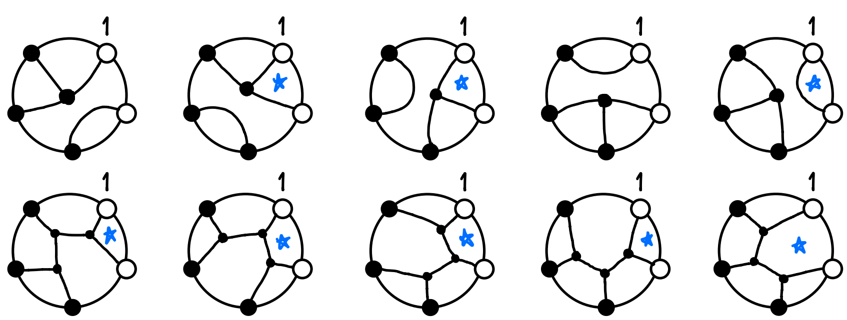
- 円盤の内部にある点を内点と呼びます.
- $B_{n,j,v}$ 模様とは, $B_{n,j}$ 模様であって, 内点の個数が v 個のものとします.
- $b_{n,j,v}$ ＝($B_{n,j,v}$ 模様の個数)

  $b_{n,j}$ ＝($B_{n,j}$ 模様の個数) とおきます.

[定義より

b_n ＝(B_n 模様の個数) です.] □

例えば $i=2$ のとき, 10個ある B_5 模様



の中で $B_{5,2}$ 模様であるものは2つのみなので

(☆ が黒い弧に接していない), $b_{5,2}=2$ です.

このとき，以下のことがチェックできます．

- $j=1$ のとき，円盤の境界は全て黒い弧なので，

  $B_{n,1}$ 模様は B_n 模様です．ゆえに

  ⑤ $\boxed{b_{n,1} = b_n .}$

- n, j：整数，$1 \leqq j \leqq n/2$ のとき，

  ⑥ $B_{n,j,v}$ 模様が存在する整数 v の範囲は $0 \leqq v \leqq n-2j$ かつ $n-v$ は偶数．

このことはオイラーの多面体公式を用いると

確かめることができます．

[証明の概略]　ある $B_{n,j,v}$ 模様について，

v, e, f：内点，曲線，領域の個数とする．

次が成り立つ.

㋑ $2e = n + 3v$ （境界上の各点には1本，各内点には3本の曲線が集まっているから）

㋺ $v - e + f = 1$ （オイラーの多面体公式）

㋩ $f \leqq n - j + 1$ （ルール3_j，及び（黒い弧の個数）$= n - j + 1$.）

㋑より $n+3v$は偶数なので，$n-v$も偶数.」

一方 $n - 2j \overset{㋩}{\geqq} 2f - n - 2 \overset{㋺}{=} -2v + 2e - n \overset{㋑}{=} v$.」

■

○ ⑥より次がわかります：

⑦ $$\boxed{b_{n,j} = \sum_{\substack{0 \leqq v \leqq n-2j, \\ n-v\text{は偶数}}} b_{n,j,v}.}$$

さて，以上のようにして

B_n模様，$B_{n,j}$模様，$B_{n,j,v}$模様

を定義しました．どうしてこんな(面倒くさい)ものを

定義したかというと，$B_{n,j}$模様，$B_{n,j,v}$模様

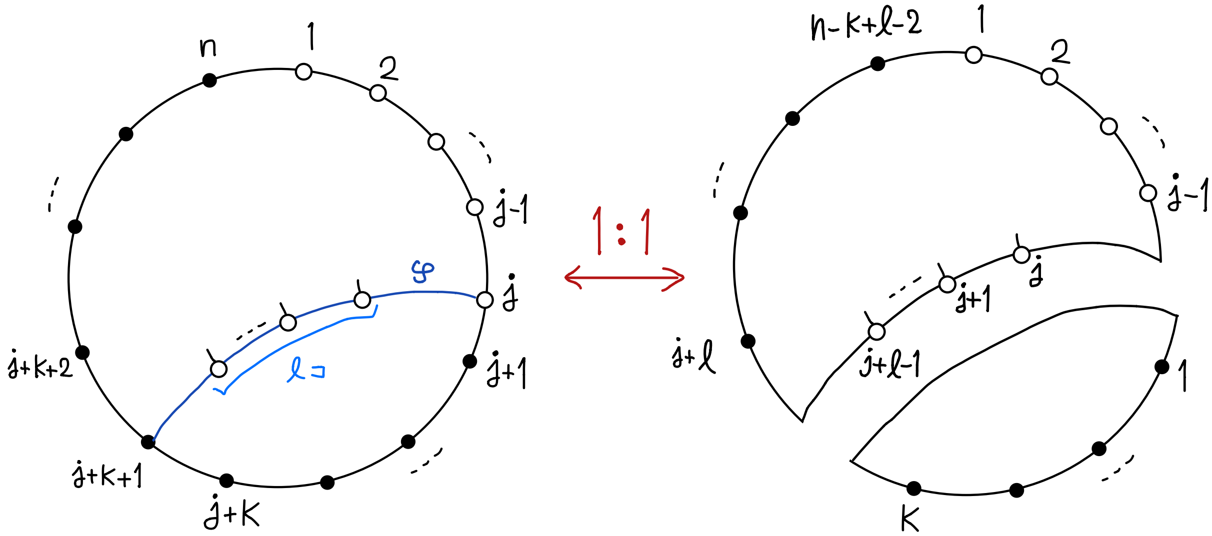
には次の1対1対応があるからです．

定理1　整数 n, j, k, ℓ で

$2 \leqq n,\quad 1 \leqq j \leqq n/2,\quad 0 \leqq k \leqq n-2j,\quad 0 \leqq \ell \leqq n-2j-k$

をみたすものについて,

$\left[\begin{array}{l} B_{n,j}\text{ 模様で次をみたすもの：} \\ \bullet\ \text{点 } j \text{ とつながっている点の中で} \\ \quad\text{一番番号が小さいものは点}(j+k+1). \\ \bullet\ \text{点 } j \text{ と点}(j+k+1)\text{をつなぐ曲線 } \wp \\ \quad\text{には内点が } \ell \text{ 個乗っている.} \end{array}\right]$ と $\left(\begin{array}{ll} B_k & \text{模様} \\ B_{n-k+\ell-2,\, j+\ell-1} & \text{模様} \\ \text{の組} & \end{array}\right)$



は1対1に対応する. 対応は上図のような

“℘に沿った切り貼り” によって定められる.

証明は対応 $\longrightarrow$ と $\longleftarrow$ がちゃんと定義されている (well-defined である) ことを示せばよいのですが, $B_{n,j}$ 模様の定義からこれは大丈夫です.

定理1により, $B_{n,j}$ 模様を数え上げるためには, 整数 k, ℓ が動ける全ての範囲において, (B_k 模様 と $B_{n-k+\ell-2,\, j+\ell-1}$ 模様の組) を数え上げればよいことがわかります. つまり,

<u>定理2</u>　$b_{n,j}$ は次の漸化式をみたす:

$$b_{0,0} = 1, \quad b_{1,0} = 0, \quad b_{n,0} = b_{n,1} \ (n \geqq 2),$$

$$b_{n,j} = \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{\ell=0}^{n-2j-k} b_{k,0}\, b_{n-k+\ell-2,\, j+\ell-1} \quad \left(\begin{array}{l} n \geqq 2, \\ 1 \leqq j \leqq n/2 \end{array} \right).$$

例えば

$$b_{2,1} = \sum_{k=0}^{0} \sum_{l=0}^{-k} b_{k,0} b_{-k+l,l} = b_{00} b_{00} = 1,$$

$$b_{3,1} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1-k} b_{k,0} b_{1-k+l,l}$$

$$= \sum_{l=0}^{1} b_{00} b_{1+l,l} + \sum_{l=0}^{0} b_{10} b_{ll}$$

$$= b_{00} b_{10} + b_{00} \underbrace{b_{20}}_{= b_{21}} + b_{10} b_{00} = 1,$$

$$b_{4,2} = \sum_{k=0}^{0} \sum_{l=0}^{-k} b_{k,0} b_{2-k+l,1+l} = b_{00} b_{21} = 1,$$

$$b_{4,1} = \sum_{k=0}^{2} \sum_{l=0}^{2-k} b_{k,0} b_{2-k+l,l}$$

$$= b_{00} (\underbrace{b_{20}}_{= b_{21}} + b_{31} + b_{42}) + b_{10} (b_{10} + b_{21})$$

$$+ b_{20} b_{00} = 4$$

などと計算できます.

$B_{n,j,v}$ 模様についても同様に考えると，
定理2を次のように精密化できます．

<u>定理3</u>　$b_{n,j,v}$ は次の漸化式をみたす：

$$b_{0,0,0}=1,\quad b_{1,0,0}=b_{1,0,1}=0,\quad b_{n,j,v}=0\ (v>n-2j),$$

$$b_{n,0,v}=b_{n,1,v}\ (n\geqq 2),$$

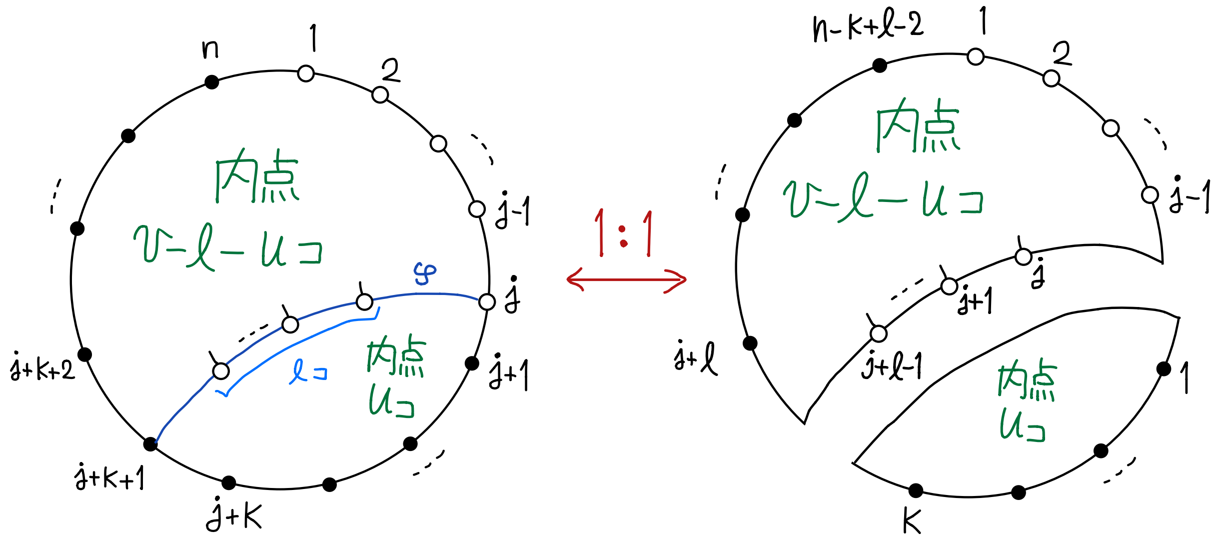
$$b_{n,j,v}=\sum_{k}\sum_{\ell}\sum_{u} b_{k,0,u}\, b_{n-k+\ell-2,\ j+\ell-1,\ v-\ell-u}$$

$(n\geqq 2,\ 1\leqq j\leqq n/2,\ 0\leqq v\leqq n-2j,\ n-v$ は偶数$)$.

但し k,ℓ,u は

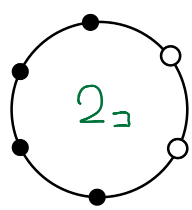
$$\begin{cases} 0\leqslant k\leqslant n-2j \\ 0\leqslant \ell\leqslant \min(v,\ n-2j-k) \\ \max(0,\ -n+2j+v+k)\leqslant u\leqslant \min(\max(0,k-2),\ v-\ell) \\ k-u \text{ は偶数} \end{cases}$$

を動く．

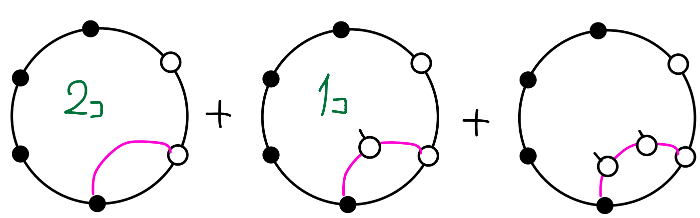


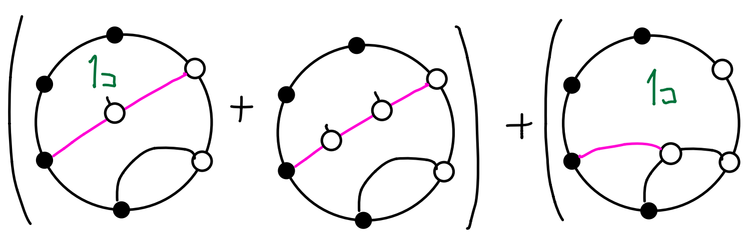
添字が多すぎて目がチカチカしますが，例として

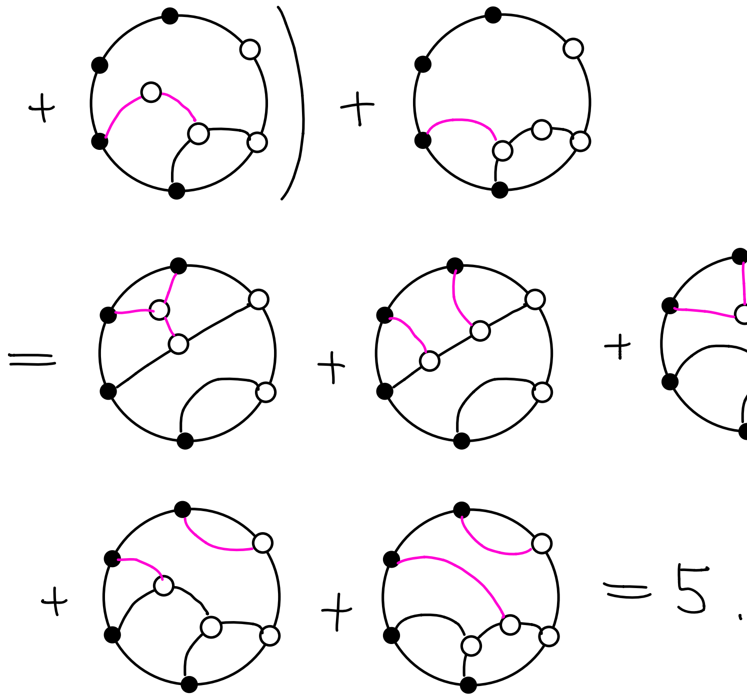
$b_{6,2,2}$ を図を用いて計算してみます．

$b_{6,2,2} =$ 

（"nコ" は内点の個数）

$=$ 

$=$ 



これで漸化式が得られましたので，コンピュータに入力すれば $b_{n,j,v}$ の値は求まります。

⑤，⑦を使えば次のように b_n の値もわかります：

定理4

$n=2,3,4,\cdots,20$ のときの b_n の値は

1, 1, 4, 10, 34, 112, 398, 1443, 5387, 20482, 79177, 310102, 1228187, 4910413, 19792582, 80343445, 328159601, 1347699906, 5561774999

である。

また，一般解についても予想を立てました．

予想

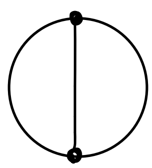
$$b_{v+4k,0,v} = \frac{k\binom{v+4k}{2k}\binom{2v+2k}{v}}{(v+k)(v+2k+1)}$$

$$b_{v+4k+2,0,v} = \frac{\binom{v+4k+2}{2k}\binom{2v+2k+1}{v}}{2v+2k+1}$$

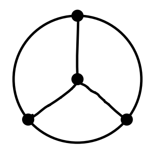
多くの (v,k) に対して予想の両辺が一致することを確かめています．もしこれが正しいとして，これを用いて b_n を（$\sum$ 記号の外れた）シンプルな形で表せるかどうかはまだ分かりません．皆さんも考えてみて下さい．

B模様の一覧 ($n \leqq 6$)

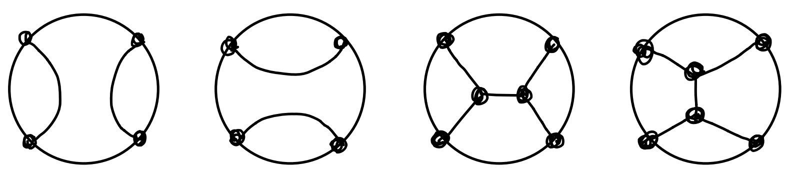
$b_2 = 1$



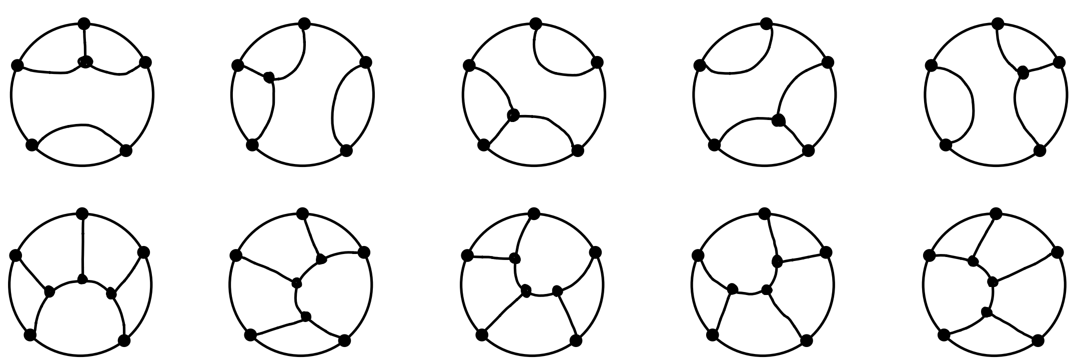
$b_3 = 1$



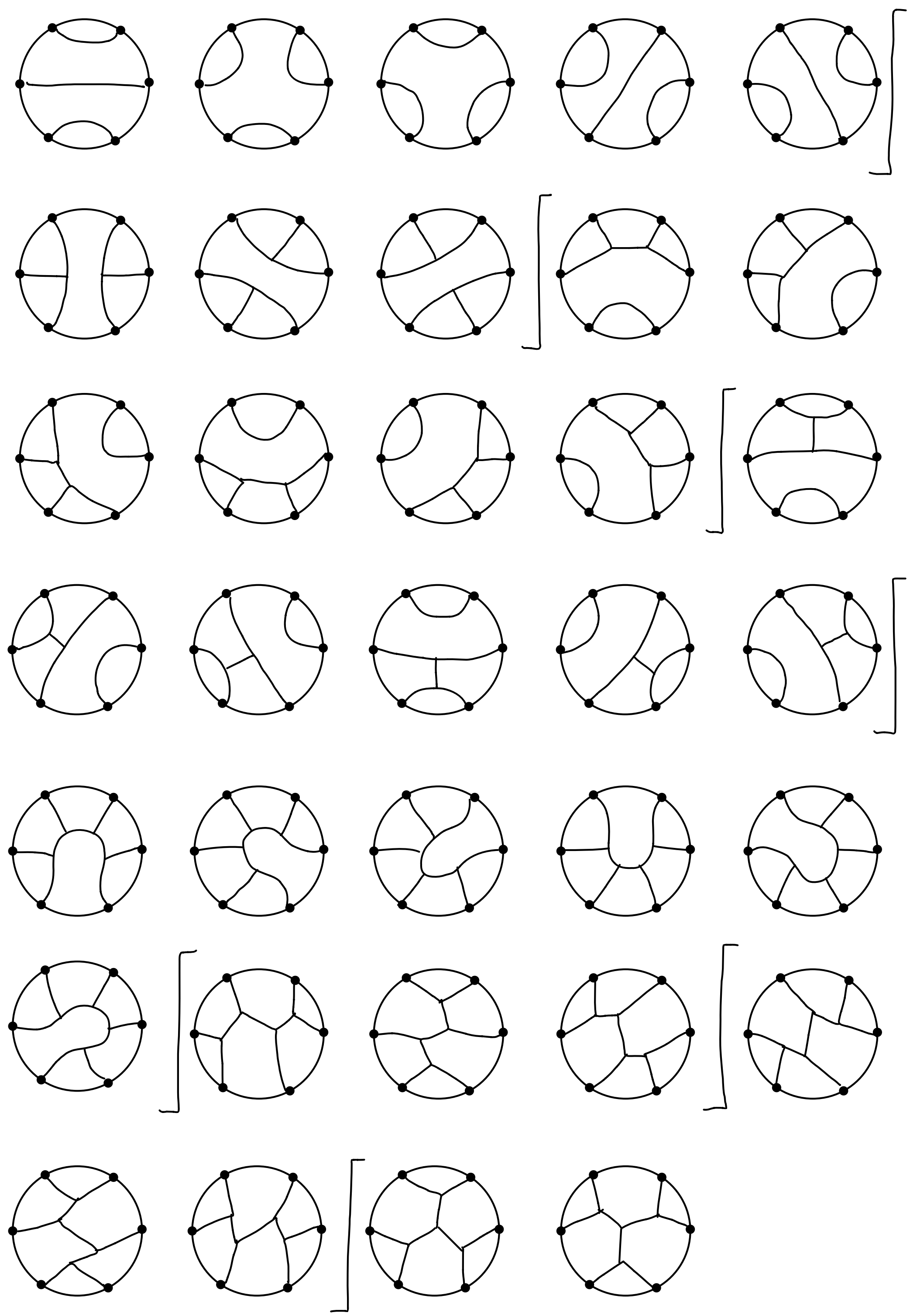
$b_4 = 2 + 2 = 4$



$b_5 = 10$



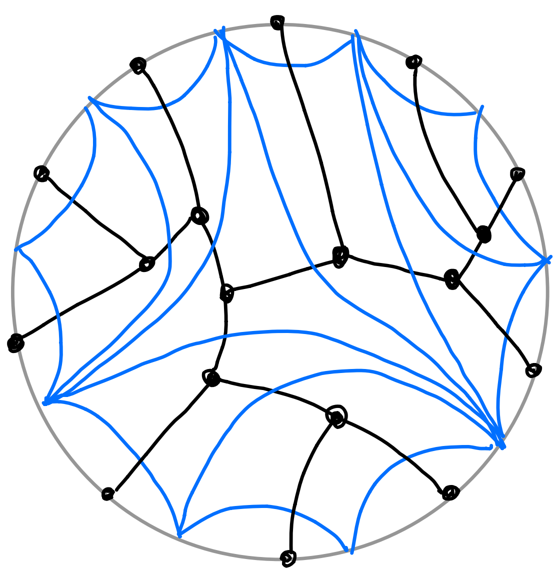
$b_6 = 5 + 15 + 14 = 34$



オリジナルの模様

まず いくつか指摘があったのは，$B_{n+2,0,n}$ 模様，
つまり「B模様であって，内点の個数が
境界上の点の個数−2 であるもの」は
カタラン数 C_n だけある，ということです．

このことは，$B_{n+2,0,n}$ 模様の"相対グラフ"
を描くことで，$B_{n+2,0,2}$ 模様と正$(n+2)$角形
の3角形分割の間に1:1対応があることから
わかります（次図参照）．



$(n=8)$

最後に，団体戦チーム「う」（筑波大学附属駒場中学校）の

考えたオリジナル模様を紹介します.

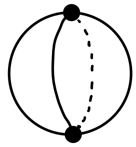
その模様とは，次の条件をみたすものです.

- 円盤の境界には n（:偶数）個の点がある.
- 円盤の表と裏にA模様を描く. このとき，表裏のA模様をつなげると1つの輪っかになる.

チーム「う」は，この模様の個数を $n=2,4,6,8$ のときに数え上げています.（次頁参照）.

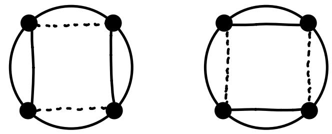
一般の n の場合の個数は現時点で執筆者もわかりませんが，とても面白い問題だと思います.

$n=2$



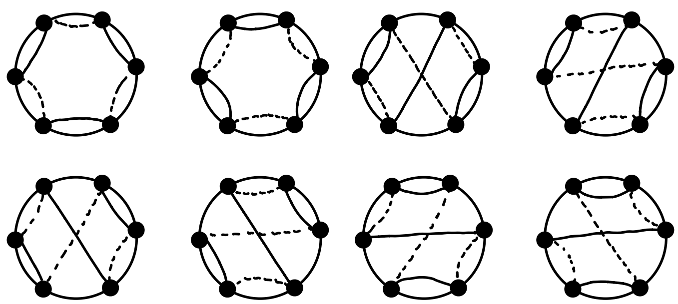
1通り

$n=4$



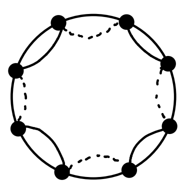
2通り

$n=6$

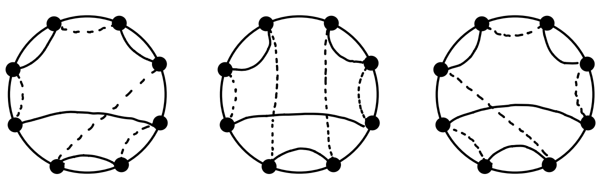


8通り

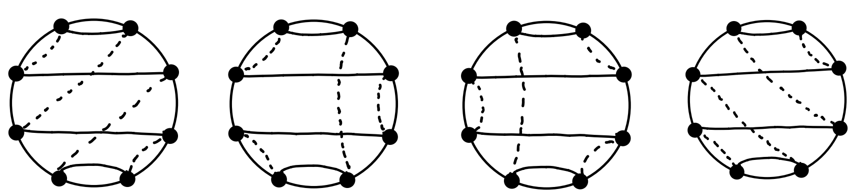
$n=8$



1×2
$=2$



3×8
$=24$



4×4
$=16$

42通り

（８）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール
論文賞の解説

テーマ１．「虹の形」

「虹はなぜあのように見えるのか」について、調べてみて疑問に思ったことを図や式を用いて解決し、それを説明してください。

解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　　高原　文規（愛知県立千種高等学校　教諭）

今回の論文賞テーマ「虹の形」はあらためてしらべたり考えてみると、教科書やインターネットで我々が見ることができる説明は細かい所や大事な所を省いていることわかる「テーマ」でした。

虹を題材に出題しようと詳しく考えた所、６時間程度ではまとめきれないが、じっくり考えれば「そうなんだ」と思える事柄を見つけました。もちろん出題者が見つけた事柄の他にもそんな事柄を見つけることができるかもしれませんが、少なくとも１つあることは保証できます。

深くしらべたり考えてそうした事柄を見つけてくれることを期待しての出題でしたが、応募数は０でした。

「虹の形」の用意した解答は今回あえて掲載しません。今後何年間かの間に自由課題として「虹の形」の論文の応募があることを期待します。

テーマ２．「立体の四面体分割」

正多角形に対角線を引いて三角形に分割する場合の数は、カタラン数と呼ばれる値になることが知られています。では、同じように立方体を四面体に分割する場合の数はいくつになるでしょうか？また、立方体以外の多面体についても考えて下さい。

解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　岡﨑　建太（京都大学数理解析研究所　研究員）
伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）

カタラン数 $C_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ は漸化式

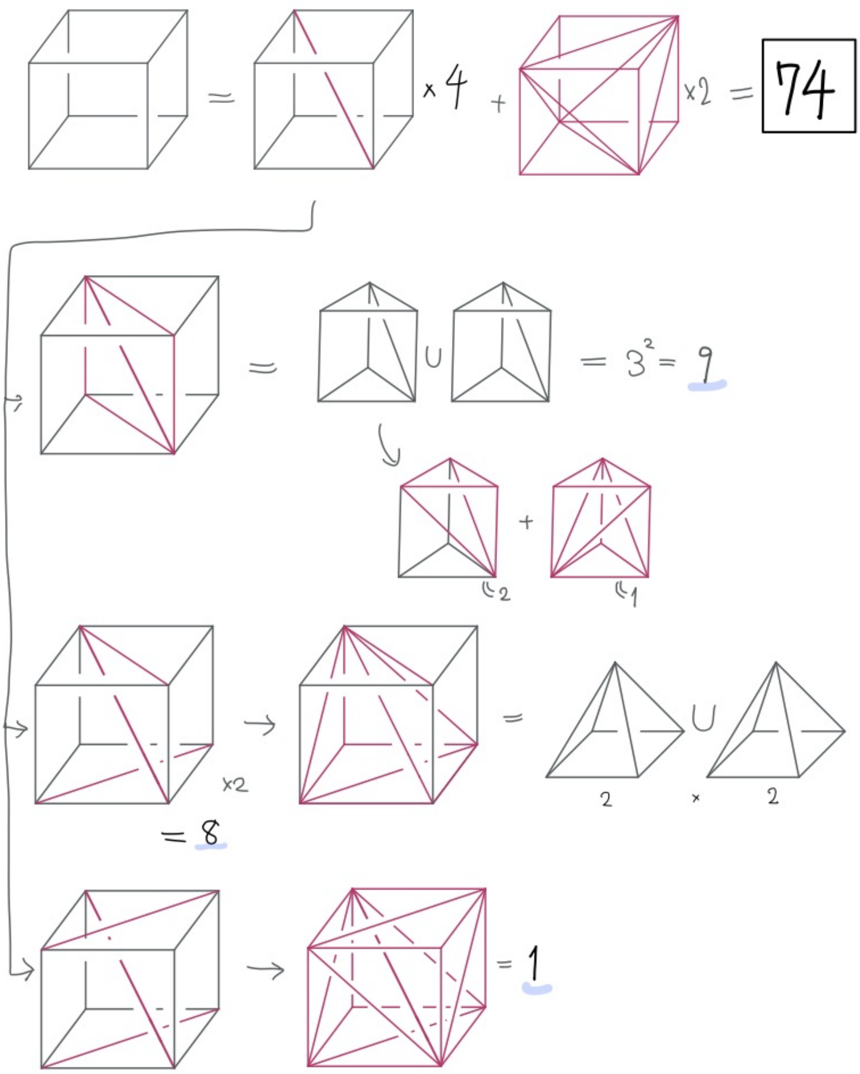
$$C_0 = 1, C_1 = 1, \quad C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0 \quad (n \geq 1)$$

によって定まる数ということも出来ます．カタラン数は様々な組み合わせ問題に現れます．問題文の文脈では「正 $n+2$ 角形に対角線を引いて三角形に分割する場合の数は C_n」と言うことができます（上記漸化式から分かります）．ただし, ここでいう分割とは,
(ア) 対角線は互いに交わらない．したがって三角形の頂点はもとの正多角形の頂点.
(イ) 回転や反転で移り合うものは区別する.
という条件のもとで考えています.

問題文でいう「**同じように** $\cdots$ 分割する」は敢えて曖昧に書いていて, 自らの裁量で問題を設定することを良しとしています．一つの設定は,
(1) 切断面は互いに交わらない．したがって分割して出来た四面体の頂点は元の立体の頂点で, 四面体の辺は元の立体の面上にある.
(2) 回転や鏡映で移り合うものも区別する.
というものですが, この条件のもとでの立方体の分割の数は 2 通りのみとなります. つまり「切断面は互いに交わらない」は強すぎる条件なので, これを要請せず
(1') 四面体の辺は交わらない．したがって四面体の頂点は元の立体の頂点.
という条件や, 単に
(1") 四面体の頂点は元の立体の頂点.
という条件での問題設定が可能です．その場合, 今度は組み合わせの数が大きくなってしまうので, (2) の代わりに
(2') 回転や反転で移り合うものは区別しない.
という問題にすることも出来ます．いずれにしても多角形の分割とは違って, 立体を分割することは絵に描きにくく直観が働きにくいために, 論理的な推論を積み上げて考えることが必要です．たとえば立方体より簡単な立体（三角柱や四角錐）の分割についての考察が, 議論の土台になってきます．なお, 凸 $(n+2)$ 角錐の分割の数は実質的に凸 $(n+2)$ 角形の分割と同じで, (1"), (2) のもとで C_n になります.

私立向陽台高等学校２年の高橋志門君は、(1')・(2) の条件のもとで議論を展開しました．論述は丁寧で読みやすく, 内容が豊富です．立方体に限らず様々な立体について考察し, しかも分割を平面的に記述する「シール法」などの独創的なアイディアに溢れていて大変素晴らしい論文でした．岐阜県立関高等学校２年の安田桜輔君は, まず問題設定を注意深く議論し, (1)・(2) および (1')・(2) の条件で研究しました．立方体や正八面体のほか, 凸 n 角形と２点を結んで出来る凸多面体の分割 (多角錐より格段に難しい) について考察したことは大いに評価できます．新ひだか町立静内第三中学校３年の菅原諒君は (1"), (2') の設定で問題を考えました．簡潔な論述で, 様々な角度から自由に問題を一般化する姿勢は大変高く評価すべきものでした．

最後に (1'), (2) の問題設定での略解（岡崎建太委員による）を示します．(ここまでの文責：伊師英之)



テーマ３.「自由課題」

解説

日本数学コンクール実行委員会委員　宇澤　　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）

論文賞金賞を受賞した川久保隼君（鎌倉学園高等学校３年）の論文「ある三角関数の拡張について」では,「三角関数が $x^2 + y^2 = 1$ と密接に関係するのと類似の意味で $x^n + y^n = 1$ に関係する関数を定義したい」という動機づけのもと,独自に関数 S_n, C_n, T_n を導入し（具体的には, $u = S_n(t)$ は $t = \int_0^u \frac{dw}{\sqrt[n]{1-w^n}}$ の逆関数で, $C_n(t) = S_n'(t)$, $T_n(t) = \frac{S_n(t)}{C_n(t)}$ として定義する．とくに $n = 2$ のときは $S_2(t) = \sin t$, $C_2(t) = \cos t$, $T_2(t) = \tan t$），それらについての解析的な研究を展開しています．複素関数として見たときの周期性や多価性を考察するなど，内容は高校生の水準を遥かに超えています．今後は既存の代数関数論を学んだうえで,この研究がどのような位置づけにあるかを把握し，さらに考察を発展させることを期待します.

論文賞銅賞を受賞した原亜美佳さん，五十嵐初音さん，吉村美賀子さん，大宮彩夏さん，丸山辰子さん，渡辺美結さん（いずれも桐蔭学園中等教育学校６年）の論文「私たちのカウンティング」では，カジノにおいて儲けを出す方法を考察しました．すでに知られているブラックジャックにおけるカウンティングと，自分たちで考えたルーレットにおける様々な賭け方を，膨大な数の実験によって検証しています．自ら手を動かして実験し，沢山のデータから新しい現象を読み取ろうとする姿勢は，科学において非常に高く評価すべきものです．なお，論文でも触れていましたが，実際のカジノではディーラーが好きなところにルーレットの玉を入れられるそうです．そういった駆け引きの分析には確率論だけではなくゲーム理論が有用かもしれません.

論文賞銅賞を受賞した城所陽生君，高木堅君，黒田瑛太郎君（いずれも名古屋市立向陽高等学校３年）の論文「コラッツ予想とその拡張について」は，有名なコラッツ予想（『漸化式 $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1 & (a_n \text{ が奇数}) \\ a_n/2 & (a_n \text{ が偶数}) \end{cases}$ で定まる数列は, a_1 がどんな自然数であっても, 十分大きな n については $1, 4, 2, 1, 4, 2, \cdots$ の繰り返しになる』という予想）を論じました．予想の解決には至りませんでしたが，コラッツモノイドやコラッツ群といった独自の概念を導入し，問題を捉える手段を拡げたことは大いに評価できます．とくにコラッツ群は興味深い対象なので，コラッツ予想への応用に限らず，それ自体を色々な角度から研究すると面白いでしょう.

論文賞ジュニア部門銅賞を受賞した伊藤大輝君（岐阜市立陽南中学校３年）の論文「放物線とピタゴラス数の関連性」では，放物線の軸と平行な光は反射によって必ず焦点を通るという事実を解析幾何的に実証するなかで，そこに自然に現れる直角三角形の３辺の長さの比が整数比であることを発見し，全てのピタゴラス数 ($x^2 + y^2 = z^2$ の自然数解）の比がそうして得られることを主張しています.「全てのピタゴラス数が現れる」と飛躍して考える発想は非常に目覚ましいものといえます．なお，代数方程式の整数解を幾何学的に捉えるというアイディアは，現代数学においても中心的なものといえます.

4. 受賞者一覧

第30回日本数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大賞

該当者なし

優秀賞（4名）

SS-3	川島　玲	愛知県	名古屋大学教育学部附属高等学校	高2
SS-4	笹田　凜太郎	神奈川県	私立桐蔭学園中等教育学校	高3
SS-5	岡林　生夫	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高2
SS-27	星野　泰佑	愛知県	私立東海高等学校	高3

優良賞（5名）

SS-2	北川　陽斗	愛知県	私立滝高等学校	高2
SS-19	與合　皇介	岐阜県	岐阜県立恵那高等学校	高3
SS-29	井上　聡士	愛知県	私立東海高等学校	高1
OSS-6	幡鎌　太郎	愛知県	私立海陽中等教育学校	高1
FSS-1	森山　和	富山県	富山県立富山中部高等学校	高1

奨励賞（7名）

SS-6	小川　純平	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2
SS-14	中川　倫太郎	愛知県	愛知県立旭丘高等学校	高2
SS-28	石堀　朝陽	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1
OSS-4	猪倉　彼方	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1
OSS-8	坂口　優真	大阪府	近畿大学附属高等学校	高2
OSS-15	山岸　夏野	大阪府	私立四天王寺高等学校	高2
FSS-2	山口　希夢	福井県	私立敦賀気比高等学校	高3

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、学校所在地、所属校名、学年

第30回日本数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞(1組)

SG-5	忖度ありきの数学団	渡邊　空一翔	愛知県	私立東海高等学校	高2
		田中　梨太郎	愛知県	私立東海高等学校	高2
		中根　敦久	愛知県	私立東海高等学校	高2
		柳　健大	愛知県	私立東海高等学校	高2

優秀賞(1組)

SG-32	時習館ω	布藤　希海	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高2
		吉田　裕登	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高2
		菊地　遥生	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高2
		内田　雄大	愛知県	愛知県立時習館高等学校	高2

優良賞(2組)

SG-38	KWSK	藤原　龍一	三重県	鈴鹿高等学校(6年制)	高2
		黒田　将弘	三重県	鈴鹿高等学校(6年制)	高2
		金田　悠太郎	三重県	鈴鹿高等学校(6年制)	高2
		川﨑　健生	三重県	鈴鹿高等学校(6年制)	高2
FSG-1	数学の美はアルプスを越えて、外山先生をアメリカに届ける。	新　太陽	石川県	金沢大学附属高等学校	高1
		中井　一心	石川県	金沢大学附属高等学校	高1
		村山　太陽	石川県	金沢大学附属高等学校	高1
		森　渓	石川県	金沢大学附属高等学校	高1

奨励賞(8組)

SG-6	Labyrinth	坂口　晴紀	岐阜県	私立多治見西高等学校	高3
		星野　響希	岐阜県	私立多治見西高等学校	高3
		根崎　由衣	岐阜県	私立多治見西高等学校	高3
		川瀬　里緒	岐阜県	私立多治見西高等学校	高3
SG-12	進学校-Intelligense-	佐々木　慎太朗	神奈川県	私立鎌倉学園高等学校	高3
		川久保　隼	神奈川県	私立鎌倉学園高等学校	高3
		広瀬　悟大	神奈川県	私立鎌倉学園高等学校	高3
SG-17	有馬頼　Y・U・K・I　L♡VERS	伊藤　佑	愛知県	愛知県立豊田西高等学校	高1
		江尻　壮汰	愛知県	愛知県立豊田西高等学校	高1
		米原　佑悟	愛知県	愛知県立豊田西高等学校	高1
		藤田　流星	愛知県	愛知県立豊田西高等学校	高1
SG-18	ブラックホール	佐々木　遥大	岩手県	岩手県立水沢高等学校	高2
		佐竹　泰良	岩手県	岩手県立水沢高等学校	高2
		佐藤　伸	岩手県	岩手県立水沢高等学校	高2
		横澤　和磨	岩手県	岩手県立水沢高等学校	高2
TSG-5	傀儡の輪	千葉　俊介	三重県	三重県立四日市高等学校	高2
		濱地　卓峰	三重県	三重県立四日市高等学校	高2
		廣瀬　了哉	三重県	三重県立四日市高等学校	高2
		西川　晃太	三重県	三重県立四日市高等学校	高2
TSG-11	老若男女	山本　莞太郎	三重県	三重県立津高等学校	高1
		加林　元希	三重県	三重県立津高等学校	高1
		斎木　亮吾	三重県	三重県立津高等学校	高1
TSG-12	ここに集ひしよろこびよ	鵜飼　幸太郎	三重県	三重県立松阪高等学校	高2
		北井　貴一朗	三重県	三重県立松阪高等学校	高2
		大西　諒	三重県	三重県立松阪高等学校	高2
		玉腰　琳太郎	三重県	三重県立松阪高等学校	高2
OSG-3	汗とアルデヒド	吉野　将弘	大阪府	大阪府立大手前高等学校	高2
		大谷　直矢	大阪府	大阪府立大手前高等学校	高2
		原　裕真	大阪府	大阪府立大手前高等学校	高1

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、学校所在地、所属校名、学年

第23回日本ジュニア数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大　賞(1名)

JS-19	三宅　智史	愛知県	私立東海中学校	中3

優秀賞(4名)

JS-18	栗林　和輝	愛知県	私立東海中学校	中3
TJS-2	伊藤　晃二	三重県	私立皇學館中学校	中1
OJS-1	加藤　湊人	兵庫県	私立灘中学校	中1
OJS-4	中　洋貴	兵庫県	私立灘中学校	中1

優良賞(3名)

JS-5	蜂矢　倫久	兵庫県	私立灘中学校	中3
JS-20	野本　悠真	愛知県	私立東海中学校	中3
JS-22	牛嶋　秀介	岐阜県	岐阜市立白山小学校	小5

奨励賞(4名)

JS-2	安田　優葵	岐阜県	羽島市立中島中学校	中3
JS-10	Hong(木村)遙	東京都	公立小学校	小5
JS-23	山本　叡明	愛知県	私立東海中学校	中1
TJS-1	餙　和真	三重県	松阪市立殿町中学校	中3

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、学校所在地、所属校名、学年

第23回日本ジュニア数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞（1組）

JG-19	う	菊地　朝陽	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		端野　太一郎	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		鵜野　正史	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		小原　悠太郎	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3

優秀賞（2組）

JG-20	うど	大網　啓夢	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		新宮　健介	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		佐藤　孝紀	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		日野　正輝	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
JG-21	うどん	天谷　健人	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		伊達　悠人	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		鈴木　絢也	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3
		保木　拓真	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3

優良賞（3組）

JG-1	PRIME	野呂　静流	東京都	私立桜蔭中学校	中3
		吉松　更紗	東京都	私立桜蔭中学校	中3
		安藤　日菜乃	大阪府	私立四天王寺中学校	中3
		安田　百合香	兵庫県	私立神戸女学院中学校	中3
JG-2	スパーキングファイターズ	服部　圭太	東京都	Axis International School	小6
		鈴木　康平	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中1
		尼丁　祥伍	兵庫県	私立灘中学校	中1
		中務　大久真	東京都	私立開成中学校	中1
HJG-2	unknowns	伏尾　理久斗	奈良県	智辯学園中学校	中3
		小林　武司	奈良県	智辯学園中学校	中3
		熊代　蒼	奈良県	智辯学園中学校	中3
		山田　知昂	奈良県	智辯学園中学校	中3

奨励賞（7組）

JG-4	一蓮托生	伊藤　大輝	岐阜県	岐阜市立陽南中学校	中3
		杉山　拓海	岐阜県	岐阜市立陽南中学校	中3
		中村　光希	岐阜県	岐阜市立陽南中学校	中3
		増井　俊亮	岐阜県	岐阜市立陽南中学校	中3
JG-9	YUMA	山崎　秀真	愛知県	豊川市立南部中学校	中3
		堀本　菖	愛知県	豊川市立南部中学校	中3
		菅沼　寛翔	愛知県	豊川市立南部中学校	中3
		高瀬　晴章	愛知県	豊川市立南部中学校	中3
TJG-1	アルフォートの森	亀谷　柊瑠	三重県	私立高田中学校	中3
		木本　茉佑	三重県	私立高田中学校	中3
		谷口　広翔	三重県	私立高田中学校	中3
		山内　康平	三重県	私立高田中学校	中3
TJG-2	Team Descartes	松本　美玖	三重県	私立高田中学校	中3
		安田　胡桃	三重県	私立高田中学校	中3
		山地　彩加	三重県	私立高田中学校	中3
		川本　里奈	三重県	私立高田中学校	中3
TJG-3	暁中学校(6年制) Aチーム	小山　彩音	三重県	暁高等学校	中2
		樋口　璃子	三重県	暁高等学校	中2
		田中　千夏	三重県	暁高等学校	中2
		角田　茉央	三重県	暁高等学校	中2
TJG-5	TKD∩暇人	庄司　伊吹	三重県	私立高田中学校	中3
		山口　真弘	三重県	私立高田中学校	中3
		岩本　隆之介	三重県	私立高田中学校	中3
		日高　太貴	三重県	私立高田中学校	中3
TJG-6	肉じゃが	岸野　大輝	三重県	私立高田中学校	中3
		内藤　柊晴	三重県	私立高田中学校	中3
		鈴木　涼真	三重県	私立高田中学校	中3
		水沼　慧風	三重県	私立高田中学校	中3

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、学校所在地、所属校名、学年

第20回日本数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

髙橋　志門	大阪府	私立向陽台高等学校	2年	立体の四面体分割
川久保　隼	神奈川県	鎌倉学園高等学校	3年	ある三角関数の拡張について

銀賞

安田　桜輔	岐阜県	岐阜県立関高等学校	2年	立体の四面体分割

銅賞

原　亜美佳 五十嵐　初音 吉村　美賀子 大宮　彩夏 丸山　辰子 渡辺　美結	神奈川県	私立桐蔭学園中等教育学校	3年 共著6名	私たちのカウンティング
城所　陽生 高木　堅 黒田　瑛太郎	愛知県	名古屋市立向陽高等学校	3年 共著3名	コラッツ予想とその拡張について
與合　皇介 水野　智貴	岐阜県	岐阜県立恵那高等学校	3年 共著2名	感想戦（シニア問題1：自販機の釣り銭）

第20回日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

菅原　諒	北海道	新ひだか町立静内第三中学校	3年	立体の四面体分割

銀賞

該当者なし

銅賞

伊藤　大輝	岐阜県	岐阜市立陽南中学校	3年	放物線とピタゴラス数の関連性

＊テーマ　1. 虹の形　2. 立体の四面体分割　3. 自由課題　4. 感想戦

表記は次の順にしてあります。 氏名、学校所在地、所属校名、学年、表彰対象のテーマ

5. 日本数学コンクール参加状況

第30回日本数学コンクール参加状況一覧　個人戦　　　　参加数　50

会場	地域	学校所在地	性別	高校生						計	
				1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	3	3	9	9	2	2	14	14
			女	0		0		0		0	
		岐阜	男	2	2	0	0	5	5	7	7
			女	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	3	6	0	0	3	6
			女	0		3		0		3	
		福井	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	関東	東京	男	2	2	1	1	0	0	3	3
			女	0		0		0		0	
		神奈川	男	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	7	7	14	17	8	8	29	32
			女	0		3		0		3	
津高校	中部	三重	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
大手前高校	近畿	大阪	男	3	3	6	7	0	1	9	11
			女	0		1		1		2	
	中部	愛知	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	関東	東京	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	中国	広島	男	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	5	5	6	7	1	2	12	14
			女	0		1		1		2	
橋本市	近畿	和歌山	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
福井大学	中部	福井	男	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0		0		0		0	
		富山	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	1	1	0	0	1	1	2	2
			女	0		0		0		0	
合計			男	15	15	20	24	10	11	45	50
			女	0		4		1		5	

第30回日本数学コンクール参加状況一覧　団体戦　　参加数　247

会場	地域	学校所在地	性別	高校生 1年		2年		3年		計	
名古屋大学	中部	愛知	男	40	51	26	35	5	5	71	91
			女	11		9		0		20	
		岐阜	男	0	0	2	3	2	4	4	7
			女	0		1		2		3	
		三重	男	0	0	16	22	0	0	16	22
			女	0		6		0		6	
		静岡	男	0	0	3	3	0	0	3	3
			女	0		0		0		0	
		長野	男	1	2	1	1	0	0	2	3
			女	1		0		0		1	
	関東	神奈川	男	0	0	0	0	3	3	3	3
			女	0		0		0		0	
		茨城	男	3	3	0	0	0	0	3	3
			女	0		0		0		0	
	東北	岩手	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
		山形	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	近畿	兵庫	男	0	0	2	3	0	0	2	3
			女	0		1		0		1	
	九州	福岡	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		男	44	56	62	79	10	12	116	147
			女	12		17		2		31	
津高校	中部	三重	男	9	19	18	31	2	2	29	52
			女	10		13		0		23	
	小計		男	9	19	18	31	2	2	29	52
			女	10		13		0		23	
大手前高校	近畿	大阪	男	1	1	11	11	6	6	18	18
			女	0		0		0		0	
		奈良	男	0	0	0	0	0	0	0	0
			女	0		0		0		0	
	中国	広島	男	0	2	0	0	0	0	0	2
			女	2		0		0		2	
	小計		男	1	3	11	11	6	6	18	20
			女	2		0		0		2	
橋本市	近畿	和歌山	男	2	3	1	1	0	0	3	4
			女	1		0		0		1	
		奈良	男	13	18	2	2	0	0	15	20
			女	5		0		0		5	
	小計		男	15	21	3	3	0	0	18	24
			女	6		0		0		6	
福井大学	中部	石川	男	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		男	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
合計			男	73	103	94	124	18	20	185	247
			女	30		30		2		62	

第30回日本数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学　校　名
愛知県	海陽中等教育学校
	東海高等学校
	南山国際高等学校
	愛知県立旭丘高等学校
	愛知県立一宮高等学校
	愛知県立岡崎高等学校
	愛知県立高蔵寺高等学校
	愛知県立時習館高等学校
	愛知県立瑞陵高等学校
	愛知県立知立東高等学校
	愛知県立熱田高等学校
	愛知県立豊田西高等学校
	愛知県立明和高等学校
	愛知淑徳高等学校
	滝高等学校
	椙山女学園高等学校
	名古屋市立名東高等学校
	名古屋大学教育学部附属高等学校
岐阜県	岐阜県立岐阜高等学校
	多治見西高等学校
	岐阜県立恵那高等学校
	岐阜東高等学校
三重県	セントヨゼフ女子学園高等学校
	三重県立松阪高等学校
	三重県立津高等学校
	高田高等学校
	暁高等学校
	三重県立桑名高等学校

学校所在都道府県	学　校　名
三重県	三重県立四日市高等学校
	鈴鹿高等学校
福井県	敦賀気比高等学校
長野県	長野県諏訪清陵高等学校
静岡県	静岡県立富士高等学校
大阪府	近畿大学附属高等学校
	大阪府立大手前高等学校
	大阪府立四條畷高等学校
	羽衣学園高等学校
	四天王寺高等学校
	向陽台高等学校
	大阪府立天王寺高等学校
兵庫県	兵庫県立神戸高等学校
奈良県	智辯学園高等学校
和歌山県	高野山高等学校
広島県	呉工業高等専門学校
	広島大学附属高等学校
福岡県	福岡県立筑紫丘高等学校
東京都	開成高等学校
	筑波大学附属駒場高等学校
茨城県	清真学園高等学校
神奈川県	鎌倉学園高等学校
	桐蔭学園中等教育学校
富山県	富山県立富山中部高等学校
石川県	金沢大学附属高等学校
岩手県	岩手県立水沢高等学校
山形県	山形県立米沢興譲館高等学校

第23回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　個人戦　　　　参加数　32

会場	地域	学校所在地	性別	小学生 5年	小学生 6年	中学生 1年		中学生 2年		中学生 3年		計	
名古屋大学	中部	愛知	男	0	0	3	4	0	0	5	6	8	10
			女	0	0	1		0		1		2	
		岐阜	男	1	0	1	1	0	0	2	2	4	4
			女	0	0	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	0	0	1	2	0	0	1	2
			女	0	0	0		1		0		1	
	関東	東京	男	0	0	2	2	1	1	0	0	3	4
			女	1	0	0		0		0		1	
		神奈川	男	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
			女	0	0	1		0		0		1	
	近畿	兵庫	男	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	1	0	6	8	2	3	8	9	17	22
			女	1	0	2		1		1		5	
津高校	中部	三重	男	0	0	1	1	1	1	1	1	3	3
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	1	1	1	1	1	1	3	3
			女	0	0	0		0		0		0	
大手前高校	関東	神奈川	男	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	近畿	奈良	男	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			女	0	0	0		0		0		0	
		兵庫	男	0	0	3	3	0	0	0	0	3	3
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0	0	0		0		0		0	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2
			女	0	0	0		0		1		1	
		奈良	男	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	0	1	0	0	1	1	0	1	2	3
			女	0	0	0		0		1		1	
合計			男	1	1	11	16	4	5	9	11	26	32
			女	1	0	2		1		2		6	

第23回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　団体戦　　参加数　177

会場	地域	学校所在地	性別	小学生	中学生						計	
				6年	1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	0	5	7	14	23	29	33	48	63
			女	0	2		9		4		15	
		岐阜	男	0	0	0	4	8	12	12	16	20
			女	0	0		4		0		4	
	関東	東京	男	1	2	2	0	0	12	14	15	17
			女	0	0		0		2		2	
	近畿	大阪	男	0	0	0	0	0	0	1	0	1
			女	0	0		0		1		1	
		兵庫	男	0	1	1	0	0	0	1	1	2
			女	0	0		0		1		1	
	小計		男	**1**	**8**	**10**	**18**	**31**	**53**	**61**	**80**	**103**
			女	**0**	**2**		**13**		**8**		**23**	
津高校	中部	三重	男	0	0	0	0	4	16	27	16	31
			女	0	0		4		11		15	
	小計		男	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**	**16**	**27**	**16**	**31**
			女	**0**	**0**		**4**		**11**		**15**	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	0	0	0	0	4	4	4	4
			女	0	0		0		0		0	
		奈良	男	0	8	8	11	23	8	8	27	39
			女	0	0		12		0		12	
	小計		男	**0**	**8**	**8**	**11**	**23**	**12**	**12**	**31**	**43**
			女	**0**	**0**		**12**		**0**		**12**	
合計			男	1	**16**	**18**	**29**	**58**	**81**	**100**	**127**	**177**
			女	0	**2**		**29**		**19**		**50**	

第23回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学　校　名
愛知県	犬山市立犬山中学校
	南山中学校女子部
	豊明市立沓掛中学校
	名古屋市立宮中学校
	名古屋市立浄心中学校
	東海中学校
	小牧市立光ヶ丘中学校
	春日井市立西部中学校
	名古屋市立萩山中学校
	豊川市立南部中学校
	星城中学校
	瀬戸市立品野中学校
岐阜県	羽島市立中島中学校
	羽島市立竹鼻中学校
	御嵩町立向陽中学校
	岐阜市立白山小学校
	岐阜市立陽南中学校
	関市緑ヶ丘中学校
三重県	桑名市立多度中学校
	四日市市立富田中学校
	松阪市立殿町中学校
	皇學館中学校

学校所在都道府県	学　校　名
三重県	志摩市立志摩中学校
	暁中学校
	セントヨゼフ女子学園中学校
	高田中学校
	津市立橋北中学校
	鈴鹿中等教育学校
大阪府	四天王寺中学校
奈良県	智辯学園中学校
兵庫県	灘中学校
	甲陽学院中学校
	神戸女学院中学校
和歌山県	橋本市立城山小学校
	橋本市立高野口中学校
	初芝橋本中学校
東京都	武蔵中学校
	筑波大学附属駒場中学校
	早稲田中学校
	桜蔭中学校
	Axis International School
	開成中学校
神奈川県	慶應義塾湘南藤沢中等部
	慶應義塾普通部

６．参加者アンケート調査結果

日本数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　50（参加者50名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	10 人	(18.9 %)
イ 先生から	27 人	(50.9 %)
ウ 友人から	1 人	(1.9 %)
エ 両親から	5 人	(9.4 %)
オ 兄弟姉妹から	0 人	(0.0 %)
カ 新聞で	0 人	(0.0 %)
キ ラジオ・テレビで	0 人	(0.0 %)
ク 雑誌で	0 人	(0.0 %)
ケ 日本数学コンクールのホームページから	7 人	(13.2 %)
コ その他	3 人	(5.7 %)
○ 去年も参加したため	3 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	28 人	(45.2 %)
イ 数学が好きになりたいと思ったから	0 人	(0.0 %)
ウ 数学が苦手だから	1 人	(1.6 %)
エ 以前参加して有意義だったから	14 人	(22.6 %)
オ 先生に勧められたから	8 人	(12.9 %)
カ 両親に勧められたから	2 人	(3.2 %)
キ 友人に誘われたから	1 人	(1.6 %)
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	0 人	(0.0 %)
ケ 何となく興味があったから	5 人	(8.1 %)
コ 参考書持参が自由だから	1 人	(1.6 %)
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	1 人	(1.6 %)
シ その他	1 人	(1.6 %)
○ 部活動	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	13 人	(23.2 %)
イ 問題は難しいけれど楽しかった	29 人	(51.8 %)
ウ 問題が難しいと思わなかった	0 人	(0.0 %)
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	7 人	(12.5 %)
オ 数学の学問的広さを感じた	5 人	(8.9 %)
カ 問題文の意味が分かりにくい	2 人	(3.6 %)
キ その他	0 人	(0.0 %)

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	27 人	(50.0 %)
イ 今後の進路を考える参考になると思った	5 人	(9.3 %)
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	22 人	(40.7 %)
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	(0.0 %)
オ その他	0 人	(0.0 %)

5．数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

14 名 物理
7 名 化学
2 名 情報
2 名 社会問題
2 名 英語

＊ その他（各1名ずつ）

波動、ロボット、理科、言語、科学、地理、地学、歴史、電気の発電、プログラミング、Excel等の関数を作る

6．今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

5 名 数学ガール
2 名 数の悪魔
＊ その他（各1名ずつ）
浜村渚の計算ノート、面白くて眠れなくなる数学、虚数の情緒、フェルマーの最終定理、正多面体を解く、ゼロから分かる数学−数論とその応用−、整数論、ライプニッツについての本、数学オリンピック辞典、宇宙と宇宙をつなぐ数学、0の発見、数学おもしろ大辞典、ラマヌジャンノート、素数はめぐる、数学全史、エレガントな数学解決方

7．名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月27日(土)「整数論入門」「連分数をめぐって」
5月25日(土)「ある方程式の整数解における100年予想とそのアプローチ」「ペル方程式の解法」
6月29日(土)「量子コンピュータに関する最近の発展について」「大数学者の名言—ポアンカレと岡潔」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	20 人	(40.0 %)
②知らない	29 人	(58.0 %)

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	15 人	(30.0 %)
②ない	12 人	(24.0 %)
③わからない	22 人	(44.0 %)

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
- ○ 連分数について
- ○ AIと数学
- ○ 素粒子系統、天文等々
- ○ ビッグデータについて
- ○ 四次元の立体等について
- ○ 「ある方程式の整数解における100年予想とそのアプローチ」→おもしろいつながりのもの
- ○ リーマン予想
- ○ ブラックホールと素数
- ○ 複素解析
- ○ 微分
- ○ $(x^2+y^2-1)^3=x^2y^3$のグラフを人が手書きするプロセスについて

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。
- ○ 少し数学がおもしろくなった。
- ○ シニア問題は初めて解いてみたが、ジュニアよりも知識の幅が広まった分、問題も難しくなったという印象を受けた。でも問題を解くことは楽しかったし、今までと違うことを問題から学べて有意義だと思った。今回は家の都合で途中退室しなければならなかったけど、その後でゆっくり解いてみようと思う。1点だけあるのは、日本語が分かりづらかったのが難問だと思う。
- ○ 頭いたい
- ○ 自分にはレベルが高すぎる問題しかありませんでしたが、考えることがすごい楽しかったです。また、自分の中での数学に対する意識が大きく変わりました。最近、別れた彼女のこともこの時間で忘れることができました。ありがとうございました。
- ○ ありがとうございました。数学という世界が学校の教科書などにはとても入りきらないほど楽しいものであることを実感できました。
- ○ 数学は奥深い。
- ○ 初めてΣ使いました。
- ○ 自分は数学のことが好きだけど決して得意ではないので、これらの問題は自分には難しくてレベルも高くて答えられませんでした。でも、普段の日常の出来事に数学が利用できることを知って、すごいと思いました。おもしろい経験ができて良かったです。
- ○ 大問3が難しかったです。
- ○ やりきれなくて悔しい。
- ○ 今年も面白かったです。
- ○ 時間が足りなかった。
- ○ 平面グラフの問題は知っているのかそうでないかで差がついてしまうと思った。
- ○ 非常に難しく太刀打ちできなかったが、どんなエレガントな解法があるのかとワクワクしている。これからは、授業についていくためにではなく、数学を知り、究めるために勉強していきたい。
- ○ グラフ理論の解き方のコツを勉強してから挑んだ方がよかったなと思った。
- ○ 来年も受けたいです。
- ○ 問題文は敬体ではない方が読みやすいように思います。
- ○ 問題がとても難しかったが、5時間半しっかり考えることができてよかった。
- ○ 普段なにげなく生きている中で、こんな問題を考えるなんてすごいと思いました。また来年も期待しています。
- ○ 難しかったけど、とてもいい経験になった。

日本数学コンクール【団体戦】

アンケート総数 242(参加者247名)

1. 今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	56 人	(21.5 %)
イ	先生から	98 人	(37.7 %)
ウ	友人から	69 人	(26.5 %)
エ	両親から	0 人	(0.0 %)
オ	兄弟姉妹から	0 人	(0.0 %)
カ	新聞で	0 人	(0.0 %)
キ	ラジオ・テレビで	0 人	(0.0 %)
ク	雑誌で	1 人	(0.4 %)
ケ	日本数学コンクールのホームページから	8 人	(3.1 %)
コ	その他	28 人	(10.8 %)
	○ 部活動	13 人	
	○ 昨年参加したから	4 人	
	○ SSH	4 人	
	○ 前、前々年も参加したため	1 人	
	○ 強制	1 人	
	○ 郵便	1 人	

2. 今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	95 人	(29.2 %)
イ	数学が好きになりたいと思ったから	14 人	(4.3 %)
ウ	数学が苦手だから	7 人	(2.2 %)
エ	以前参加して有意義だったから	26 人	(8.0 %)
オ	先生に勧められたから	34 人	(10.5 %)
カ	両親に勧められたから	2 人	(0.6 %)
キ	友人に誘われたから	71 人	(21.8 %)
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	13 人	(4.0 %)
ケ	何となく興味があったから	34 人	(10.5 %)
コ	参考書持参が自由だから	2 人	(0.6 %)
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	5 人	(1.5 %)
シ	その他	22 人	(6.8 %)
	○ 部活動	14 人	
	○ SSH	3 人	
	○ ハガキが来たから	1 人	
	○ 今日、何の予定もなかったから。	1 人	
	○ 強制	1 人	

3. 今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	83 人	(24.9 %)
イ	問題は難しいけれど楽しかった	128 人	(38.3 %)
ウ	問題が難しいと思わなかった	2 人	(0.6 %)
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	38 人	(11.4 %)
オ	数学の学問的広さを感じた	42 人	(12.6 %)
カ	問題文の意味が分かりにくい	34 人	(10.2 %)
キ	その他	7 人	(2.1 %)
	○ 問題製作者は天才だよ。	1 人	
	○ 楽しい。	1 人	
	○ どうやって作ったのか気になった	1 人	
	○ とにかくしんどい。	1 人	
	○ 問題文に隙がありました。定義はきちんと明確にかいて頂きたいです。	1 人	

4. 今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	110 人	(42.8 %)
イ	今後の進路を考える参考になると思った	14 人	(5.4 %)
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	122 人	(47.5 %)
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	4 人	(1.6 %)
オ	その他	7 人	(2.7 %)
	○ この実力のなさを思い知らされた。	1 人	
	○ つかれた。	1 人	
	○ 数学はやっぱり楽しいと思った。	1 人	
	○ わからなくても少しずつゆっくりと考えて行こうと思う。	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

39 名 物理
22 名 化学
9 名 生物
8 名 英語
6 名 情報
各4 名 工作、歴史
各3 名 家庭科、地理、音楽、体育、倫理
各2 名 整数、哲学、科学、国語、現代文、保健、美術

＊ その他(各1名ずつ)

社会、自然、言語学、ロボット、天文、プログラミング、作曲、地学、社会科学、小説、関数、百マス計算、日本史、テトリス、漢文、モンスト、雑学、天気、脳の体操、図形、パズル、文学、料理、書道、アメリカンフットボール、フットサル、テニス、サッカー、宇宙、医学、算数、漢字、計算、かるた、科学実験、古文、社会問題、総合的なもの

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

16 名 数学ガール
13 名 数の悪魔
12 名 浜村渚の計算ノート
10 名 フェルマーの最終定理
7 名 博士の愛した数式
各4 名 確率は迷う、Newton
各3 名 お任せ！数学屋さん
各3 名 青の数学、大学への数学、面白くて眠れなくなる数学
各2 名 オイラーの贈物、数学ミステリーの冒険、天に向かって続く数

＊ 各1名ずつ

別冊Newton、Newtonライト、超入門 微分・積分、オイラーの定理、マスター・オブ・整数、数論の精選104問、グラハム数、チルノの数学ノート空間編、プログラミング、教えて！数学屋さん、眠れなくなるほど面白い図解 微分積分、無限、周期律 堂シリーズ、赤チャート、スイミー、夢中になる！江戸っ子数学、世にも美しい数学入門、集合位相入門、曲空間の幾何学、双曲幾何、微分方程式論、明解複素解析、数学の全てが分かる本、フラクタル幾何学、微分についての本、確率のゆがみ、四色問題、全レベル問題集、こんなふうに教わりたかった！高校数学教室、基礎問題精講、黒チャート、数学検定、不完全性定理とは何か、世界は2乗でできている、わくわく数の世界の大冒険、なぜ分数の割り算はひっくり返すのか？、高校数学の美しい物語、数学小景、100年の謎はなぜ解けたのか、数独を数学する、関孝和の円周率の歴史、素数の不思議、数学の秘密の本棚、数学の魔法の宝箱、数学オリンピックチャンピオンの美しい解き方、幾何学と図形の解法のコツ、数学を志す人に、数学する身体、数学オリンピック、参考書、数学ゲーム必勝法、ハイレベル理系数学、数学の面白さ、数学の楽しみ、円周率の謎を追う、やさしい位相幾何学の話、ガロア理論

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月27日(土)「整数論入門」「連分数をめぐって」
5月25日(土)「ある方程式の整数解における100年予想とそのアプローチ」「ペル方程式の解法」
6月29日(土)「量子コンピュータに関する最近の発展について」「大数学者の名言―ポアンカレと岡潔」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	48 人	（	19.8 %）
②知らない	178 人	（	73.6 %）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	40 人	（	16.5 %）
②ない	45 人	（	18.6 %）
③わからない	140 人	（	57.9 %）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

○ 虚数
○ 素数
○ 確率論
○ Σについて
○ パラドックス
○ ビンゴゲーム
○ ゼータ関数
○ 次元
○ 天文
○ 宇宙工学
○ クローン人間のこれから
○ 数学の未解決問題
○ 積分
○ コラッツ予想
○ 数理モデル
○ 麻雀
○ メルセンス素数
○ 0が整数ではないのはなぜか
○ ○の倍数といわれて1はなぜはいらないのか
○ ビックバンの前の世界
○ フェルマーの最終定理とその証明
○ オーロラ
○ テーラー展開
○ ややこしい空間図形の体積
○ フェルマーの最終定理
○ 素数、完全数
○ 4次元
○ 3次元のその先
○ AIのその先
○ 算数の足し算
○ ギリシャ三大作図
○ 無限等比級数
○ 解は1
○ 集合と論証
○ 自然界の数学
○ 複素関数論
○ iの謎
○ 結び目理論
○ ヤング図形
○ クラインのつぼ

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- 問題を解く時間が5時間半もあると聞いて、競技前は「長い」と思っていましたが、終わった時には「あっという間だったな」と感じました。とても楽しかったです！来年は、更に解ける問題を増やせるように、頑張りたいです！
- 同じような設定の問題でも、一つ条件が変わると考え方も答えも大きく変わることがわかりました。また、今回はどの大問も一番最後まで答えることができなかったので、次回は完答できるよう努力したいと思いました。
- 僕にとって難しすぎましたが、数学というものにより深い興味を持てました。
- 全く太刀打ちができなかったけれど、おもしろいと思った。また、機会があったら出たいです。
- とても新鮮なコンクールだと感じました。まだ難しいと感じる部分もあったので、また挑戦したいです。
- 普段数学の問題は一人で解いているけれど、今回チームで挑んでみて、話しながら問題を解いていると新しい発想と出会ったりミスに気づきやすくなっていいなと思いました。
- 疲れました。でも楽しかったです。
- 周り強すぎ
- 楽しかったです。
- 疲れたが良い機会になりました。
- 4回目の数学コンクールでした！毎年、様々な問題に触れることができ、作製者の方々に今一度お礼を申し上げます。来年も可能であれば受験させていただこうと思っているので、ぜひ良問をよろしくお願いいたします。
- たのしい、たのしいよ！
- Happy
- 私は数多くの問題について真に驚くべき証明を見つけたが、時間が少なく書ききることができなかった。
- 疲れた。
- 楽しかったけどめっちゃ疲れた。勉強しようと思った。
- もっと数多くの数学の問題に触れて、数学力を強化したいと思います。
- 自由な雰囲気がよかった。
- とても楽しかった！
- 1年の時にならった範囲でも深く掘り下げていくとこのような難しい問題を作れるということに驚いた。
- 数学の世界は広いなと思い、受験やこれからの数学の授業の取り組み方を頑張ろうと思った。また来たいです。このような問題を作った人にすごいと感じた。
- 思っていたよりもかなり問題が難しかった。
- 高1から3年間団体戦で出場させて頂きました！とても良い経験になったと思っております。3年間本当にありがとうございました。
- 難しい。
- 自分の限界を知ることができました。ありがとうございました。
- とても楽しかったです。
- とても楽しかったです。また行いたいです。
- なかなか解き応えがあった！
- 何時間もかけて1つの問題を考えるのはとても楽しかった。
- 問題が分かりにくいものが少しあった。
- 今の自分に足りないことが多く見つかったと思います。有意義な時間でした。
- 難しかったけれど楽しかったです。もっと数学ができるようになりたいです。
- ありがとうございました。難しかった。
- 問題の日本語が変です。（例）大問2　$4x^2+y^2$　<u>の形に持っていく。</u>→表現として「に変形する」の方が適切
- 数学の面白い問題に触れる良い機会になりました。
- チームで協力して解くのが楽しかったです。自由なのが楽しくできました。
- 「自由に考えて下さい」という問題は自由度が高すぎて辛いです。
- 自由度が高く楽しかった。
- すごく難しくて頭を使う問題が多くて数学コンクールはすごいと思いました。また仲間とともにたたかえたのはすごくよかったです。また機会があったら参加したいです。
- 次はもっと過去問を解いていどみたいと思いました。
- 初めてこの数学コンクールに出場したのですが、何だか、何とも言えない楽しさがありますね。私は高1なので難しいかなどうかな・・と思っていたのですが、完全に解くことが不可能ではなく、あ、あともう少しで分かる・・あと少しなのに！という良きムズムズ感が感じられて、本能がくすぐられました。ひらめいたときはWOW☆という感覚がくせになりそうですが、すぐまた新たな謎に出会ってしまうので、当分はいいかなと思います（笑）6時間もお座りして数学と向き合うなんて初めてだったので本当に頭が昇天してしまいそうです。実はここだけの話、私は全く成績が良くないし、数学なんてもってのほかで、人数合わせのために来たようなものなのですが、一番初めにいい感じの解き方を見つけることができて嬉しかったです。誰にも分らなかったし！答えが違っても嬉しいです。いい経験になりました。ありがとうございました。
- 大変だったけどこういう経験も悪くないかなと思えた。
- 楽しかったです。
- 今回の問題は面白い問題ばかりで楽しかったです。
- 楽しかったです。
- 眠い。
- 面白い問題ばかりで楽しかった。
- とても頭を使いました。
- 見たことも解いたこともない問題だったので、自分の数学の未知数に驚いた。自分だけだとできないことも、友達とだからこそだと思うところは割とあった。
- 難しかったですが、非常に興味深い問題でした。5時間がすぐにとけました。
- 意外に5時間は短く感じた。
- 会場を増やしてほしい。（中国地方）
- 遠かったです。
- 問題むずい！
- 毎年、工作などで実験のできる問題があるのでとても楽しいです。来年もできれば参加したいです。
- 解いた後にすごさがわかる問題だと思った。
- 複雑な計算に屈するべきではないと感じた。
- 時間があまりなかったけれど楽しかったです。
- もうちょっと難易度を下げてほしい。
- 初めて参加しました。難しかったです。時間がたつのが早く感じました。

- 頭をとても使えて楽しかったです。
- チームのみんなと協力できて楽しかった。
- 頭がおかしくなりそうです。
- どうしたら知ることができるんだろう。
- 数年前、先輩方が賞を取っていて僕も入賞目指して挑戦したけれど、やはり難しかったです。
- 数学っぽくなかった。
- 楽しかったです。
- 自販機の問題は、何円玉が使われるかなど、とてもたくさんの条件を設定できるので面白いと思いました。
- 疲れた。
- 問題の訂正は早めにお願いします。
- 集中力が足りなかったので、筋トレして鍛えたい。
- 大問4は総合的な思考力を問う問題でおもしろかった。1～3は自分は手をつけていない。
- 自分にとって、とても難しい問題ばかりでしたが、とても楽しかったです。
- なかなか解き応えがあった！閃かなくて難しかったけどとりあえず答えがでたときは気持ちよかった。
- 数学の先生の大会もしてみたらどうですか？
- 楽しかった。
- まあまあ楽しかった。楽しかった。
- 相談しながら解くことができ楽しかったです。
- 意外と時間がギリギリであせりました。問題はとても難しかったですが、みんなと相談して解答できるのは良かったですし、とても楽しかったです。雰囲気も良かったです。
- 去年より多くの問題が解けた。
- もっと長くても良いと思う。
- もう少し簡単にしてください。
- 今回初めて数学コンクールに出ましたが、友達と一緒に協力して問題を解くことの楽しさを感じることができました。問題は難しかったけど、どうやって解けばよいのか考えることが楽しかったです。
- 難しかったです。テレフォンチャンスとかどうですか？
- 数学コンクールは難しくて私が参加できるようなものではないと思っていたけど、思ったよりも問題を考えることができて楽しかったです。
- こんなに時間があったのにどの問題を解いてもあっという間に時間がたってしまいました。
- イスがいたいです。問題の意味がわかりにくくて読むのが大変でしたが、久しぶりに頭を目一杯使った感じがして楽しかったです。
- 昨年よりも、解いていてひらめいたりすることが多くてとても楽しいと感じました。問題3「50＋50＝98」をずっと解いていたのですが、図を考えながら、この場合はどうだろう？と友達と相談しながら解いていく過程がおもしろく、楽しかったです。
- とても楽しかったです。
- とても興味深いものばかりでした。
- ネット検索が許されているとはいえ、分からない数学記号を使う問題があり、書き方に苦しむことがあった。しかし、勉強とは違う数学に触れることができ、楽しかった。
- 問題が難しく実力不足を感じた。数学の分野はまだまだ自分が知らないレベルの高いものがあることを感じた。
- 例年、シャープペンをありがとう！
- 過去問よりかなり問題の質が上がっていた。

日本ジュニア数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　32（参加者32名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	11 人	(32.4 %)
イ 先生から	11 人	(32.4 %)
ウ 友人から	0 人	(0.0 %)
エ 両親から	7 人	(20.6 %)
オ 兄弟姉妹から	1 人	(2.9 %)
カ 新聞で	0 人	(0.0 %)
キ ラジオ・テレビで	0 人	(0.0 %)
ク 雑誌で	0 人	(0.0 %)
ケ 日本数学コンクールのホームページから	2 人	(5.9 %)
コ その他	2 人	(5.9 %)
○ 部活動	1 人	
○ 家にチラシが届いた	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	17 人	(38.6 %)
イ 数学が好きになりたいと思ったから	1 人	(2.3 %)
ウ 数学が苦手だから	0 人	(0.0 %)
エ 以前参加して有意義だったから	4 人	(9.1 %)
オ 先生に勧められたから	5 人	(11.4 %)
カ 両親に勧められたから	8 人	(18.2 %)
キ 友人に誘われたから	0 人	(0.0 %)
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	0 人	(0.0 %)
ケ 何となく興味があったから	5 人	(11.4 %)
コ 参考書持参が自由だから	2 人	(4.5 %)
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	2 人	(4.5 %)
シ その他	0 人	(0.0 %)

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	10 人	(21.7 %)
イ 問題は難しいけれど楽しかった	19 人	(41.3 %)
ウ 問題が難しいと思わなかった	1 人	(2.2 %)
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	5 人	(10.9 %)
オ 数学の学問的広さを感じた	6 人	(13.0 %)
カ 問題文の意味が分かりにくい	5 人	(10.9 %)
キ その他	0 人	(0.0 %)

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	9 人	(25.0 %)
イ 今後の進路を考える参考になると思った	2 人	(5.6 %)
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	23 人	(63.9 %)
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	(0.0 %)
オ その他	2 人	(5.6 %)
○ 自分は、好みの問題しかやってこなかったんだなと気付いた。	1 人	
○ 数学はやっぱり楽しい。	1 人	

5．数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。
あれば，それはどのような分野ですか。

3 名 物理
2 名 歴史
2 名 地学
2 名 音楽
2 名 科学

＊ その他（各1名ずつ）
英語、生物、地理、将棋、古文、家庭科、全分野

6．今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

2 名 浜村渚の計算ノート
2 名 数学ガール
＊ 各1名ずつ
数の悪魔、博士の愛した数式、理系のための線型代数の基礎、数、高校への数学、大学への数学、オイラーの贈物、神は数学者か？、青の数学、眠れないほどおもしろい！、マーティンガードナー数学ゲーム全集、確率のはなし、現代数学の源流

7．名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月27日(土)「整数論入門」「連分数をめぐって」
5月25日(土)「ある方程式の整数解における100年予想とそのアプローチ」「ペル方程式の解法」
6月29日(土)「量子コンピュータに関する最近の発展について」「大数学者の名言―ポアンカレと岡潔」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	10 人	（ 31.3 %）
②知らない	20 人	（ 62.5 %）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	7 人	（ 21.9 %）
②ない	4 人	（ 12.5 %）
③わからない	18 人	（ 56.3 %）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
○ 3次方程式の解の公式
○ 立体の切断
○ フィナボッチ数列とフィカ数列
○ 関数
○ 無理数のナゾ
○ $3x+1$の問題

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

○ となりの人がメールのやりとりをしていて、メールを読みながらとうあんを書いており、数十分おきにトイレにいっている。しんぱんいんがいなくなったとたんにスマホだす。だから、スマホ、タブレットのもちこみを禁止した方がいいと思う。
○ 一気に3枚もらう方とかいたのでビックリしたけれど、自分のことに集中できたのはよかったです。
○ 難しかったです。（特に問4）なので、とても解けませんでした。
○ 時間が短いぐらいだった。楽しかった。
○ 時間がたりなかった。
○ たのしかった！！難の∞倍むずかしい。
○ たちうちできなかった。
○ 問題文で分かりにくいところがあったから、読解力が私には足りないと思った。読解力をつけるために、国語をもっとがんばろうと思う。去年より問題がわかりやすかった。
○ もとから数学は大好きで、「どんな問題に出会えるんだろう。」と、ドキドキしながら当日を待ちました。よく考えないと解けない問題ばかりで、あっというまでした。楽しかったです！
○ 考えて解いたら、解けきれなかったときの悔しさなどは全く感じず、楽しくできた。
○ 解答を名大までいちいち聞きにいくのが面倒臭い。
○ 楽しかった。去年よりパワーアップできて、うれしかった。
○ とにかくむずかしかった。
○ だいぶ難しくてわけの分からない問題がたくさんあった。数学というのはそこらじゅうにあるのだなと思った。

日本ジュニア数学コンクール【団体戦】

アンケート総数 170 （参加者177名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	54 人	（ 27.8 %）
イ	先生から	82 人	（ 42.3 %）
ウ	友人から	39 人	（ 20.1 %）
エ	両親から	5 人	（ 2.6 %）
オ	兄弟姉妹から	2 人	（ 1.0 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	0 人	（ 0.0 %）
コ	その他	12 人	（ 6.2 %）
	○ 去年参加したから	11 人	
	○ 勧誘されて	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	67 人	（ 26.3 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	7 人	（ 2.7 %）
ウ	数学が苦手だから	5 人	（ 2.0 %）
エ	以前参加して有意義だったから	19 人	（ 7.5 %）
オ	先生に勧められたから	26 人	（ 10.2 %）
カ	両親に勧められたから	10 人	（ 3.9 %）
キ	友人に誘われたから	66 人	（ 25.9 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	8 人	（ 3.1 %）
ケ	何となく興味があったから	35 人	（ 13.7 %）
コ	参考書持参が自由だから	1 人	（ 0.4 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	5 人	（ 2.0 %）
シ	その他	6 人	（ 2.4 %）
	○ 友達と解けるから	1 人	
	○ 昨年のリベンジをするため	4 人	
	○ お金が高くなかったから	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	71 人	（ 24.9 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	93 人	（ 32.6 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	2 人	（ 0.7 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	53 人	（ 18.6 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	28 人	（ 9.8 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	33 人	（ 11.6 %）
キ	その他	5 人	（ 1.8 %）
	○ 簡単だと感じた	1 人	
	○ 自分は頭が悪いんだなぁ。	1 人	
	○ ユーモアのある解答ができなかったことを悔やんでいる。	1 人	
	○ 問題中の記号の意味を載せてほしかった。	1 人	
	○ かなり楽しかったです。面白かった！解けた時のすっきり感半端ないです！	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	68 人	（ 35.4 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	12 人	（ 6.3 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	96 人	（ 50.0 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	2 人	（ 1.0 %）
オ	その他	14 人	（ 7.3 %）
	○ 特に何も思わない。	4 人	
	○ また参加したいと思った。	2 人	
	○ 名大に行ってみたい！	1 人	
	○ 仲間と協力するすばらしさを知った。	1 人	
	○ 頑張ろうと思った。	1 人	
	○ 友達と仲良くなれそうと思った。	1 人	
	○ 文章をもっと読める力をつけたいと思った。	1 人	
	○ 楽しかった。	1 人	
	○ 難しかった。	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

28 名 物理
23 名 化学
17 名 生物
10 名 英語
7 名 歴史
5 名 科学
4 名 理科
各3 名 国語、四則、社会、哲学
各2 名 算数、日本史、漢字、生物学、地理、ゲーム(ブロスタ)、地学
* その他(各1名)
ひらめきクイズ、文系、現代社会、世界史、器楽、ピアノ、野球、化学反応、世界遺産、宗教、音楽、道徳、技術、環境、倫理、応用数学、速読、友達同士の結束を確かめ合うコンクール

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

6 名 数学ガール
5 名 数の悪魔
5 名 無限
3 名 教科書
3 名 天才数学者はこう解いた、こう生きた
3 名 黄金比
3 名 数の不思議
2 名 お任せ！数学屋さん
2 名 6Nimmtで自作ゲーム
2 名 円周率の謎を追う
* その他(各1名ずつ)
殺すう、四元数、八元数、四色問題、フェルマーの最終定理、面白くて眠れなくなる数学、数学という考え方、ヤング・タブロー、笑う数学、群・環・体入門、チャート、博士の愛した数式、最高水準問題集、ガゲロウディズで覚える中学数学、超難問、黄金比は全てを美しくするのか？、体感する数学、浜村渚シリーズ、数学検定3級、下剋上、Newton、青チャート、素数の本、参考書、アキレスはなぜ亀に追いつけないか

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを,「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で, 話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室, 題目や要旨はインターネットで公開しています。(名大のホームページにリンクしています。)今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月27日(土)「整数論入門」「連分数をめぐって」
5月25日(土)「ある方程式の整数解における100年予想とそのアプローチ」「ペル方程式の解法」
6月29日(土)「量子コンピュータに関する最近の発展について」「大数学者の名言—ポアンカレと岡潔」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	17 人	(10.0 %)
②知らない	147 人	(86.5 %)

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	13 人	(7.6 %)
②ない	34 人	(20.0 %)
③わからない	116 人	(68.2 %)

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

○ 円周率
○ 素数
○ リーマン予想
○ ゴールドバッハの予想
○ 4次方程式は解けるのか
○ ピタゴラス数
○ 数字
○ 四則
○ 生命の起源と進化の過程
○ 英語、国語、古文
○ 平方根
○ 勉強会。数学のおもしろさを知りたい。
○ 4次元
○ 宇宙
○ 『1+1=2』の証明の仕方を小学生にも分かるようなレベルで
○ 証明

８．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- 問題文のニュアンスが伝わりにくいところがあった
- 疲れたけど楽しかったです。
- 楽しかったです！これからも受けようと思います！
- 問題面白かったです。
- 問題難しいです。
- ありがとうございました。
- 数学について理解を深める良い機会になったと思います。
- 数学の楽しさがよく分かりました。
- 数学の世界は、数学ができても国語の力も必要だと思った。
- とてもおもしろい。
- 計算などではなく、いろいろな視点からみられる問題で楽しかったです。ありがとうございます。
- 数学の面白さがあらためて分かりました。今日はありがとうございました。
- 数学の問題で難しい問題に挑戦することができてよかったです。ありがとうございました。
- 様々な問題があり、とても楽しかったです！また機会があれば参加してみたいと思いました。
- 楽しかったです。
- 楽しかったけど難しかったので、また勉強してからやりたい。
- 楽しかった。
- 思ったより、確率の問題が多かった。
- 問1が少し自信があるけど、問3はやばい。他は解いていない。
- 難しかったですが、楽しかったです。
- 一見簡単そうで難しいという問題ばかりだった。考え方が分かる程、計算量が減るというものばかりでおもしろかった。
- つかれた。
- 時間不足。
- 難しいかもしれない。しかし、今後発達するにはさらなる難しい問題が必要だと思う。だからこそ、私は今回簡単だったと感じた。
- とても、本当に、ものすごく、言葉にできないくらい難しかったです。
- 問題が理解しづらかった。
- 数学への興味が更に深まった。
- いつも解かない問題ばかりでとてもおもしろかった。
- 4がとても難しかった。某有名映画とは、「君の名は」のことですか？
- むっちゃ楽しかったです！どれもおもしろい問題でした！あの100なのに98みたいなの解けたときまじで嬉しかったです。
- すごく難しかったです。おてあげ～
- とても楽しく勉強できた。よく考えて解けたので嬉しかったです。
- 部屋が暑いです。
- 部屋が暑くせまかったです。
- 問題がなかなか手強く、自分の力の無さを知った。大変だったが楽しく、いつかリベンジしたいと思った。
- 数学がとても好きになった。友達と考えられてよかった。
- この大学に推薦で入りたい。
- 高校生や大学生になってから改めてこの問題を解いてみようと思った。
- 机をもうちょっと広くしてほしいです。
- 文章を読み解くのが楽しかったです。
- 問題文が長いのがきついです。
- 色々な問題があり、数学の面白さ、幅広さを実感できました。
- 難しすぎて倒れそうです。
- 楽しかったです。
- 楽しかったです。ありがとうございました。
- じっくり時間をかけて問題を解くのは楽しかったです。
- 5時間も数学をするということが今までになかったので、良い経験になりました。
- 楽しかったです。
- 普段、学校でする問題とは全然違って難しかったです。でも、みんなで解いたので、一人で解くより心強かったです。みんなのいろんな意見が聞けて楽しかったです。
- とっても楽しかったです。また行きたいなぁとても思いました。
- 問題はとても難しかったけど、みんなとワイワイ言いながらすることができてとても楽しかった。
- 問題文の読解に時間がかかりました。
- 難しかったです。
- あまり解けなかった。
- 絆がよりいっそう深まったと思う。
- 問題が解けたとき気持ちよかった。
- とても面白い問題があって良かったです。
- 素敵な問題をありがとぉ。
- 数学は数字が9割だと思っていた。しかし5割ほどだった。しかも、文読むのめんどくせぇ。今日、初めて数学コンクールで、どのような問題が出てくるのかわからなかったけど、全部（ほぼ）が文章問題だったので、僕は心の中で、「詰んだ」と思いました。でも、友達が「やっと一問わかった一」と言っていたので、時計を見てみると2時42分でした。一問を解くのに4時間12分かかったのにほかの人たちはすぐに解いていっている声が聞こえたので、今年は終わった。
- あまり解けなかった。よくわかりませんでした。でも数学でこんな問題をつくれるんだなぁと思いました。
- こんなに難しい問題を挑戦できてとても嬉しかった。
- 楽しかった。
- 難しかったけど、楽しかった！
- みんなで協力して考えることで仲が深まったと思います。
- 楽しかったです。
- 自由に解答できてよかった。
- 楽しかったです。
- 長時間じっくり数学の問題に触れることで数学への興味が深まった。
- 難しかったが、協力できて楽しかった。
- 問題が難しくて全然分からなかったけれど、数学への関心がさらに広がった。
- 問題文がおもしろかったです。
- 過去問とその解説が書かれたものが欲しいです。ジュニア問題2の問題が面白かったです。

- みんなで見たことのない問題を解くことができてとても楽しかったです。
- よく考えないといけない問題がたくさんあり、難しかったです。
- 問題はとても難しかったけれど、いつもと違う問題で友達と協力して出来たので良い経験になりました。そして、もっと数学の勉強を頑張ろうと思いました。
- （2）ぶつかって入れ替わるのは昔のマンガみたいで（1）デッドロックの意味を初めて知って（3）エチルアルコールの下りはなぞで（4）理解が追いつきませんでした。難問ばかりでした。
- つかれた。
- 合意するって何！？
- 僕も入れ替わりたい。
- 学校ではできないような問題がとけて楽しかった。
- 楽しかった。
- 難しい問題だったが、とても楽しめた。
- 楽しかった。
- 今後の数学に対する考え方が変わると思った。
- みんなと仲良くなれたし、解けたら達成感があった。楽しかった。
- 電子機器OKというのはとても良く、理にかなっていると感じた。
- 楽しく考えることのできるおもしろい問題ばかりだった。
- $e^{i\pi}+1=0$

日本数学コンクール実行委員会委員名簿

学内委員	宇澤　達	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	古庄　英和	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	林　正人	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	伊師　英之	（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
	松下　琢	（名古屋大学理学研究科　講師）
	西村　治道	（名古屋大学情報学研究科　教授）
	樋野　励	（名古屋大学経済学研究科 教授）
	田地　宏一	（名古屋大学工学研究科　准教授）
	渡邉　武志	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
	若山　晃治	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
学外委員	鈴木　紀明	（名城大学理工学部　教授）
	松川　和彦	（愛知きわみ看護短期大学　事務局長）
	高田　宗樹	（福井大学工学部・工学研究科　教授）
	保倉　理美	（福井大学工学部・工学研究科　教授）
	服部　展之	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	野村　昌人	（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
	村田　英康	（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
	小島　洋平	（愛知県立岡崎高等学校　教諭）
	渡辺　喜長	（愛知県立熱田高等学校　教頭）
	青木　勝人	（愛知県立旭丘高等学校　定時制　教諭）
	髙原　文規	（愛知県立千種高等学校　教諭）
	伊藤　慎吾	（愛知県立鳴海高等学校　教諭）
	小島　彰二	（愛知県立名古屋西高等学校　教諭）
	奥田　真吾	（三重県立津高等学校　講師）
	岩本　隆宏	（三重高等学校　講師）
	小倉　一輝	（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
	市川　敏	（椙山女学園高等学校　教諭）
	青木　健一郎	（愛知県立刈谷高等学校　教諭）
	田邉　篤	（三重県立津高等学校　教諭）
	岡﨑　建太	（京都大学数理解析研究所　研究員）
	久世　武志	（大阪府立住吉高等学校　教諭）
	高木　由起子	（愛知県立東海商業高等学校　教諭）
	川上　祥子	（愛知県立豊田西高等学校　教諭）
	児玉　靖宏	（愛知県立刈谷北高等学校　教諭）
顧問	大沢　健夫	（元名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	安本　雅洋	（元名古屋大学情報科学研究科　教授）
	丹羽　一雄	
	樋口　英次	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	矢野　秀樹	（大同大学大同高等学校　教諭）
	田所　秀明	（元三重県立伊勢高等学校　教諭）

日本数学コンクール委員会委員名簿

委員長	髙橋　雅英	（理事・副総長）
委　員	岡田　聡一	（多元数理科学研究科長）
	福澤　直樹	（経済学研究科長）
	村瀬　洋	（情報学研究科長）
	阿波賀　邦夫	（理学研究科長）
	水谷　法美	（工学研究科長）
	上月　正博	（事務局長）
	山口　茂	（研究協力部長）
	宇澤　達	（実行委員会委員長）

（平成31年4月1日現在）

主　　　催

名　古　屋　大　学
日本数学コンクール委員会
名古屋市千種区不老町

後　　　援

愛　知　県　教　育　委　員　会	岐　阜　県　教　育　委　員　会
三　重　県　教　育　委　員　会	名　古　屋　市　教　育　委　員　会
大　阪　市　教　育　委　員　会	愛知県高等学校数学研究会
和歌山県橋本市教育委員会	三重県高等学校数学教育研究会
岐阜県高等学校数学教育研究会	中　　日　　新　　聞　　社
大阪高等学校数学教育会	東海テレビ放送株式会社
テ　レ　ビ　愛　知　株　式　会　社	

■■■ 編　集　後　記 ■■■

日本数学コンクールはついに第３０回目を開催することが出来ました。３０年間、実に多くの方々の熱意と献身に支えられて運営されてきたことをあらためて実感し、全ての関係者に心から感謝いたします。コンピュータの発達によって社会は３０年間で大きく変化し、とくに人工知能やビッグデータが取り沙汰されるこの数年間、数学に対する社会的な期待は著しく大きくなっています。一方で、教科書にとらわれない自由な出題や、面白い問題に食らいつく受験者の気質といった「数学コンクールらしさ」は３０年間で不変であり、その特長は現在の期待にもマッチした普遍的なものと言えます。団体戦の導入やネット閲覧の解禁など、時代に合わせて柔軟に変化してきましたが、根本にあるコンクールの精神は今後も大事に保持していきたいものです。