2017

日本数学コンクールのまとめ

第28回　日 本 数 学 コ ン ク ー ル
第21回　日本ジュニア数学コンクール

－平成29年８月６日実施－

第18回　日本数学コンクール論文賞

日本数学コンクール委員会

名 古 屋 大 学

目　　　　次

1．はじめに

日本数学コンクールを開催して

日本数学コンクール委員会委員長　　髙橋　雅英
（名古屋大学研究担当理事）

平成 29 年 8 月に、名古屋大学主催の第 28 回日本数学コンクール、第 21 回日本ジュニア数学コンクールを無事開催することができ、ご尽力いただいた関係者の皆様に心より御礼申し上げます。今回は 500 名を超える中高生の皆さん、そして 3 名の小学生の皆さんも参加してくれ、熱気に満ちたコンクールになりました。

本コンクールは学校での数学の試験とは異なり、5 時間半という持ち時間の中で、自由な発想、独創的な発想で問題を解いてもらうことが特色になっています。特定の 1 問だけに集中しても良いし、複数の問題にチャレンジしても良く、参加者の個性を大事にするコンクールとして企画されています。出題の内容も身の回りの題材を取り上げたものから、数学の本質を問いかけるものまで幅広く、数学の楽しさを実感してもらう工夫がちりばめられています。私のような数学から長年遠ざかっているものにとっては、何から考えてよいかさっぱりわからない問題ばかりですが、多くの小中高生がこのような問題に取り組み、実際に素晴らしい解答を創り上げることを知り、若い人たちの頭脳の柔軟性にあらためて大きな感銘を抱いた次第です。

本コンクールに参加した皆さんのアンケートでは、「問題は難しかったけど楽しかった」と感想をよせてくれた人が多く、「数学に関する考え方が深まり、もっとやってみたいと思った」、「学校とはまったく別の問題が出題され、とてもおもしろいと思いました」、「こんな機会はめったにないのでいい経験になりました」などの声がよせられました。また、「団体戦で仲間と一緒に協力して問題に挑戦できたのが楽しかった」という声も多くありました。

時間をかけ、自らの解答を導き出すという過程を楽しむことが本コンクールの醍醐味の 1 つだと思います。身の回りの何気ない現象の中にも多くの数学的な問題が潜んでおり、そのようなことへの気付きのきっかけにもなれば幸いです。本コンクールを通じて、数学が楽しいと思う若者が育ち、将来数学で学んだことを応用できる様々な分野で活躍する人材の育成につながればと思う次第です。最後に、お忙しい中、問題を考えていただいた先生方、解答の評価をしていただいた先生方に心から御礼を申し上げます。来年度も多くの小中高生の参加を期待しています。

２．日本数学コンクール開催の趣旨

開催の趣旨

今日世界はいろいろな意味で大きな転機に立っています。産業技術の高度化や高度情報化の技術革新は急速な進展を見せていますが，反面，人口爆発，エネルギー問題，環境汚染等人類がかつて経験したことのない複雑多岐にわたる課題に直面しています。このような問題を解決し，将来にわたって人類社会の発達と繁栄を享受していくためにも，総合的，学際的な学術研究の振興が必要です。このことは，必然的に汎科学性を有する数学の一層の飛躍とそれによる新しい科学の発展が求められており，それを支える優れた数学的思考力を持ち，探求心と創造性豊かな人材の育成が急務となっています。

このような情勢にかんがみ，新しい科学と技術の開拓を担う夢とロマンを秘めた青少年の発掘，伸長を図っていくため，中・高校生を対象に，平成 2 年度から「日本数学コンクール」を，同 9 年度からは「日本ジュニア数学コンクール」を，同 12 年度からは「論文賞」を開催してきました。そして同 27 年度からは，協力して解を導き出せる人材の発掘・育成のため「団体戦」を導入しました。私ども委員会は今後とも数学コンクールを実施し，もって世界の学術研究進展の基礎形成に寄与していくものです。

特　色

◎自由にゆったり考える

一題に絞っての解答も可能です。参考書やノート等の持ち込みも自由です。途中，試験会場で昼食や飲み物などを自由に取ることができます。

◎楽しい数学の発見

学校における数学の教育課程，教科書にとらわれず，数学の本質に根ざした考えていて楽しい問題を提供します。数理実験も積極的に採り入れます。

◎多彩な才能の評価

優秀な能力をもった生徒，ユニークな発想をもった生徒等様々な参加者の才能を多面的に評価します。特定の一題に集中して素晴らしい発想を出した生徒も顕彰します。

◎優れた人材の育成

日本数学コンクール参加者の数学的な能力，資質を一層高めるために，定期的に，中・高校生を対象に数学の公開講座「数理ウェーブ」を開催しています。

なお，「数理ウェーブ」は一般の方々の参加も認めており，多数の参加があります。

３．講評と解説

（１）２０１７年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評

日本数学コンクール実行委員会委員長　宇澤　達
（名古屋大学多元数理科学研究科教授）

シニア問題 1「映画館の設計」
　幾何的な条件をうまく最大・最小の問題に翻訳するところを見る問題です。みなさんいろいろな考え方をだされ、幾何的な解法もあり、感心しました。

ジュニア問題 1「係と席替え」
　この問題は、生徒を「点」、係を「直線」と考えると、相異なる点を結ぶ直線は必ず一意的に存在する、などの我々が知っている平面幾何の公理をみたします。一般に平面幾何は無数の点がありますが、ここでは有限個の点と直線によってその公理を満たすものが存在するところに興味があります。Fano というイタリアの数学者によって発見されたもので、$\{0,1\}$からなる有限体の存在と密接な関係があります。席替えは 168 通り（動かない、というものも含め）あり、単純群と呼ばれるものになります。

共通問題 2「最短経路で往復」
　自分自身と交わらない道の研究は、高分子化合物の研究と関連して今活発に研究されています。ここでは、最短距離を実現するものの個数を問いましたが、確率論的に考えるなど、さまざまな拡張を考えることができます。数学者、化学者、物理学者が興味を持っている問題の好例です。

共通問題 3「パスカルとフラクタル」
　パスカルの三角形は、漸化式で定義される数列の代表例です。自然数からなる数列ですが、これを「素数を法」として考える、つまり素数で割った余りを考えるといままで見えなかった規則性をみることができます。

共通問題 4「あなたはデザイン事務所の事務担当」
　正多面体の分類、特に正 20 面体、正 12 面体がすでにギリシア時代に知られていたことは驚くべきことです。自然界で実際に正 12 面体が発見されるのは、ウィルス、フラーレンなど、比較的最近のことです。ここでは、正 12 面体に親しんでもらうことを一つの狙いとしました。みなさんよく取り組まれ、感心しました。

共通問題 5「変形 make 10」
　通りかかった自動車のナンバープレートをもとに 10 が作れるか、遊んだことがある人たちは多いと思います。カッコを使ったり、+, x などの演算を混ぜることは、数学的にいえば樹形図を考えることに相当します。自然言語の理解など、さまざまな分野で可能な樹形図を数え上げることは重要な問題です。未解決の問題も登場しますが、みなさん果敢にチャレンジされ、感心しました。

　以上全ての問題について、参加者の皆さん、よく頑張ってくださいました。ありがとうございます。

（2）日本数学コンクール問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　高田　宗樹（福井大学学術研究院工学系部門　教授）
渡辺　喜長（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
山内真澄美（愛知県立豊明高等学校　教諭）

問題１．「映画館の設計」

ここでは映画館の設計を考えてみましょう。簡単のため、一辺の長さをLとする正方形の平坦なスクリーンを用意し、地面に対して鉛直なyz平面上に固定します(図 1 参照)。まずは、このスクリーンを見込む角θの大きさを評価しましょう。ほとんどの場合、このθの大きさは見る位置によって変化してしまい、均質な視聴環境が提供できていないのが実情です。

準備：図 1 のように野原に大スクリーンを置いて鑑賞するとき、どの位置から見るとθが最も大きく、映画を楽しむことができるといえるでしょうか。ここでは、前のお客さんの頭に隠れて見えないことがあるといけないので、スクリーンはお客さんたちの身長hより高いところに置くことにします。

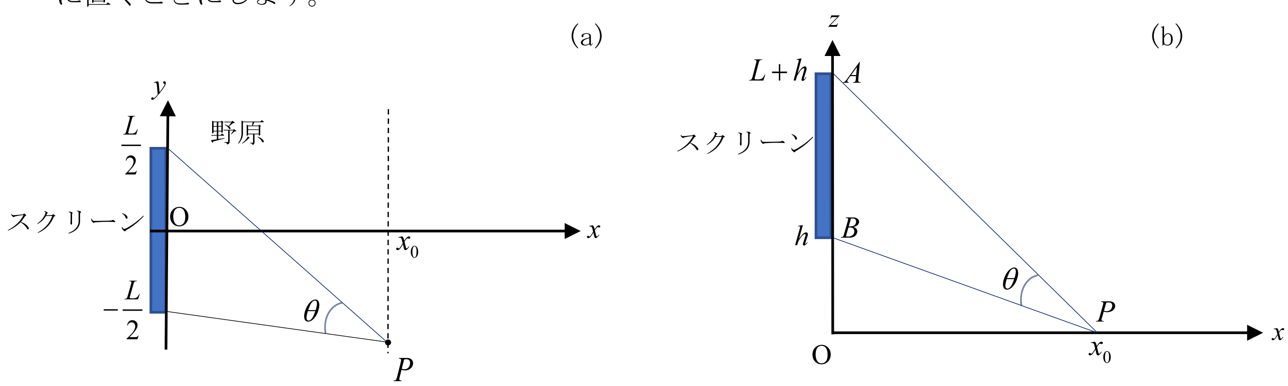


図 1.スクリーンの設定.

(a) 野原の地面をxy平面にとります。右半平面$\left\{(x,y)\middle|x\geq 0, y\geq 0\right\}$にいるお客さんを対象とします。まず、点$\mathrm{P}(x_0, y)$からスクリーンを見込む角$\theta$の大きさを比較してみましょう。$y=0$の位置で$\theta$の値が最大
となることを確認してください。

(b) 簡単のため寝そべっているお客さんのスクリーンを見込む角θを図に入れました。$\angle APB$が鋭角のとき、$\sin\theta$は単調に増加するので、正弦定理を用いれば、３点A, B, Pを通る円の半径Rが最小のときθの最大値を得ることを示すことができます。図 2 のように、３点A, B, Pを通る円が点Pにおいてx軸と接するとき、Rが最小になることを確認してください。

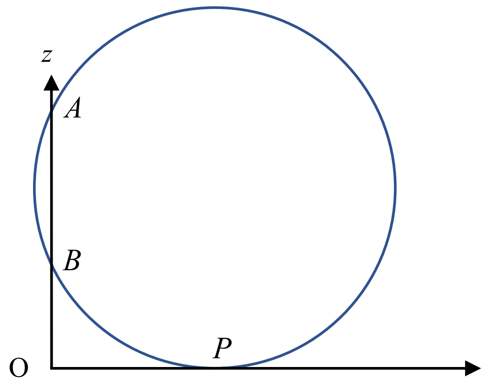


図 2.　３点 A,B,P を通る円の半径 R が最小になる場合関係

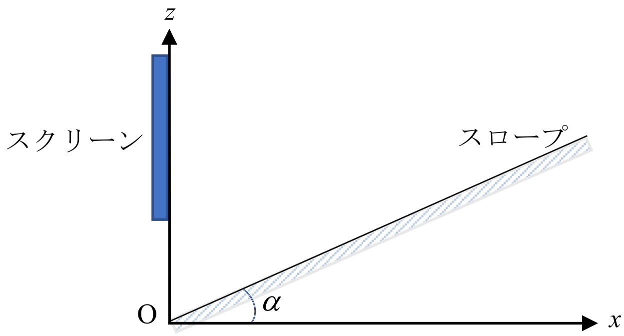


図 3 スロープとスクリーンの位置

ここからは、まず、zx 平面における議論をしましょう。可能であれば zx 平面に限らず自由に論じてください。

(1) 一定な傾斜角をもつスロープ上で映画を鑑賞するとき、どの位置から見ると θ が最も大きく、映画を楽しむことができるといえるでしょうか。ここでも、前のお客さんの頭に隠れて見えないことがあるといけないので、スロープとスクリーンは交点を持たないように、スクリーンを図 3 のように置くことにします。

(2) 映画館の座席を置く面(曲線)の設計をしましょう。リクライニングする座席の背もたれを接線とする曲線 C を求めてください。姿勢の快適さから C の法線は、つねに正方形スクリーンの対角線の交点を通るようにします。このとき、どの位置から見ると θ が最も大きく、映画を楽しむことができるといえるでしょうか。どの位置から見ても θ の大きさを等しくするようなことはできるでしょうか。

(3) 正方形 DEFG をスクリーンに投影します。スクリーンを間近から見上げると歪んで見えます。(2)をふまえて、どの位置から見ると映画を最も楽しむことができるといえるでしょうか。以上で述べていない評価尺度があれば、各自で定義して自由に議論してください。

解説と講評

準備(a)　動点 P について、(スクリーンを見込む角 θ) ＝∠BPC を定義します(図 A.1a)。感覚的には自明ですが、動点 P が $y=0$ のとき θ が最大となります。詳細は(b)を参照してください。以降は、面 $y=0$ におけるスクリーンを見込む角などを評価していきます。

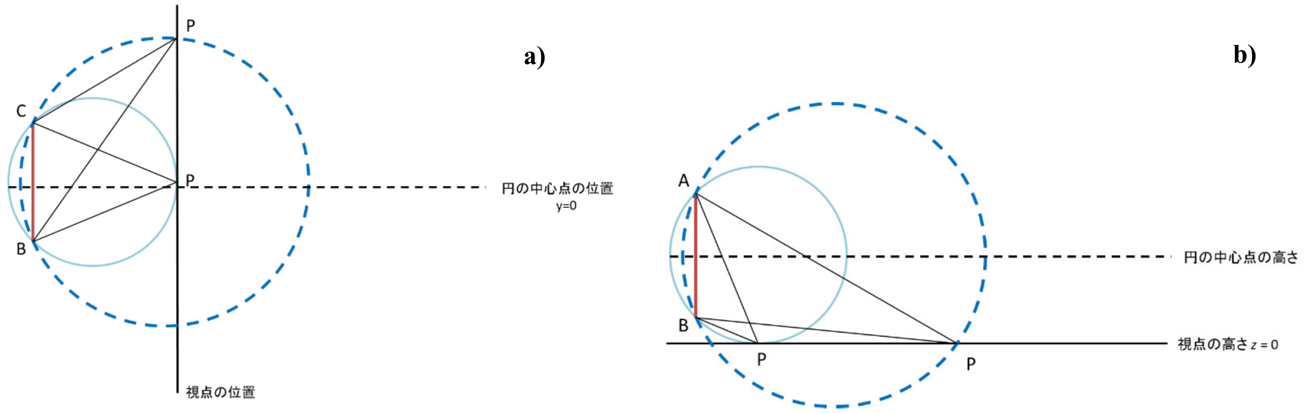


図 **A.1** 動点 P が xy 軸に沿って進む場合；y 軸に沿って進む場合 a). x 軸に沿って進む場合 b).

(b)　図 1b において $z=0$ にて寝そべっているお客さんのスクリーンを見込む角 $\theta=$ ∠APB が鋭角のとき、正弦 $\sin\theta$ は単調に増加します。３点 A,B,P を通る円 C(P)の半径を R とすると、⊿ABP において正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin\theta}=2R$$

となります(図 A.1b)。スクリーンの一辺 AB は一定ですから R と θ は反比例します。故に３点 A,B,P を通る円の半径 R が最小のとき θ の最大値を得ます。対称性から円 C(P)の中心は AB の垂直二等分線(図 A.1 の黒い点線)を通るので、R が最小となる円は $z=0$(x 軸)に接する円です(図 A.1b 参照)。よって、θ の大きさは見る位置によって変化してしまい、均質な視聴環境が提供されません。

x

(1) スロープを有する映画館の場合、(b)と同様に議論することができます。対称性から円 C(P)の中心は AB の垂直二等分線(図 A.2 の黒い点線)を通るので、R が最小となる円はスロープに接する円です。この場合も θ の大きさは見る位置によって変化してしまい、均質な視聴環境が提供されません。

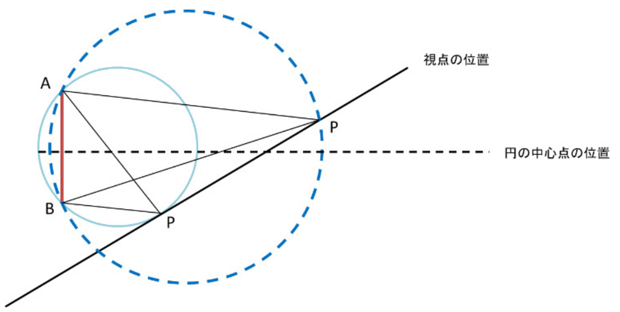


図 **A.2** 動点 P がスロープに沿って進む場合

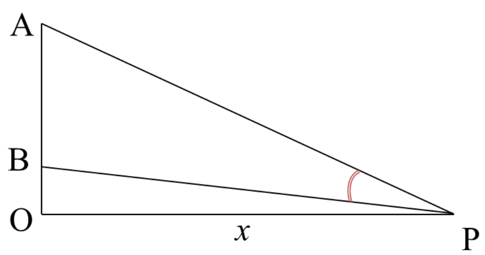


図 **A.3** 加法定理を用いた解法

ところで、この種の作図的な方法によらずに、θ の最大値を得る場所を特定することもできます。簡単のため $\alpha=0$ の場合(図 A.3)、$A(a),B(b),P(x)$ として、加法定理より、

$$\tan\theta=\tan(\angle OPA-\angle OPB)$$

$$=\frac{\tan\angle OPA-\tan\angle OPB}{1+\tan\angle OPA\cdot\tan\angle OPB}==\frac{\frac{1}{\tan\angle OPB}-\frac{1}{\tan\angle OPA}}{\frac{1}{\tan\angle OPB}\cdot\frac{1}{\tan\angle OPA}+1}==\frac{\frac{x}{b}-\frac{x}{a}}{\frac{x}{b}\cdot\frac{x}{a}+1}=\frac{\{a-b\}x}{x^2+ab}=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}.$$

分子はスクリーンのサイズに関係した定数です。一方、$a>0, b>0$ なので、相加・相乗平均の関係より

$$x+\frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab}$$

となります。等号成立は $x=\sqrt{ab}$ のときであり、$x+\dfrac{ab}{x}$ はこのとき最小となります。θ は鋭角であり、θ の単調増加関数 $\tan\theta$ は $x=\sqrt{ab}$ のとき最大値をとります。よって、幾何平均に相当する距離だけ離れたところから見た見込み角が一番大きくなります。また、スクリーンを見込む角 θ = ∠APB がどこで最大になるかは解析的に議論することもできます。$\tan\angle OPA = \tan(\theta + \angle OPB)$ について加法定理により、$f(x)=\tan\theta$ と定義して、

$$\frac{a}{x}\left\{1-f(x)\frac{b}{x}\right\} = f(x)+\frac{b}{x} \Leftrightarrow \left\{1+\frac{a}{x}\frac{b}{x}\right\} f(x) = \frac{a}{x}-\frac{b}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x(a-b)}{x^2+ab}$$

を得ます。この導関数を求めると、

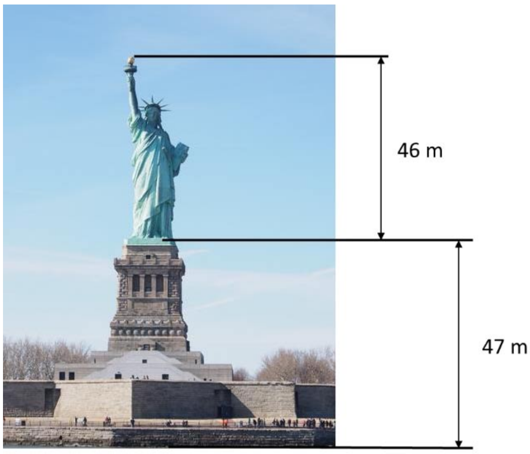
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(a-b)\left\{\left(x^2+ab\right)-x\cdot 2x\right\}}{\left(x^2+ab\right)^2} \\ &= \frac{(a-b)\left\{ab-x^2\right\}}{\left(x^2+ab\right)^2} \end{aligned}$$

$a>b$ より $f'(x)=0$ となるのは $x=\sqrt{ab}(\equiv u)$ のときです。また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{(a-b)(u^2-x^2)}{\left(x^2+u^2\right)^2}\right]' = \frac{-2x\left(x^2+u^2\right)^2-(u^2-x^2)2(x^2+u^2)2x}{\left(x^2+u^2\right)^4}(a-b) = \frac{-2x(a-b)\left(x^2+u^2\right)\left\{x^2+u^2+2(u^2-x^2)\right\}}{\left(x^2+u^2\right)^4} \\ &= \frac{-2x(a-b)(3u^2-x^2)}{\left(x^2+u^2\right)^3} \end{aligned}$$

となります。よって、$f''(u)<0$ となり、増減表を書くなどして $x=u$ のとき関数 $f(x)$ は最大値をとることを示すことができます。この種の問題は Regiomontanus の問題(1471)として古典的に知られており、銅像の天辺と足下を見る視角 θ が最大になる位置はどこかを解くことになります[1]。例えば、自由の女神像を用いると図 A.4b

a) **b)**



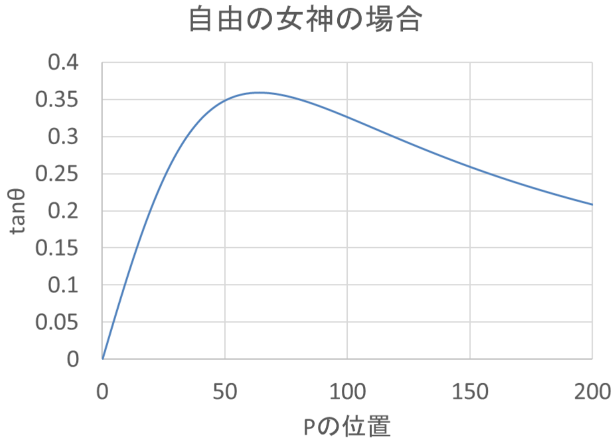


図 A.4 自由の女神像を用いた場合; 実際のスケール a), 見込み角の計算 b)

に示すように視角 θ（の正接）が具体的に計算できます。柳井(2002)は視点の高さ h ごとに視角 θ が最大になる位置 u を評価しています。u と視点の高さの関係は双曲線となることを導いています[2]。このように日常的な視点から数学的アプローチを考えることは日本数学コンクールの基軸の 1 つになっています。

(2) この問題では線形なスロープ（図 A.5）にかわって、観客席を置く曲線 C:$y = f(x)$が登場します。C の法線が正方形スクリーンの交点を通るという条件を入れます。簡単のため、この交点を原点に置きかえます（図 A.6）。ここでは観客席のリクライニングした背を C の接線方向にとり、客席の座面と背の蝶番から法線を引いています。すると、C 上の点 $(X, f(X))$ の法線の方程式は

$$y - f(\mathrm{X}) = -\frac{1}{f'(X)}(x - X)$$

は原点 0 を通るので、微分方程式 $f(X)f'(X) = -X$……①が得られます。この微分方程式は

$$\frac{d}{dX}\left[\frac{f^2(X)}{2}\right] = -X$$

と変形できます。$Y = f(X)$ とおくと $Y^2 = -X^2 + const.$ なる関係に気づくことができます。つまり、微分方程式①を解くことによって曲線 C として円の方程式を得ることができました。

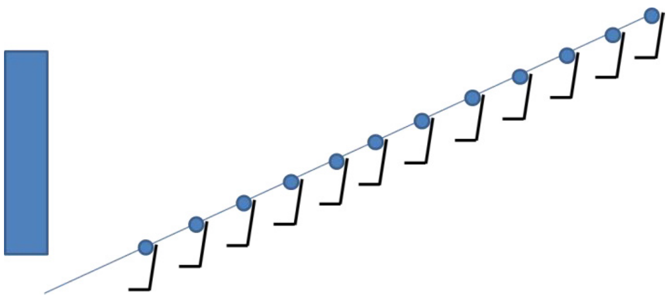


図 A.5 スロープ上の観客席

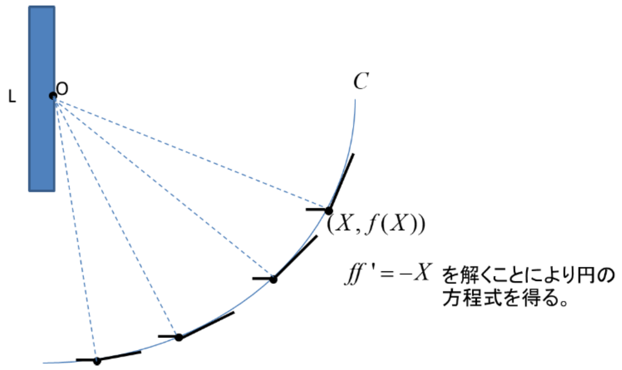


図 A.6 曲線 C 上の観客席

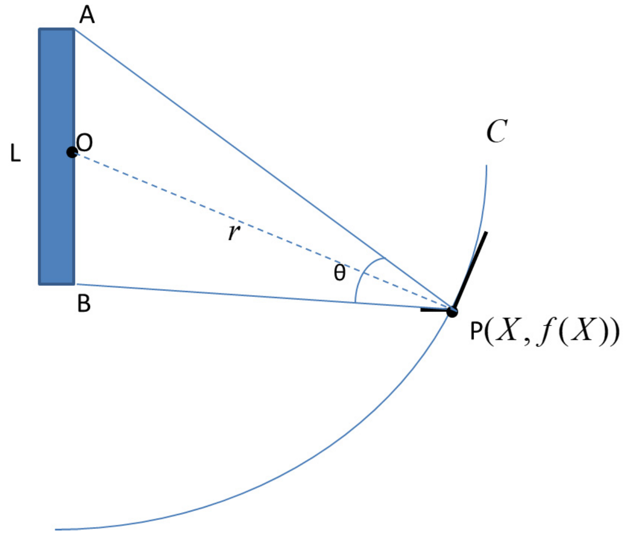


図 A.6 余弦$cos\theta$の評価

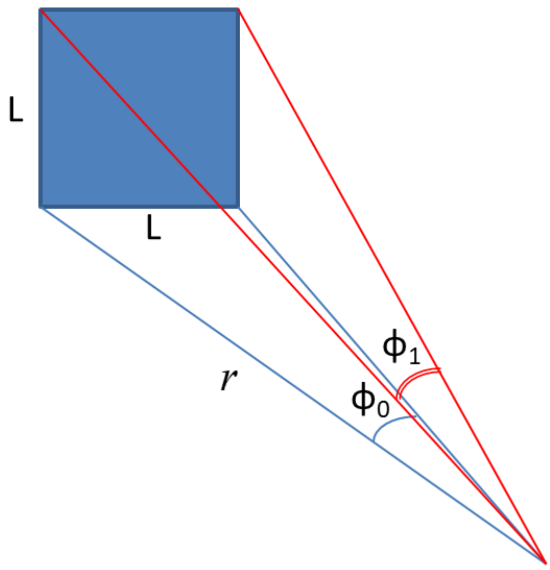


図 A.7 投影像の歪み評価

一方、スクリーンを見込む角 θ については、図 A.6 のように⊿ABP について余弦定理を用いることにより、$cos\theta$

を以下のように評価できます。

$$\cos\theta = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2AP \cdot BP} = \frac{2\left\{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right\}}{2\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right\}^2 - L^2 f^2}} = \frac{\left\{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right\}^2 - L^2 Y^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ただし、C の半径を r と書きました。$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$に注意すると、$X \to r, Y \to 0$ のとき分母が最大になります。ここでは、$cos\theta$は単調に減少するので、$X \to r, Y \to 0$ のとき$\theta = \theta(x)$は最大となります。C の半径 r とスクリーンの一辺の長さ L が r=L/2 という関係をもつとき、②の分子は 0 になり、θ の大きさは見る位置によって変化せず、均質な視聴環境を提供することができます。このとき、θ は直径に立つ円周角になり、C 上の任意の点で$\theta = \frac{\pi}{2}$となります。

このようにして、θ の大きさを等しくする映画館の設計をすることができました。ここでは $y=0$ の面内に限って議論していますが、図 A.1a の $y=0$ に関する対称性を使って空間拡張して、球面の映画館を数理設計することができます。

(3) (2) では、①姿勢の快適さ、②スクリーンを見込む角を評価に入れて、均質な視聴環境が提供できる映画館を設計しました。一方、スクリーンに投影した正方形 ABCD の歪みは、図 A. 7 を参照して $r\varphi_0 = L, \sqrt{r^2 + L^2}\varphi_1 = L$ より、

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2}}$$

などで見え方の歪を計量して議論することができます。その結果、C 上では$x = 0$で最も歪みが大きくなります。このように複数の尺度を入れて評価関数を議論することもできます。様々な観点を独自に入れて、是非、挑戦してみてください。

本問題について、久富一輝君(大垣東高校 3 年)は①を完全に解いて、映画館の数理設計を論じることができました。星野泰佑君(東海高校 1 年)は②に関連する計算過程および数理評価に、大変、熱意が感じられました。

参考文献：

[1] Wells, David (1991) Dictionary of Curious and Interesting Geometry, Penguin Books.
[2] 柳井浩(2002) 身近な曲線、日本数学検定協会学習数学研究所

（３）日本ジュニア数学コンクール問題第１問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　　宇澤　　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
大平　　徹（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）

問題１．「係と席替え」

　ある村の小さい学校では、１クラスに７人の生徒しかいないので、一人で色々な係をしなくてはなりません。
　次のルールで、係を分担しています。

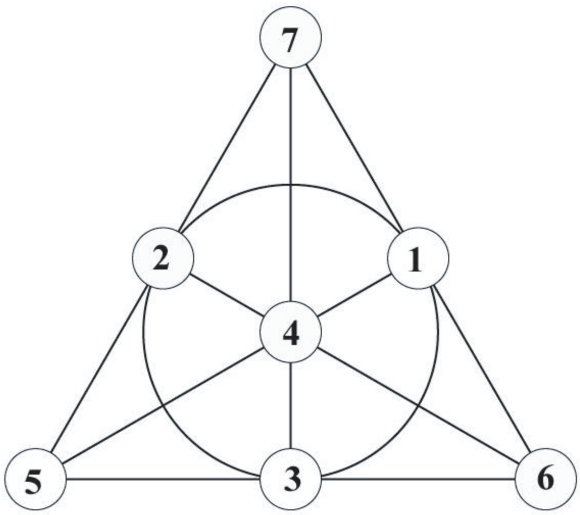
（ア）それぞれの係は３人からなる。
（イ）どの２人も何かの係を一緒に務めるが、二つの係を共通にすることはない。

　７個の机には、そこに座る人が務める係の名前が貼ってあります。このクラスでは定期的に席替えをするので、それに伴って、係も変わることになります。
　次の問に答えてください。

（１）このクラスには全部でいくつの係があるでしょうか。
（２）どの二つの係にも共通な人がただ一人だけいることを示してください。
（３）同じ係の３人が、必ず同じ係になるようにする席替えの仕方は何通りあるでしょうか。
（４）（３）の席替えの方法のうち、２回繰り返すと元通りになるものを一つ挙げてください。
（５）（３）の席替えの方法のうち、７回繰り返して元通りになるものはあるでしょうか。
（６）人数などを変えて、自由に問題を考えてください。

解説と講評

この問題は，Fano 平面と呼ばれる，有限体上の幾何をベースとした問題です．生徒は点，一つの係を（三つの点からなる）直線と考えれば，所与の条件は，二つの相異なる点を通る直線は必ず存在し，そしてただ一つであるという条件となります．通常の射影平面の公理では，二つの相異なる直線は必ず一点で交わるという条件がありますが，Fano 平面については，他の公理から導かれる，というのが小問(2)です．問題の(4), (5)については，次のように生徒を点で表し，係を線で表すと分かりやすくなります．しかしながら，位数 7 の置き換えはなかなか難しいように思います．ここで，許される席替えは 1 から 7 の入れ替え（置換と言います）で直線を直線（1,2,3 については円ですが）を直線に移すようなものです．



なかなか難しい問題だったようですが, 特筆に価するのは個人戦で参加された神垣朱里さん（雙葉小学校 5 年）が(1), (2), (3)を完答されているのには感心しました．団体戦では，東海中 3 グループさん（渡辺空一翔さん，中根敦久さん，柳健太さん，田中梨太郎さん）が完全な回答をされていることに感服いたしました．

（４）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール 共通問題第２問の解説

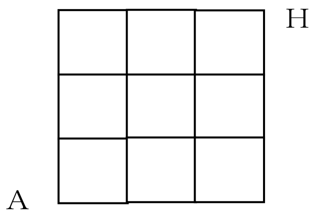
日本数学コンクール実行委員会委員　　岩本　隆宏（三　重　高　等　学　校　講師）
奥田　真吾（三重県立津・津西高等学校　講師）
小倉　一輝（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
田邉　　篤（三重県立津高等学校　教諭）
岡﨑　建太（京都大学数理解析研究所　研究員）

問題２．「最短経路で往復」

M君は京都を散策していた。京都は碁盤目状に道がひかれていることで有名である。
旅行を有意義なものにするため、M君は滞在しているHホテルと目的地A地点との（縦m横ｎブロックとする）往復移動に次の２つの条件を設けることにした。

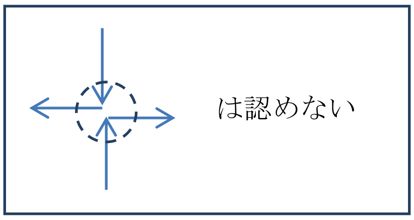
①ホテルとAの間は最短経路で移動する。(時間がもったいない)

②復路において同じ道は通らない。(同じ景色ではもったいない)



縦３横３ブロック（３×３と書く）の場合

(※)



以下で、交差を認める場合と、認めない場合(※)に分けて答えよ。

（１）２×２、２×３において条件をみたす往復のコースの数を求めよ。
（２）２×ｎ　において条件をみたす往復のコースの数を求めよ。
（３）３×３、４×４において条件をみたす往復のコースの数を求めよ。
（４）３×ｎ　において条件をみたす往復のコースの数を求めよ。
（５）４×ｎやｎ×ｎなど、自由に考え、往復のコースの数を求めよ。

解説と講評

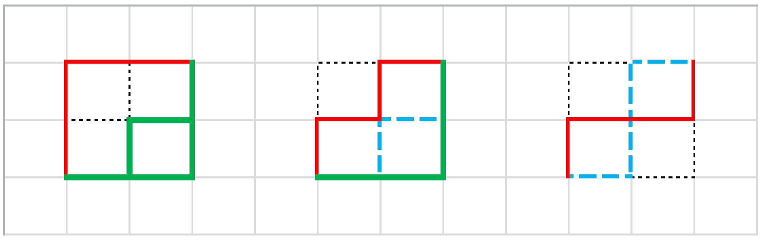
高校で学習する数学Ａの「場合の数」の問題の一つに、最短経路を数える問題があります．ｍブロック×ｎブロックの道があるとき，その経路数は(m+n)Cm で計算できるという組合せの典型的な例題です．しかし，どこかへ向かえば必ず帰るわけで，旅行となれば同じ道を通るというのは野暮じゃないか！と考える人もいるでしょう．実際の旅行ではお店や見どころのある景色などを考えて行程を考えるでしょうが，今回は数学です．どの道も平等，ただただ理想状態で経路だけ数えましょう．

(1) まずは小手調べです．

２×２，２×３は丁寧に数えれば簡単です．

往路(赤)で場合分けして，復路を丁寧に描きだしましょう．交差を認めない場合を緑，認める場合で追加される経路を青で表しています．

例えば，２×２なら次の図と対称な図で数えることができます．

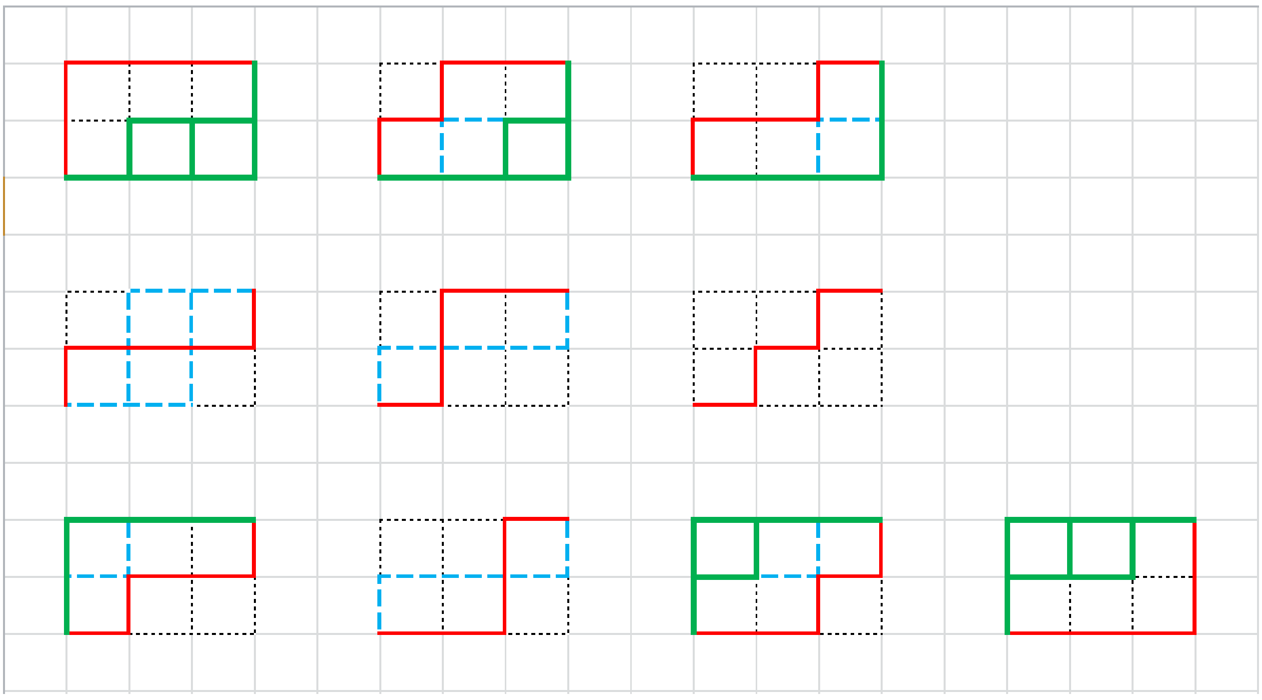


よって，２×２なら交差を認めない緑経路は２＋１＋０＝３なので，２×３＝６

追加の青経路は，２なので，２×２＝４

このことから，２×２の交差を認めない経路は６通り，認める経路は１０通り．

同様に２×３は次の図で考えればよく，



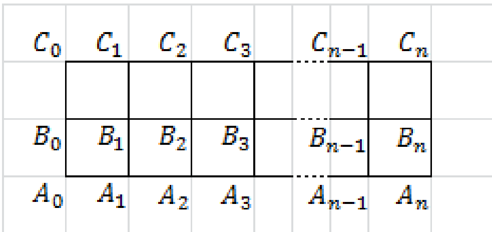
交差を認める場合は２×(３＋２＋１)＝１２，追加は８なので認めない場合は１２＋８＝２０となります．

(2) (1)の結果を参考にして一般化を試みる問題です.
多くの解答が２×４，２×５の場合を計算し，そこから法則を発見していました.

	２×２	２×３	２×４	２×５
交差無	6	12	20	30
交差有	10	20	32	46
差	4	8	12	16

$6 = 2\times 3$, $12 = 3\times 4$, $20 = 4\times 5$, $30 = 5\times 6$ より，２×ｎでは $n(n+1)$ 通りであることが予想でき，交差有と交差無の差が $4(n-1)$ であることも簡単に予想できます.
すなわち，交差無の経路数は $n(n+1)$，交差有の経路数は $n(n+1)+4(n-1)=n^2+5n-4$ です.

もっと，地道な推論も可能です．例えば，明和高校２年生　藤澤勇太さんの解答を紹介しましょう.
まず,



のように添え字付けします.
交差無の場合は往路で A_0-B_0 と $C_{n-1}-C_n$ を通り，復路で A_0-A_1 と B_n-C_n を通るかその逆かのどちらかであり，交差をしないためには，A_0-B_0 と $C_{n-1}-C_n$ を通る経路の上移動 B_k-C_k が，A_0-A_1 と B_n-C_n を通る経路の上移動 A_m-B_m よりも左，つまり $k<m$ が成り立つ必要があります.
よって,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

と計算できます．往路復路をどちらの経路にするか選択できるので，交差無の経路数は

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 2=n(n+1)$$

となります.
交差有の場合は，交差無の経路に加えて $k=m$ $(1\leqq k\leqq n\text{-}1)$ の場合の $2\times(n-1)$通りを加えることができ，さらに $A_0-B_0-B_n-C_n$ と $A_0-A_1-A_k-B_k-C_k-C_{n-1}-C_n$ のような経路も可能になり，これは $k=m$ の場合と見た目は同じ経路なので，さらに $2\times(n-1)$通り加えることができます.
よって，交差有の経路は

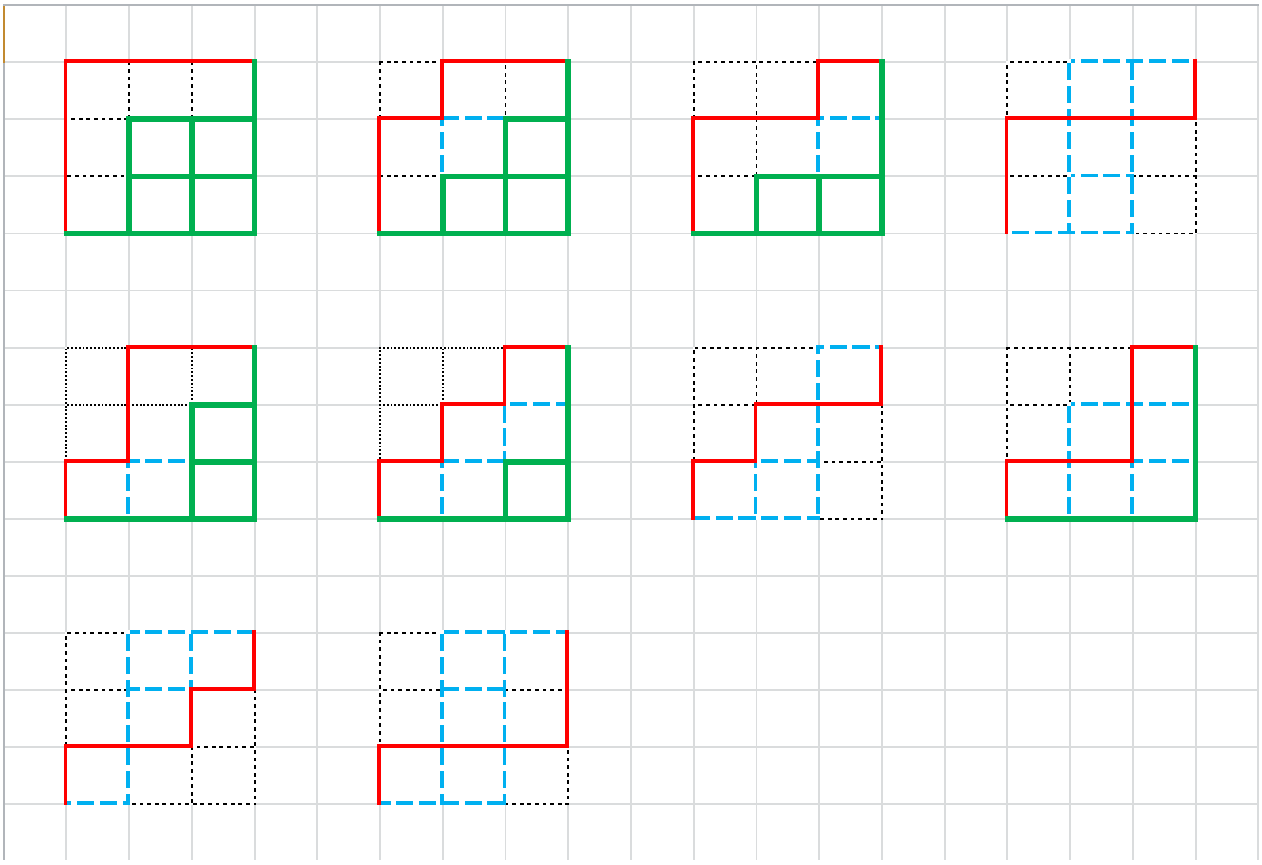
$$n(n+1)+4(n-1)=n^2+5n-4$$

となります.

他にも，多くの方が往路 $A_0-B_0-B_k-C_k-C_{n-1}-C_n$ に対して，復路が $n-k$ 通りになることに気づいて，そこから交差無の解答を導くなど，経路の性質をよく見て解答してくれていました.

(3) ３×３，４×４についても(1)と同様，丁寧に描きだして数えれば簡単です．（ただし，めんどくさいです）

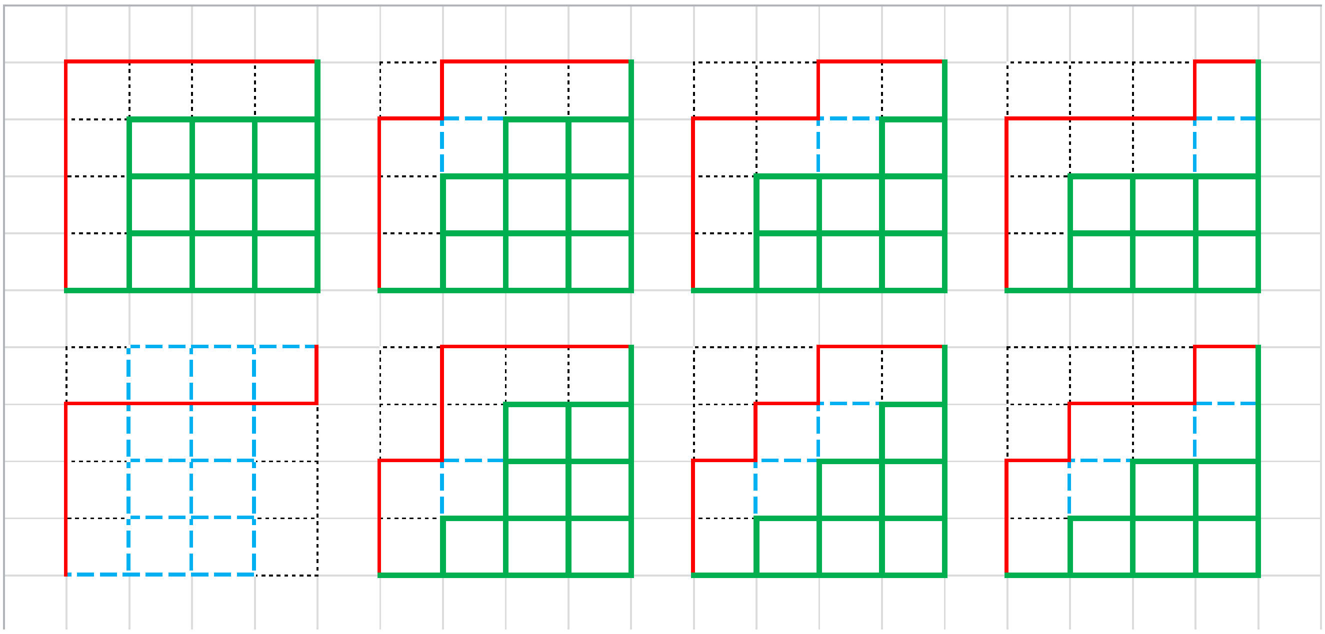
３×３は

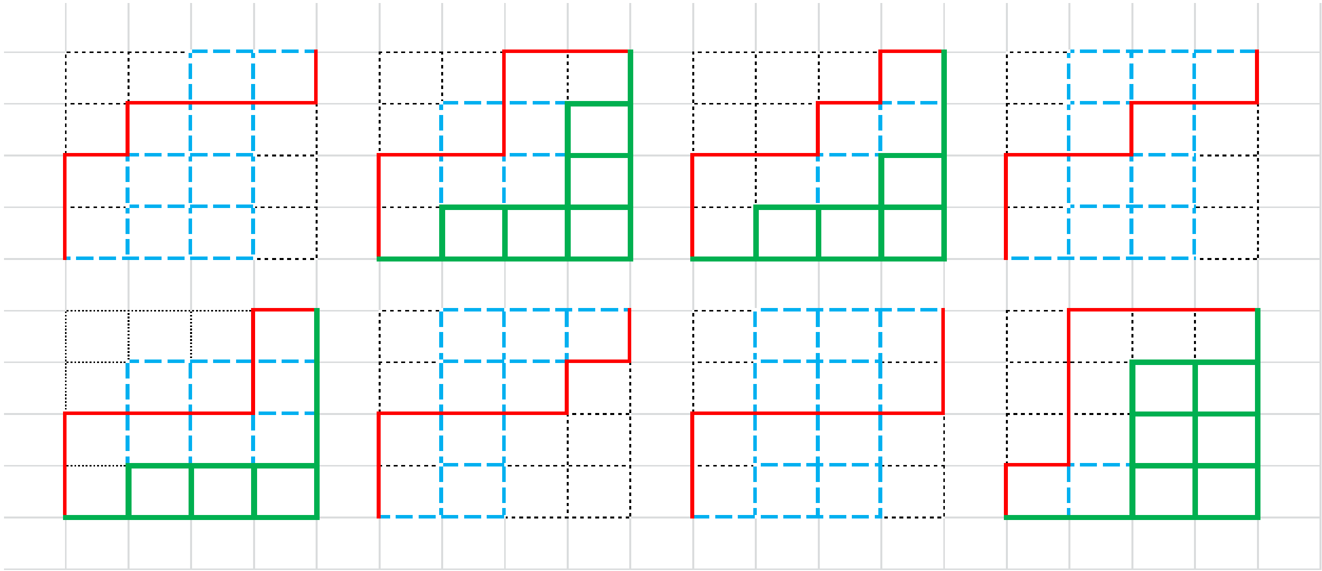


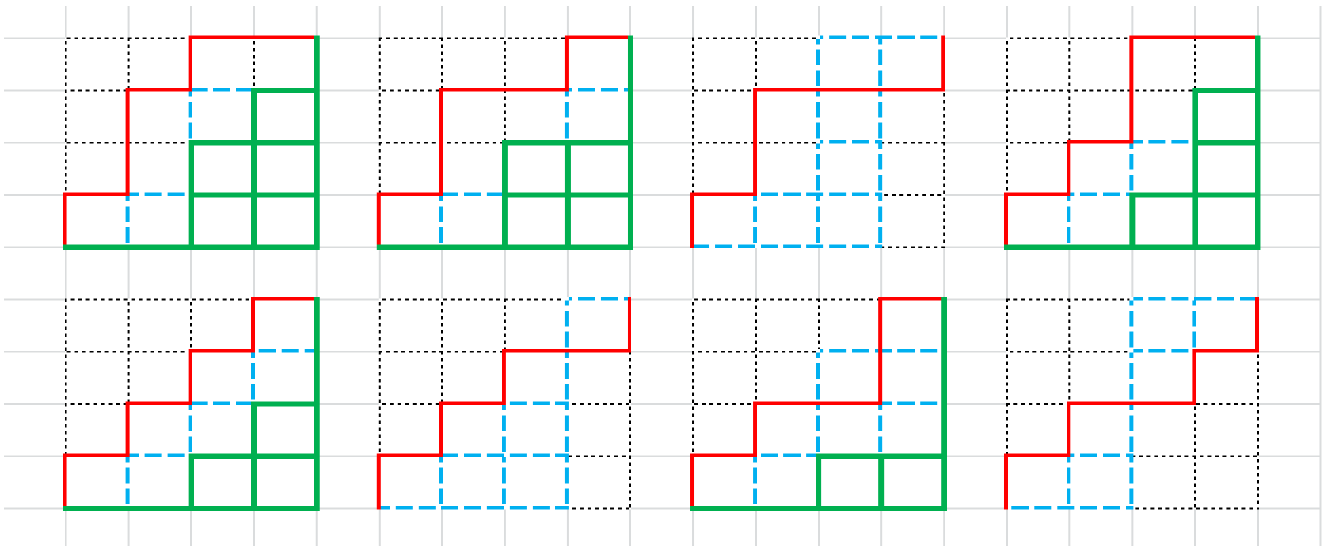
上の図より，交差無の経路は$(6+5+3+0+3+2+0+1+0+0)\times 2=40$ 通り，

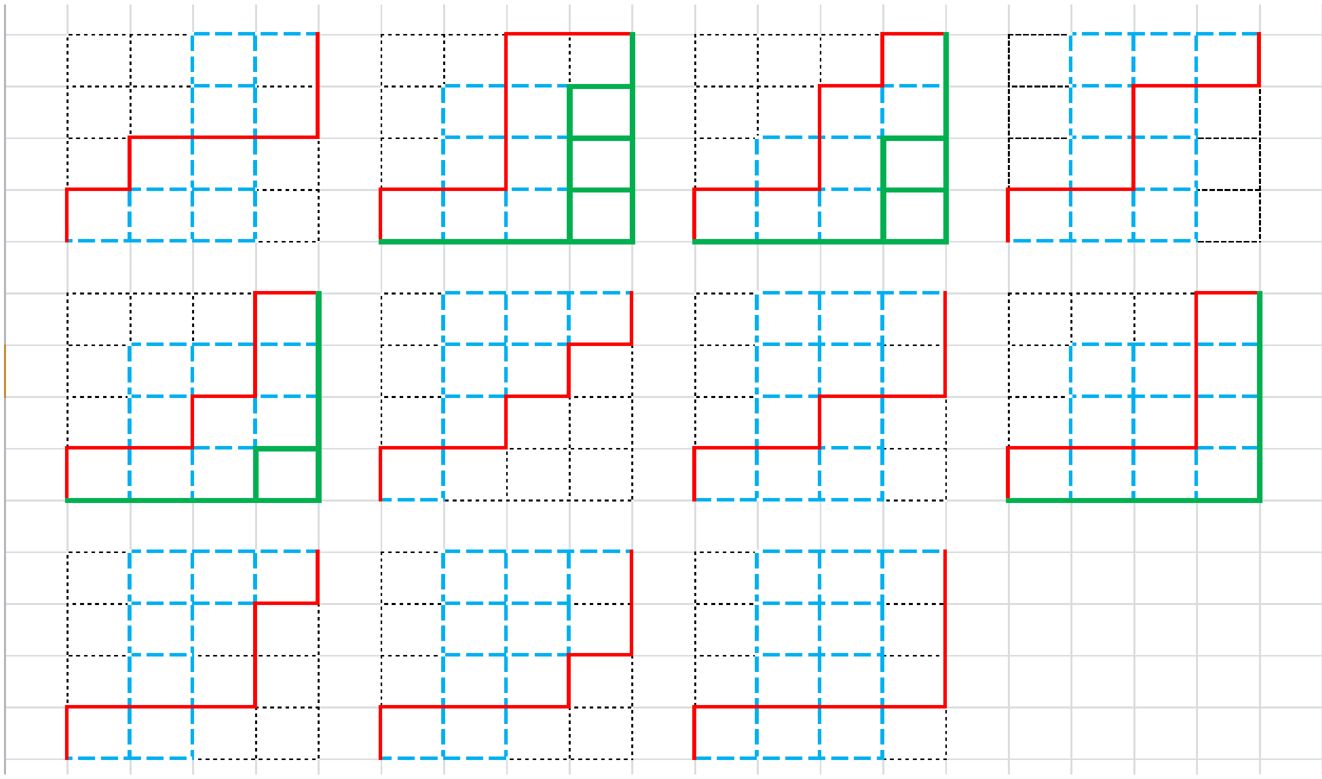
交差有の追加分は$(0+1+2+3+2+3+2+2+2+3)\times 2=40$ 通り，つまり経路は 80 通りとなる．

４×４も同様に図を描くと次のようになります．







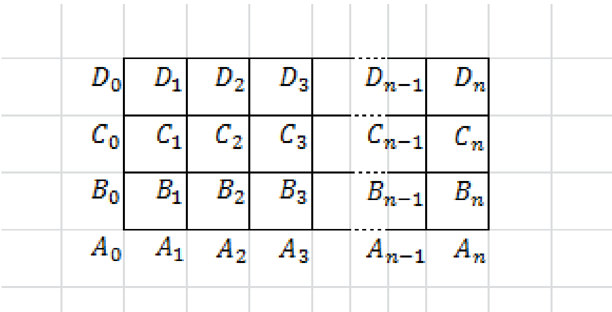


3×3 の経路数 ${}_6C_3 = 20$ と 4×4 の経路数 ${}_8C_4 = 70$ ではかなり増加するので，描きだして数え上げるのはかなり根気のいる作業だったと思います．しかも，4×4 の交差有の経路は 2×2，3×3 の経路比べて格段に複雑になっています．これを正確に数えるためには本選の制限時間内では厳しかったかもしれません．

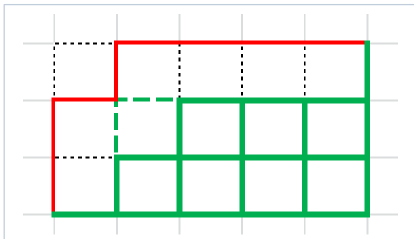
交差無は
2×(20+19+16+10+0+16+14+9+0+10+7+0+4+0+0+10+9+6+0+7+5+3+0+0+4+3+0+2+0+0+1+0+0+0)=350
追加分の経路は
2×(0+ 1+ 3+ 6 +10+ 3+ 5+7+9+5+7+7+6+7+10+6+7+8+7+7+9+5+6+4+7+6+6+5+5+5+7+6+7+9+10)=436
より，交差有は 350+436=786 と数えることができます．

(4) ⑵で 2×n に法則があり，式で表せることを得ましたが，3×n にもそれがあるのかを考えてもらう問題です．
3×4，3×5 などを計算した人やチームは気づいたと思いますが，2×n とは異なり表にすればすぐ気付けるような単純な数列的な法則はありません．というか，経路数がどんどん増えていくのでこの方法では時間がいくらあっても足りなかったかもしれません．

ということは，経路を睨んでその経路が持つ特徴や法則から一般式を見出す必要があります．
これに挑戦し，交差有 3×n の正解に最も近付いた，滝高校 3 年生　酒井優希さんの解答を紹介しましょう．

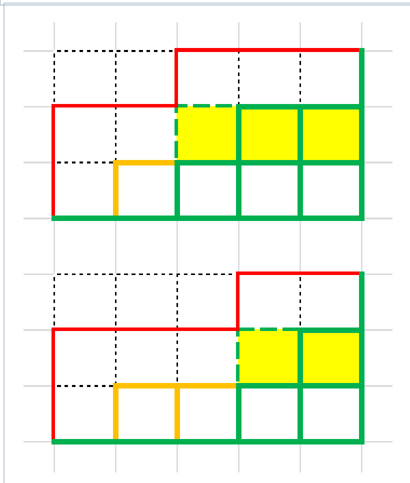


のように添え字付けします．
まず，往路で $\boxed{A_0 - B_0} - B_k - C_k - C_m - D_m - \boxed{D_{n-1} - D_n}$ を通るときを考えましょう．(0≦k≦m≦n-1)



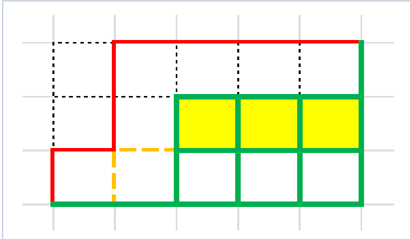
a)　$k = m = 0$ のとき，
経路数は 2×n-1 の総経路数${}_{n-1+2}C_2 = \frac{1}{2}n(n+1)$ です．

b)　$k = 0, m = 1$ のとき，
交差有で考えているので a)と同じ形です．
これらは，3×5 では右図の緑の経路を数えています．



c)　$k = 0, m > 1$ のとき，
往路によってできる箱型の緑の経路数 ${}_{n-m+2}C_2$ と，
この場合は右図のオレンジによってできる経路も
考えなければなりません．
これは，mの増加に伴い，オレンジの経路数と黄色で塗りつぶした箱の大きさが変わっていることに着目すると，
$(m-1) \times {}_{n-m+1}C_1$ と表すことができます．
よって，$\frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1) + (m-1)(n-m+1)$
$= \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)$

d) $k=m=1$ のとき，

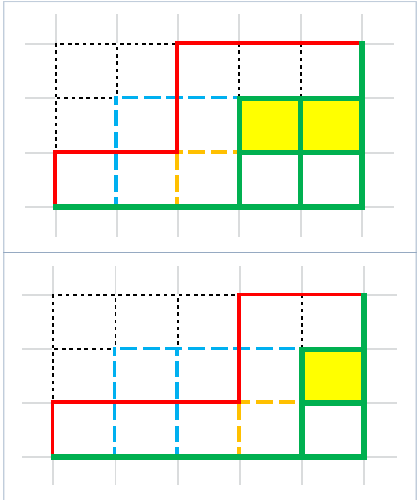


右図を参考にすると，c)の形と似ていることがわかります．
ただ，m が c)より 1 小さいので調整が必要です．つまり，c)の m に m+1 を代入して箱型の緑経路は ${}_{n-m+1}C_2$ で計算できます．
今回の場合は $m=1$ より，これは ${}_{n}C_2$ であり，オレンジ経路は黄色で塗りつぶした部分の ${}_{n-2+1}C_1$ なので

$${}_{n}C_2+{}_{n-1}C_1=\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)=\frac{1}{2}(n+2)(n-1)$$

と計算できます．

e) $1<k=m$ のとき，



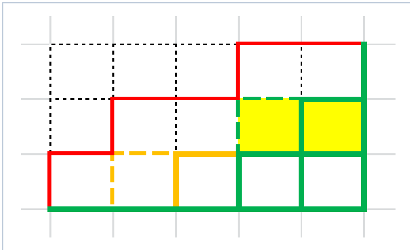
この場合と d) は統合して $0<k=m$ でよさそうに見えます．
しかし，図をよく見ると交差有 Ver.特有の水色の経路の存在に気づいてしまいますね．これを含めて一般式を作りましょう．

緑の経路は d) と同様で，${}_{n-m+1}C_2$ で計算できます．
オレンジの経路も d) を参考にすると，${}_{n-m}C_1$ で書けます．
さらに水色の経路は $m-1$ で与えられます．
よって，

$$\begin{aligned}{}_{n-m+1}C_2+{}_{n-m}C_1+m-1&=\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m)+(n-m)+m-1\\&=\frac{1}{2}(n-m+3)(n-m)+m-1\end{aligned}$$

となります．

f) $0<k<m$ のとき，

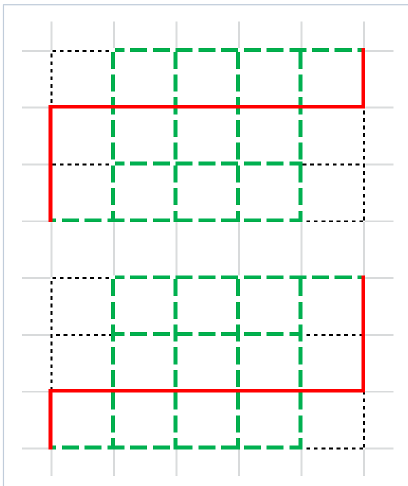


c) の場合とほぼ同じです．e) で現れたような特殊な経路もありません．ただし，k, m の 2 つの変数によるので，総和をとるときには注意が必要です．

緑の経路は ${}_{n-m+2}C_2$ ．
オレンジの経路は $(m-k)\times{}_{n-m+1}C_1$ ．
よって，${}_{n-m+2}C_2+(m-k)\times{}_{n-m+1}C_1=\frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1)+(m-k)(n-m+1)$

つぎに，往路で $\boxed{A_0-B_0}-B_k-C_k-\boxed{C_n-D_n}$ を通るときを考えましょう．(0≦k≦n)

g) $k=0$ および，$k=n$ のとき，



右の図を参考にすると，緑の経路は(n-2)×2 のブロックになるから，経路は ${}_{n-2+2}C_2={}_{n}C_2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 通り．

h) k = 1 および，k = n-1 のとき，

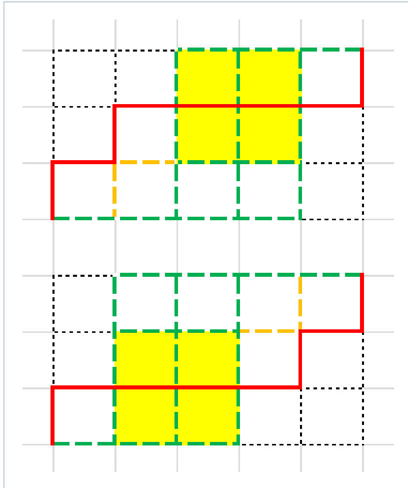
緑の経路は n-3×2 ブロックだから，${}_{n-3+2}C_2 = {}_{n-1}C_2$

オレンジと黄色塗りつぶしの経路は，${}_{n-3+1}C_1 = {}_{n-2}C_1$

よって，

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_2 + {}_{n-2}C_1 &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-2) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)(n-2)
\end{aligned}
$$

と計算できます.



i) 2≦k≦n-2 のとき，

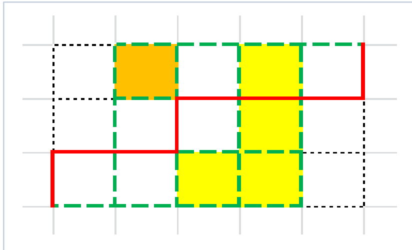
この場合は，$B_k - C_k$ の経路の両側に h）と同じ形の経路が出現します.

左側の経路は ${}_kC_2 + {}_{k-1}C_1$

右側の経路は ${}_{n-k}C_2 + {}_{n-k-1}C_1$

と，h)を参考にすると計算できるので，

$$
\begin{aligned}
&{}_kC_2 + {}_{k-1}C_1 + {}_{n-k}C_2 + {}_{n-k-1}C_1 \\
&= \frac{1}{2}k(k-1) + (k-1) + \frac{1}{2}(n-k)(n-k-1) + (n-k-1) \\
&= \frac{1}{2}(k+2)(k-1) + \frac{1}{2}(n-k+2)(n-k-1)
\end{aligned}
$$



これですべての場合分けが終了しました．あとは，これらを丁寧に足し合わせましょう.

$$
\begin{aligned}
&a)\ \frac{1}{2}n(n+1) + \mathrm{b})\ \frac{1}{2}n(n+1) + \ \mathrm{c})\ \sum_{m=2}^{n-1}\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1) + \ d)\ \frac{1}{2}(n+2)(n-1) + \\
&\mathrm{e})\ \sum_{m=2}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}(n-m+3)(n-m) + m - 1\right\} + \ \mathrm{f})\ \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{m=k+1}^{n-1}\frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1) + (m-k)(n-m+1) + \\
&\mathrm{g})\ \frac{1}{2}n(n-1)\times 2 + \ \mathrm{h})\ \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\times 2 + \ \mathrm{i})\ \sum_{k=2}^{n-2}\left\{\frac{1}{2}(k+2)(k-1) + \frac{1}{2}(n-k+2)(n-k-1)\right\}
\end{aligned}
$$

これらを計算すると

$$\frac{1}{12}n^4 + n^3 + \frac{29}{12}n^2 - \frac{13}{2}n + 4$$

となります.

往路で $\boxed{A_0 - A_1}$ を通る経路は対称性により，$\boxed{A_0 - B_0}$ を通る経路数と同じになるので，2 倍して

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}n^4 + 2n^3 + \frac{29}{6}n^2 - \frac{13}{2}n + 4}$$

が交差有の 3 × n の経路数の一般式になります.

途中の場合分けでミスがありましたが，丁寧に式を作っていく，とても良い解答でした.

結果として(4),(5), (3)の 4 × 4 交差有の正解者はなし，(4)のほぼ正解者が滝高校 酒井さん，4 × 4 交差無の正解者は滝高校 酒井さんと伊勢高校の「たくうみ」チームでした.

挑戦して頂いた皆様，ありがとうございました.

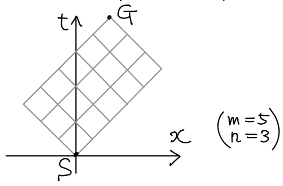
ランダムウォークの視点からの解答

（文責: 京都大学数理解析研究所 岡﨑 建太）

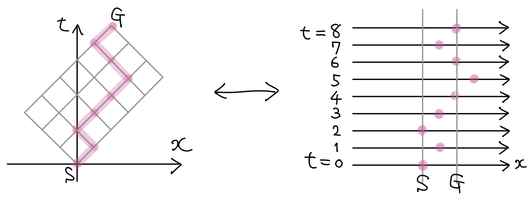
実は，今回の問題は平面格子状の壁付きランダムウォークの問題に帰着して解くことができます．以下でそのことを説明します．

§ 最短経路と1次元ランダムウォーク

$m\times n$ ブロックの格子状の地図が与えられているとします．
まず南北と東西の通路を対等に扱うため，地図を45°回転させ，下図のように新たに xt 軸を描きます．



t軸を時間だと思うと，start地点Sからgoal地点Gへの最短経路は，1次元格子を1時刻ごとに左右に動く粒子（これをランダムウォークといいます）とみなすことができます．



最初に与えられた格子が $m\times n$ $(m\geq n)$ なら，これは

(☆) $\begin{cases} \text{start 地点の } x \text{ 座標が } 0 \\ \text{goal 地点の } x \text{ 座標が } m-n \\ \text{長さが } m+n \end{cases}$ の1次元ランダムウォーク

です．例えば上の図だと $m=5$, $n=3$ ですから，$m-n=2$, $m+n=8$ となります．
逆に(☆)が与えられたとき，上図と同じようにして start地点からgoal地点への最短経路を作れますので，両者（(☆)と最短経路）の間には1:1対応があります．

命題

$\begin{cases} \text{start 地点の } x \text{ 座標が } 0 \\ \text{goal 地点の } x \text{ 座標が } x_0 \\ \text{長さが } t_0 \end{cases}$ の1次元ランダムウォーク

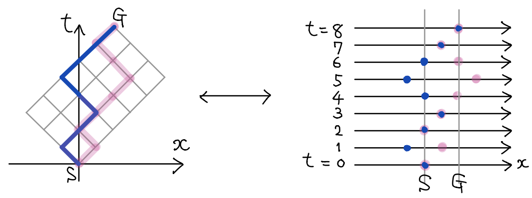
は，$\binom{t_0}{x_0}$ 通りある．□

ただし $\binom{n}{k}$ は2項係数 ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ を意味します．

このことは帰納的に証明できますし，パスカルの3角形を書いて確かめることもできます．

y \ x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y=0$								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1

さらに，格子上の最短往復経路を考えます．
まだ問題文のような経路の制限はしないものとします．
すると，往路と復路は独立に決めることができますので，
これは1次元格子上の2粒子のランダムウォークに対応させることができます（次図参照）．



§ 1次元2粒子のランダムウォークと2次元1粒子のランダムウォーク

原点を出発点とする1次元格子上の2粒子1, 2のランダムウォークが与えられたとき，時刻 t における粒子1, 2の x 座標をそれぞれ $x_1(t)$, $x_2(t)$ とおきます．（初期条件より $x_1(0)=x_2(0)=0$．）
すると，$(x_1(t), x_2(t))$ は2次元平面上の1粒子のランダムウォークと見ることができます．ここでさらに問題に対応できるようにするため，座標変換を行います．
新たな座標 $(u_1(t), u_2(t))$ を

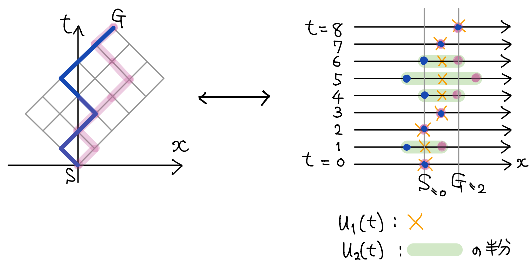
$$u_1(t)=\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2},\quad u_2(t)=\frac{x_2(t)-x_1(t)}{2}$$

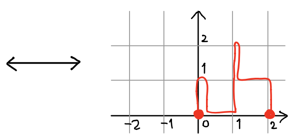
で定めます．これの逆変換は

$$x_1(t)=u_1(t)+u_2(t),\quad x_2(t)=u_2(t)-u_1(t)$$

で与えられます．

$u_1(t)$ は粒子1と2の重心，$u_2(t)$ は粒子1と2の距離の半分に相当します．
こうして，1次元格子上の2粒子1, 2のランダムウォークは，2次元格子上の1粒子ランダムウォーク $(u_1(t), u_2(t))$ と同一視できることがわかりました（次図参照）．また，start地点は $t=0$ で $(u_1, u_2)=(0, 0)$，goal地点は $t=m+n$ で $(u_1, u_2)=\left(\frac{(m-n)+(m-n)}{2}, \frac{(m-n)-(m-n)}{2}\right)=(m-n, 0)$ であることがわかります．





t	x_1	x_2	u_1	u_2
0	0	0	0	0
1	-1	1	0	1
2	0	0	0	0
3	1	1	1	0
4	0	2	1	1
5	-1	3	1	2
6	0	2	1	1
7	1	1	1	0
8	2	0	2	0

§往復経路に条件がある場合

このようにして，往復最短経路は

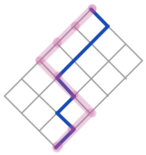
$$
(☆☆)\begin{cases} \text{start 地点の座標が } (0,0) \\ \text{goal 地点の座標が } (m-n,0) \\ \text{長さが } m+n \end{cases}
$$

の u_1u_2 平面上のランダムウォーク

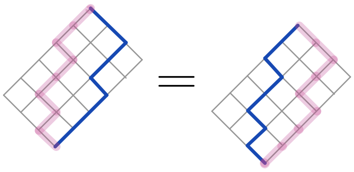
と見なせることがわかりました．次に，往復最短経路に条件(制約)を加えることは，u_1u_2 平面に「壁」を設けることに相当することを説明します．

$m\times n$ ブロックの格子の往復最短経路に対して，次の4通りの場合を考えます．
(図は条件をみたす往復経路の例)

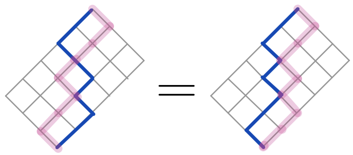
(1) 制約なし．



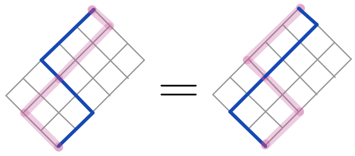
(2) 途中で往復共通の交差点を通ってはならない．
往路と復路を入れ替えたものは同じ経路とみなす．



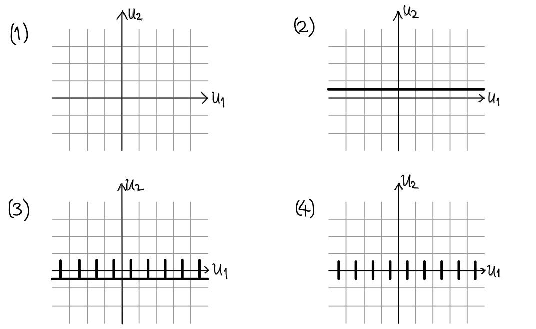
(3) 途中で往復共通の通路を通ってはならない．(交差点はok)
通った全ての通路の集合が等しい2つの往復経路は同じものとみなす．



(4) 途中で往復共通の通路を通ってはならない．(交差点はok)
往路と復路を入れ替えたものは同じ経路とみなす．



定理1 (1)〜(4)の条件をみたす往復最短経路は，それぞれ以下の"壁付き"u_1u_2 平面上のランダムウォークで(☆☆)をみたすものと1:1対応する．



ただし上図の太線は壁をあらわし，ランダムウォークにおいて，粒子は壁を超えられないものとします．
また，(2)においては例外的に，$t=1$ のときの移動 $(0,0)\to(0,1)$，$t=m+n$ のときの移動 $(m-n,1)\to(m-n,0)$ は壁を超えられるものとします．
また(4)においては例外的に $t=1$ のときは移動を $(0,0)\to(0,1)$ にします．

以下この理由について説明します．

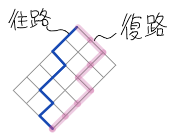
まず，start と goal 地点の制約から，(1)〜(4)のいずれにおいても

$$
(☆☆☆)\begin{cases} t=0 \text{ のとき} & (u_1,u_2)=(0,0) \\ t=m+n \text{ のとき} & (u_1,u_2)=(m-n,0) \end{cases}
$$

が成り立つことに注意します．

(1)については既に述べた通りです．

(2)について：同一視の仕方から，必要なら往路と復路を入れ替えて，復路は常に往路の「右側」にあるとできます．



これは (x_1,x_2) 座標における条件

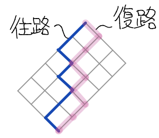
- $x_1(t) < x_2(t)$ $(0<t<m-n)$

に相当します．(u_1,u_2) 座標で書き換えると，

- $u_2(t) > 0$ $(0<t<m-n)$

となります．これは $t=0, m-n$ 以外では (u_1,u_2) が常に平面 $u_2\geq 1$ にあることを意味するので，ランダムウォークにおいて上述のような壁があることと等価です．

(3)について：同一視の仕方から，必要なら往路と復路のふり分けを変えることにより，復路は常に往路の「右側」にあるとできます．



これは (x_1,x_2) 座標における条件

$$
\begin{cases} \cdot\ x_1(t)\leq x_2(t) & (0\leq t\leq m-n) \\ \cdot\ \text{「}x_1(t)=x_2(t) \text{ かつ } x_1(t+1)=x_2(t+1)\text{」は成り立たない} & (0\leq t<m-n) \end{cases}
$$

に相当します(2番目の条件は「同じ通路は通らない」という条件に相当)．これを (u_1,u_2) 座標で書き換えると，

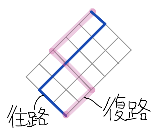
$$\begin{cases} \cdot\ u_2(t) \geq 0 \quad (0 < t < m-n) \\ \cdot\ \text{「}u_2(t)=0 \text{ かつ } u_2(t+1)=0\text{」} \\ \quad \text{は成り立たない} \ (0 \leq t < m-n) \end{cases}$$

となります．これは常に (u_1, u_2) が上半平面にあり，$u_2=0$ の状態から左右に動いてはいけないことを意味しますので，上述のような壁があることと等価です．

(4) について：同一視の仕方から，必要なら往路と復路を入れ替えて，$t=1$ において $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ $(\Leftrightarrow (u_1, u_2) = (0, 1))$ とできます．

(3) と同様にして，(u_1, u_2) は条件

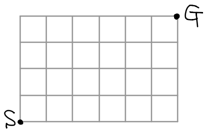
・「$u_2(t)=0$ かつ $u_2(t+1)=0$」
　は成り立たない $(0 \leq t < m-n)$



を満たすことがわかります．これは上述のような壁があることと等価です．

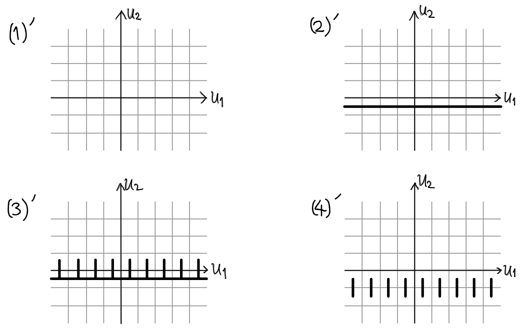
§ 往復最短経路の数え上げ

$m \times n$ ブロックの格子状の地図の往復最短経路で，条件 (1)〜(4) を満たすものの個数を，それぞれ $R_1(m,n)$, $R_2(m,n)$, $R_3(m,n)$, $R_4(m,n)$ とおきます．



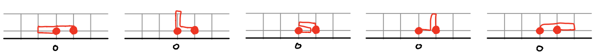
$(m=6, n=4)$

また，次のような壁付きの u_1u_2 平面 (1)'〜(4)' を考え，原点 $(0,0)$ から出発して点 (x,y) に至る長さ t のランダムウォークの個数をそれぞれ $a_1(x,y,t)$, $a_2(x,y,t)$, $a_3(x,y,t)$, $a_4(x,y,t)$ とおきます．



定義から $R_i(0,0,0)=1$, $R_i(x,y,0)=0$ $((x,y)\neq(0,0))$．また，

例えば $R_2(1,0,3)=5$ となります．



定理1から次がわかります．

命題1

$$\begin{aligned} R_1(m,n) &= a_1(m-n,\ 0,\ m+n), \\ R_2(m,n) &= a_2(m-n,\ 0,\ m+n-2), \\ R_3(m,n) &= a_3(m-n,\ 0,\ m+n), \\ R_4(m,n) &= a_4(m-n,\ -1,\ m+n-1). \qquad \square \end{aligned}$$

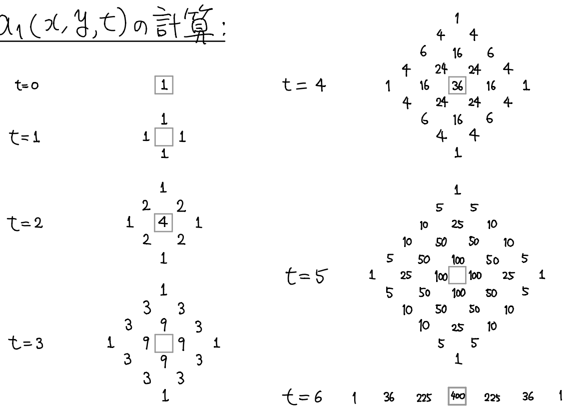
時刻 t で (x,y) にいるランダムウォークは，その1時刻前には $(x\pm1, y)$, $(x, y\pm1)$ のいずれかにいる（ただし間に壁があるときにはそこにはいない）わけですから，例えば

$$\begin{aligned} R_3(x,y,t) = {} & R_3(x-1,y,t) + R_3(x+1,y,t) \\ & + R_3(x,y,t) + R_3(x,y+1,t) \\ & \qquad (y>0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

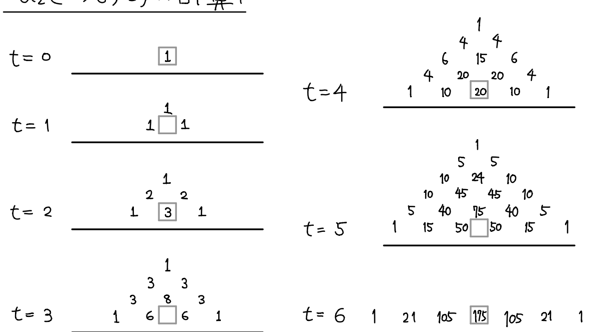
$$R_4(x,-1,t) = R_4(x,-2,t) + R_4(x,0,t)$$

などが成り立ちます．このような漸化式を使えば，$a_i(x,y,t)$ の計算はパスカルの三角形を書いたときのように次々と求めることができます．

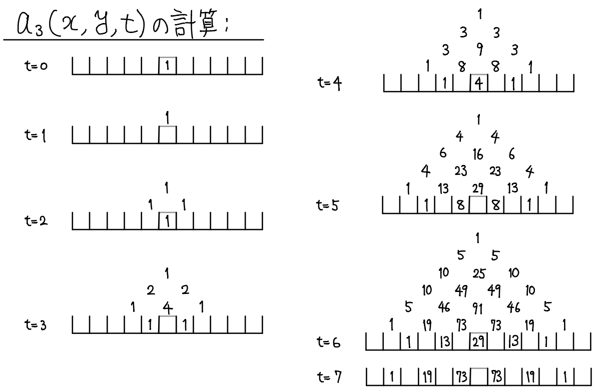
$a_1(x,y,t)$ の計算：



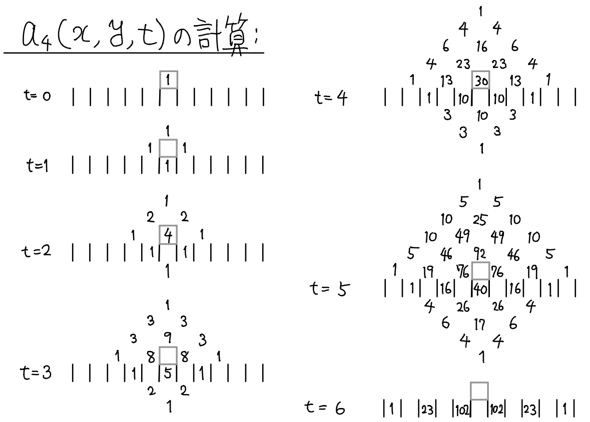
$a_2(x,y,t)$ の計算：



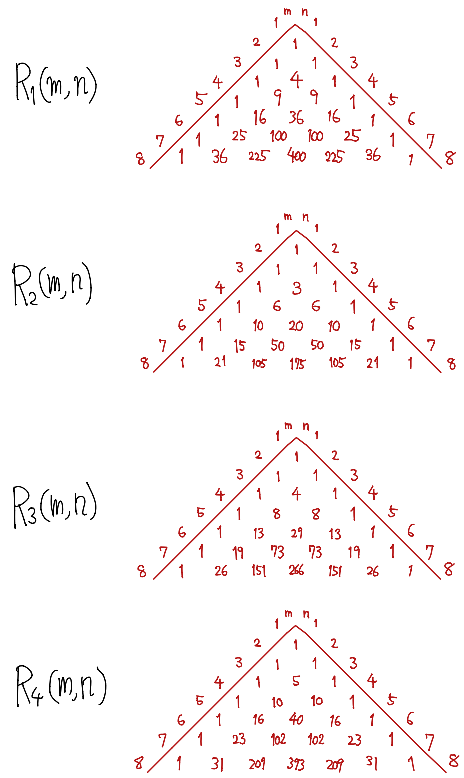
$a_3(x,y,t)$ の計算:



$a_4(x,y,t)$ の計算:



このような計算と命題1より, $R_i(m,n)$ の表を得ます.



§ 往復最短経路の数え上げ ——一般の場合

$a_i(x,y,t)$ の一般項について,次が成り立ちます.
証明は皆さんへの宿題とします.
("吸収壁のランダムウォーク"等で調べるとよい.)

定理2

$x+y$ と t の偶奇が一致しないとき, $a_i(x,y,t)=0$ $(i=1,2,3,4)$.

$x+y$ と t の偶奇が一致するとき,

$$a_1(x,y,t)=\binom{t}{(t+x+y)/2}\binom{t}{(t+x-y)/2},$$

$$a_2(x,y,t)=a_1(x,y,t)-a_1(x,-y-2,t)$$
$$=\binom{t}{(t+x+y)/2}\binom{t}{(t+x-y)/2}-\binom{t}{(t+x-y)/2-1}\binom{t}{(t+x+y)/2+1}.$$

定理2と命題1より, 次を得ます.

定理3

$$R_1(m,n)=\binom{m+n}{m}^2$$

$$R_2(m,n)=\binom{m+n-2}{m-1}^2-\binom{m+n-2}{m-2}\binom{m+n-2}{m}$$

また $a_3(x,y,t)$ について, 次を予想しました.

予想1

$$a_3(x,y,t)=\begin{cases}0 & (t=0,\ (x,y)\neq(0,0))\\ 1 & (t=0,\ (x,y)=(0,0))\\ a_2(x,y-1,t-1)+a_3(x,y+1,t-1) & (t\geq 1)\end{cases}.$$

よって

$$a_3(x,y,t)=\sum_{k=0}^{(t-|x|-|y|)/2} a_2(x,y-1+k,t-1-k),$$

$$R_3(m,n)=a_3(m-n,0,m+n)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{\binom{m+n-2-k}{m-2}\binom{m+n-2-k}{m-k}-\binom{m+n-2-k}{m-1}\binom{m+n-2-k}{m-1-k}\right\}.$$

最後の項は和の形ですが,もっとスッキリ表せるかもしれません.
また, $a_4(x,y,t)$ の一般形についてはまだよくわかっていません...
もし何かわかれば教えてほしいです.

（5）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール 共通問題第３問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　小島　彰二（愛知県立半田高等学校　教諭）
児玉　靖宏（愛知県立刈谷北高等学校　教諭）
服部　展之（愛知県立明和高等学校　教諭）
村田　英康（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）

問題３．「パスカルとフラクタル」

次の各問いに答えなさい。
（１）パスカルの三角形を 15 段（$n=15$）まで作成しなさい。ただし、0 段（$n=0$）の場合は 1 のみとする。
（２）（１）で作成したパスカルの三角形の各数を偶数ならば 0、奇数ならば 1 とした図形を作成しなさい。
（３）（２）で作成した図形を参照して、その図形のフラクタル（自己相似的）な構造について調べ、それについてまとめなさい。
（４）n 段に含まれる奇数の数を $f(n)$ とするとき、$f(n)$ を求めなさい。

※パスカルの三角形とフラクタルについては、下記の（１）パスカルの三角形、（２）フラクタルを参照のこと。

⑴パスカルの三角形

二項定理の係数を抜き出して、三角形状に数値を書き並べたもの。
まず、二項定理とは

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k}b^k$$

であることを言う。

$(a+b)^0$	1	0段
$(a+b)^1$	1　1	1段
$(a+b)^2$	1　2　1	2段
$(a+b)^3$	1　3　3　1	3段

⑵フラクタル

英語:fractal　フランス語:fractaleは、フランスの数学者ブノア•マンデルブローが1975年に導入した幾何学の概念である。図形の部分と全体が自己相似になっているものなどをいう。樹木や雲、海岸線などの自然界にある複雑な形状を、同じパターンの図形で表わす数学的な概念である。

解説と講評

フラクタルについて

　私たちの身に周りには、フラクタル構造が満ちています。そのことを気付かせてくれたのが、数学者のマンデルブローでした。それが 1980 年頃。文献をもとに筆者自身でプログラミングし、マンデルブロー集合をパーソナルコンピュータで出力したのが 1984 年の 12 月末。NEC の PC9801m2 を使用し、丸一昼夜の時間を要しました。当時の非力なパソコンでは当然の結果。

　次にマンデルブロー集合、ジュリア集合に出会うのは、名古屋大学大学院多元数理科学研究科における宍倉光広教授（京都大学）による複素力学系の集中講義でした。マック Book によって、フラクタル図形がサクサク動くのには驚きました。これが 2000 年頃。ムーアの法則をまさに体感しました。

　さらに、2008 年、当時の勤務校であった東海中高の数学準備室での出来事。高等学校数学研究会の部活動の最中に、パスカルの三角形をホワイトボードに書き並べ、mod2 としてみたところ、突如としてシェルピンスキーのガスケットが現れました。部員一同から当然のごとく、感嘆の声が上がりました。

　今回の出題は以上の体験をもとにしています。誘導形式にしてあるので、結論は得やすかったと思います。

高校数学で馴染み深い二項定理、パスカルの三角形にフラクタル性が潜んでいることをテーマにした出題です。次ページ以降に正解を示しました。

ここでは、全体的な講評と(4)の解説を行います。

(1)、(2)とも良くできていました。
(1)、(2)は当然(3)、(4)へのヒントです。
(3) シェルピンスキーのガスケットの自己相似性をどこまで上手く表現するかがポイントであり、
　評価の分かれ目となりました。
(4) 最終結論の f(n)を具体的な関数の形にするのは難しいでしょう。
　そこで、
　(a) 段数 n を 2 進数展開します。
　(b) 2 進展開したときの 1 の個数を求めます。（各位の数の和を求めます。）
　　これを φ (n)とします。
　(c) 段数 n にある 1 の数を数えるます。（つまり、奇数の個数。）
　　これが求める f(n)です。

$$\mathrm{f(n)} = 2^{\varphi(n)}$$

インテル系のＣＰＵでは、関数popcnt(n)によって(b)を求めることができます。
つまり、$\mathrm{f(n)} = 2^{popcnt(n)}$が求める正解となります。

パスカルとフラクタル

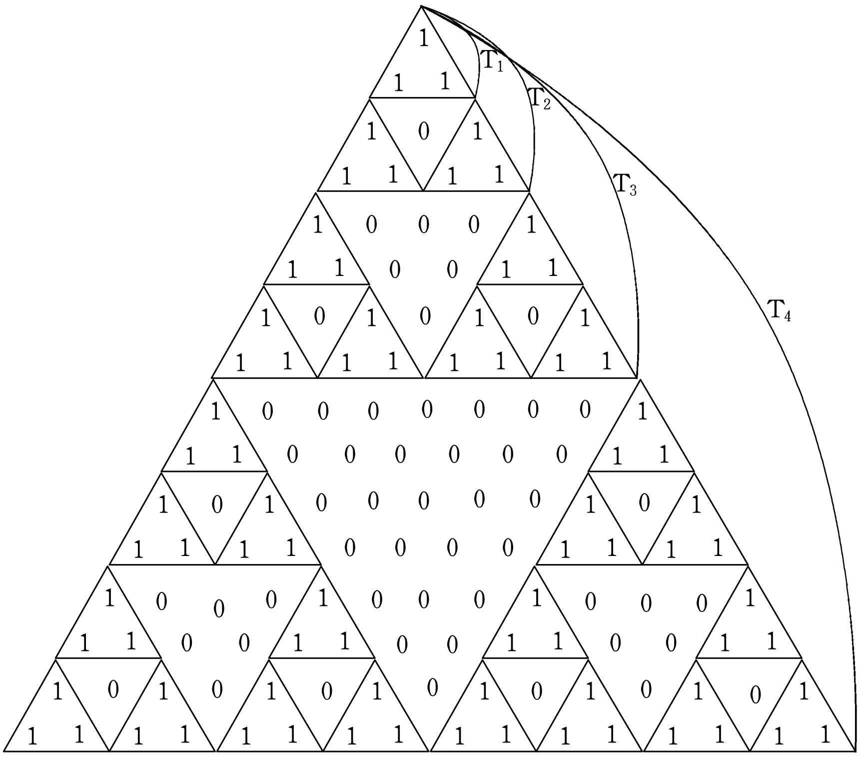
(1)パスカルの三角形を15段(n=15)まで作成しなさい。ただし0段(n=0)の場合は1とする。

段数n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14	1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
15	1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

(2)(1)で作成したパスカルの三角形の各数を偶数なら0、奇数なら1とした図形を作成しなさい。

段数n	
0	1
1	1 1
2	1 0 1
3	1 1 1 1
4	1 0 0 0 1
5	1 1 0 0 1 1
6	1 0 1 0 1 0 1
7	1 1 1 1 1 1 1 1
8	1 0 0 0 0 0 0 0 1
9	1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
10	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
11	1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
12	1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
13	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
14	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
15	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

(3) (2)で作成した図形を参照して、その図形のフラクタル（自己相似的）な構造について調べ、それについてまとめなさい。



(A) T_1三角形の下に２つのT_1三角形をコピーし、隙間に0を補う。
出来た三角形をT_2三角形とする。

(B) 以下、T_k三角形の下に２つのT_k三角形をコピーし、隙間に0を補う。
出来た三角形をT_{k+1}三角形とする。以下帰納的にT_n三角形を定める。

(C) T_k三角形とT_{k+1}三角形は相似三角形となり、自己相似的な構造となっている。

（4）n段に含まれる奇数の数をf(n)とするとき、f(n)を求めなさい。

段数n	nの2進数表示	1の個数	2^{1の個数}
0	0	0	1
1	1	1	2
2	10	1	2
3	11	2	4
4	100	1	2
5	101	2	4
6	110	2	4
7	111	3	8
8	1000	1	2
9	1001	2	4
10	1010	2	4
11	1011	3	8
12	1100	2	4
13	1101	3	8
14	1110	3	8
15	1111	4	16

↑ 各段の1の数

```
                              1
                            1   1
                          1   0   1
                        1   1   1   1
                      1   0   0   0   1
                    1   1   0   0   1   1
                  1   0   1   0   1   0   1
                1   1   1   1   1   1   1   1
              1   0   0   0   0   0   0   0   1
            1   1   0   0   0   0   0   0   1   1
          1   0   1   0   0   0   0   0   1   0   1
        1   1   1   1   0   0   0   0   1   1   1   1
      1   0   0   0   1   0   0   0   1   0   0   0   1
    1   1   0   0   1   1   0   0   1   1   0   0   1   1
  1   0   1   0   1   0   1   0   1   0   1   0   1   0   1
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

団体戦・個人戦の個別評価（3番パスカルとフラクタル）

シニア団体戦

チ　ー　ム　名：学校名

チームカピバラ：鎌倉学園高等学校

フラクタルの構造をうまく捕らえて、結論の正解を得ています。1+1=0によって生み出された0が0+1=1によって減って行くような動きをそれぞれ、「生産」と「浸食」と名付けた解説は秀逸です。また適切な補題を用意し、うまく結論を導いています。

ナン：名古屋大学附属高等学校

独特な「パスカルの互除法」を見いだして、パスカルの三角形のフラクタルの構造を調べています。

サワシード：藤島高等学校

フラクタル構造をよく説明できている。シェルピンスキーのキャビネット（ガスケット）であることの説明と正解を導いています。

馬酔木：高田高等学校

フラクタル構造から各段の奇数の個数を帰納的に求めようとしています。

Clever Girls：鈴鹿中学校・高等学校

(4)の規則性を見いだしています。

智弁学園：智弁学園高校

フラクタルの構造を郡数列として捕らえる考察を行っています。

ジュニア団体戦

チ　ー　ム　名：学校名

東海中3：東海中学校

正確な論証がなされています。

Departure：津市立橘北中学校

(4)帰納的な構造に気付いています。

私の名前は言えない：鈴鹿中学校

(4)帰納的な構造に気付いています。

R・H：鈴鹿中学校

(4)帰納的な構造に気付いて計算しています。

Uuu　　　　　**：鈴鹿中学校**

(3)フラクタル構造が理解できています。

高中グループ　：高田中学校

(3)のフラクタル構造、(4)の帰納的構造が理解できています。

シニア個人

個　人　名　：学校名

兒玉　太陽　：海陽中等教育学校

(1)~(4)まで申し分ない考察で、簡潔によくまとめてあります。

松下　沙也輝：愛知県立明和高等学校

(1)~(4)まで良く考察されています。

山内　一輝　：愛知県立明和高等学校

フラクタル構造を詳しく調べています。

小山　宗晃　：大阪府立四條畷高等学校

(1)~(4)まで良く考察されています。

増田　和俊　：愛知県立旭丘高等学校

(1)~(4)が丁寧に議論されています。

西川　寛人　：愛知県立明和高等学校

(4)は正解を出しています。考察もしっかり出来ています。

市川　景也　：愛知県立一宮興道高等学校

(1)~(4)は十分考察してあります。(4)は正解です。

ジュニア個人

個　人　名　：学校名

岡林　生夫　：筑波大学附属駒場中学校

(1)~(4)正しい考察がなされています。

森山　和　　：富山大学人間発達学部附属中学校

(1)~(4)正しい考察がなされています。

猪倉　彼方　：筑波大学附属駒場中学校

(1)~(3)正しい考察がなされています。

井上　聡士　：名古屋市立神丘中学校

(1)~(3)正しい考察がなされています。

（６）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール 共通問題第４問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員　　　高原　文規（愛知県立千種高等学校　教諭）
伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）

問題４．「あなたはデザイン事務所の事務担当」

あなたはあるデザイン事務所の事務を担当しています。
ある海外のイベントを担当しているデザイナーから装飾に正十二面体を 10,000 個使用したいので、手配してほしいという注文がありました。よく聞いてみると、正十二面体の１辺は 100mm、個数は多ければ多い方が良いが最低 10,000 個は欲しいとのことでした。

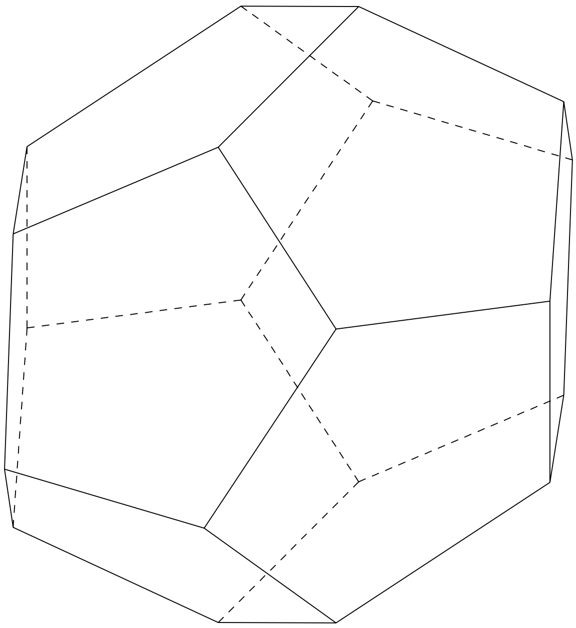
調べてみましたが、現地で正十二面体を生産できる工場が見つかりません。
正五角形の板を大量に送り現地で組み立てることも検討しましたが、必要な個数が多いので、場所を借りた上で、現地の人を雇って組み立てる人件費や日本から職人さんを連れて行く交通費宿泊費より、日本の工場で正十二面体を生産してコンテナ（内寸長さ 5,899mm、幅 2,352mm、高さ 2,386mm）を何個か手配する方が安いことがわかりました。

コンテナには正十二面体を規則正しく積んで輸送中に動いたりしないようにしますが、正十二面体の間や正十二面体とコンテナの間に保護材は入れなくても良いとします。

立方体なら計算は簡単ですが、正十二面体を詰め込むのはどうすればいいのでしょうか？コンテナは最低何個必要でしょう？また、そのコンテナの個数では最大何個の正十二面体を送ることができるでしょうか？正十二面体の積み方も答えてください。

解答に当たっては、正五角形の１辺と対角線の長さの比が $1 : (1+\sqrt{5})/2 = 1 : 1.618\ldots$であることを必要に応じて利用しても構いません。

立方体と正十二面体以外の多面体についても、自由に問題を考えてください。



解説と講評

この問題の場合、コンテナにできるだけ多くの正十二面体を詰めることによって, 輸送にかかる費用を抑えつつ、現地で使える個数を増やすことが目標になります。

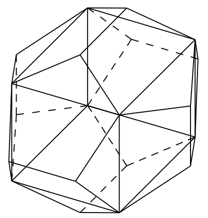
このように、与えられた図形を空間にできるだけ詰める方法を考える問題を最密充填問題といいます。隙間無く詰め込むことができればそれが正解ですが、正十二面体は隙間無く詰め込むことはできません。その様なとき、空間のどれぐらいの割合まで詰めたかを表す充填率を考え、最も充填率か高い積み方がよい解答です。

充填率を考えるために、まず正十二面体の体積を求めましょう。

これから計算が始まりますが、実際の長さで計算していくと小数点の位置などが面倒なので、正十二面体の 1 辺の長さを 1 として計算していき、最後に実際の長さに直します。また、対角線の長さを表すときいちいち $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と書くと面倒なので, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ とします。(ϕ はギリシャ文字) 同様に, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\phi}{2}=\alpha$ とします。(α もギリシャ文字)

$\phi^2-\phi-1=0,\quad 4\alpha^2-2\alpha-1=0$ となります。これを使って計算を簡単にしていきます。

正十二面体の体積を求める方法は、各面を底面として正十二面体の外接円の中心（内接円の中心でもあります）を頂点とする 12 個の合同な正五角錐と考えて計算する方法があります。内田翔さん（咲くやこの花高等学校）が感想戦でこの考え方を用いて体積を計算しました。しかし、今回は違う考え方を使いましょう。



正十二面体の 20 個の頂点のうち 8 個を適当に選ぶと図のように一辺の長さが ϕ の立方体になります。

残りの部分は 6 個の合同な図形になります。この図形の正方形を底面としたときの高さを求めましょう。この図形は 2 つの四角錐と 1 つの横倒しにした三角柱に分割できます。この四角錐をさらに合同な 2 つに分割すると、底面は $\alpha,\ \alpha-\dfrac{1}{2}$ の長さを 2 辺とする長方形で、四角錐の頂点は長方形の 1 つの頂点の真上にあります。長方形の反対側の頂点と結んだ辺が正十二面体の辺ですから、高さを h とすると三平方の定理の応用で、

$\alpha^2+\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2+h^2=1$ となるから, $h^2=\dfrac{3}{4}+\alpha-2\alpha^2=\dfrac{1}{4}$ したがって, 高さ $h=\dfrac{1}{2}$ です。

これより、今考えている四角錐の体積は $\dfrac{1}{3}\alpha\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}(2\alpha^2-\alpha)=\dfrac{1}{24}$

横倒しの三角柱は底面の三角形の底辺 ϕ, 高さ $\dfrac{1}{2}$, 三角柱の高さ 1 であるから、その体積は、$\dfrac{1}{2}\phi\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}\phi$

したがって、正十二面体の体積は、

$$\phi^3+6\left(4\times\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\phi\right)=\frac{7}{2}\phi+2=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}=7.663$$

実際の体積は, $7,663,000mm^3=7,663cm^3$ です。

コンテナの体積が $5,899\times2,352\times2,386=33,104,432,928mm^3$ ですから

$33,104,432,928\div7663,000=4320.0356$ となり、隙間無く入れてもコンテナには 4320 個しか入らないことがわかります。10000 個の正十二面体を運ぶには少なくとも 3 個のコンテナは必要だということです。しかし、隙間無く積むことはできませんから、3 個で済むのか 4 個以上のコンテナが必要なのか考えてみましょう。

これまでの成果から、正十二面体の頂点の座標を次のように定めることができます。

(α,α,α), $(-\alpha,\alpha,\alpha)$, $(-\alpha,-\alpha,\alpha)$, $(\alpha,-\alpha,\alpha)$, $(\alpha,\alpha,-\alpha)$, $(-\alpha,\alpha,-\alpha)$, $(-\alpha,-\alpha,-\alpha)$, $(\alpha,-\alpha,-\alpha)$,

$\left(\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$, $\left(\alpha+\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, $\left(-\alpha-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, $\left(-\alpha-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,

$\left(0,\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(0,\alpha+\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(0,-\alpha-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(0,-\alpha-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{1}{2},0,\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},0,\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},0,-\alpha-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},0,-\alpha-\dfrac{1}{2}\right)$

高校で空間ベクトルを習った人なら、この座標を使って、いろいろなことが計算できるし、３Ｄプリンタに正十二面体を作らせる元データにもなります。われわれもこれからの計算にこの座標を使っていきましょう。

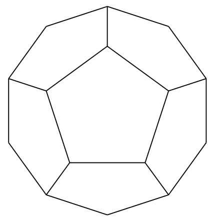
［提案された積み方と充填率］

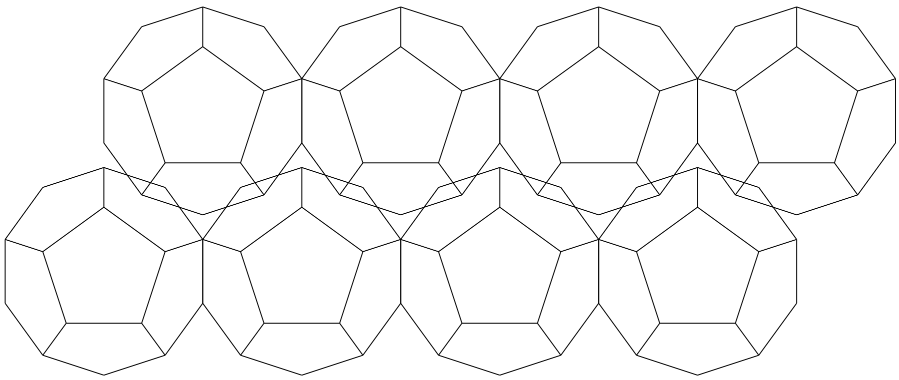
この正十二面体に外接する球の容器を考えてその球の入れ物を積み上げる積み方を富山理月さん（名古屋大学教育学部附属高校）は提案してくれました。しかし、この積み方は球の容器との間に隙間ができ、容器と容器の間にも隙間ができます。球の容器をかぶせないで積むとどうなるか考えてみましょう。

正十二面体を一つの面を下にして床に置いて真上から見ると、図のような中に正五角形があり、周りに正十角形がある図形になります。

これを床に敷き詰める場合２００５年にコンクールで出題した敷き詰めの問題になりますが、隙間無く敷き詰めることは不可能です。

間に少し隙間を空けて敷き詰める方法はこんな感じになります。

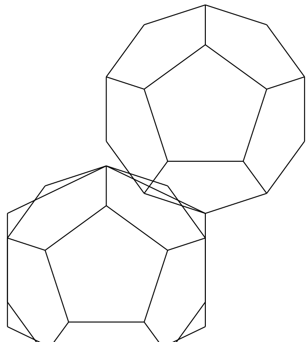


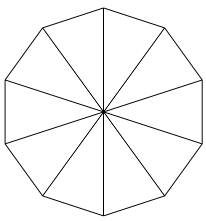


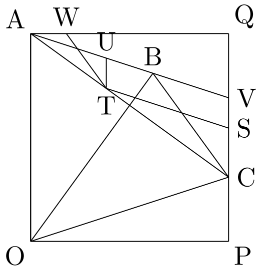
少し重なって見えるのは真上から見ていて、それぞれの高さが違うからです。2 つの面がちょうどぴったり一致するように置くとこの配置になります。

正十二面体の間は斜面になり、規則正しく積むことができません。したがって、それぞれの正十二面体の上に同じように積んでいくことにします。

このように積むときの充填率を計算してみましょう。右図のように正十二面体の上下の頂点を結んだ、六角形を底面に持ち、正十二面体の向かい合う面の間の距離を高さとする六角柱が正十二面体 1 個が占める体積になります。この六角柱の体積を求めれば充填率を計算できます。







上左の図は正十角形の各頂点に中心から線を引いた図です。各三角形は頂角が 36° の二等辺三角形ですから、正五角形の対角線を引いてできる二等辺三角形と相似になり、辺の比は $1:\phi$ になります。当面は（実際には違いますが）正十角形の 1 辺の長さを 1 として計算していきます。つまり、正十角形の頂点から中心までの距離を ϕ として計算していきます。

上中の図は A, B, C が右図の六角形をかきたした十角形の頂点、P が C を頂点とする BC 出ない辺の中点、O がその十角形の中心、考えやすいように A, O, P を頂点とする長方形をかき Q は最後の頂点、V は直線 AB, PQ の交点であり、十角形が重ならないように並べたときの右上の十角形の頂点の位置、UV がその時の右上の十角形の辺になります。2 つの面がちょうどぴったり一致するように右上の十角形を配置した場合の頂

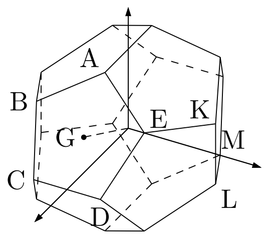
点の位置が S, T です。

T は A, C と同じ高さなので、直線 AC 上に T が来るところまで重ねる事ができます。

正十角形の 1 辺の長さを 1 としているので、$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{VU}=\mathrm{ST}=1,\ \mathrm{CP}=\mathrm{QV}=\dfrac{1}{2}$,
$\mathrm{OA}=0\mathrm{B}=\mathrm{OC}=\mathrm{AV}=\phi$ ですから、$\mathrm{VS}=\mathrm{UT}=\dfrac{\phi-1}{\phi}(\phi-1)=2\phi-3$ となり、$\mathrm{SP}=\dfrac{5}{2}-\phi$ になります。

$\mathrm{OP}=\sqrt{\phi^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4\phi+3}}{2}$ ですから、六角柱の底面の面積は $2(\mathrm{OA}+\mathrm{SP})\times\mathrm{OP}=\dfrac{5}{2}\sqrt{4\phi+3}$ です。

では、実際の六角柱の底面の面積、六角柱の高さはいくつになるのでしょうか？前に出した空間の座標を使って求めてみましょう。



A $\left(\dfrac{1}{2},0,\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$, B $(\alpha,-\alpha,\alpha)$, C $\left(\alpha+\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, D $\left(\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$, E (α,α,α) とすると, 図のように一つの面の五角形の頂点になります。この五角形に正十二面体の中心 O から下ろした垂線の足は五角形の外心 (外接円の中心) になります。正多角形の外心は重心と一致します。さらに n 角形の重心は各頂点の座標を座標ごとに足して n で割った座標の点になります。したがって、五角形 ABCDE の外心は $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2},0,\alpha+\dfrac{1}{2}\right)+(\alpha,-\alpha,\alpha)+\left(\alpha+\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)+\left(\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)+(\alpha,\alpha,\alpha)}{5}=\left(\dfrac{4\phi+3}{10},\ 0,\ \dfrac{3\phi+1}{10}\right)$ です。この点を　G とします。

P は五角形 ABCDE とその反対側の五角形の頂点ではない 2 点を結ぶ辺の中点ならばどこでもよいので、K $\left(0,\alpha+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, L $\left(0,\alpha+\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ として、その中点を M $\left(0,\alpha+\dfrac{1}{2},0\right)$ とすると、$\angle\mathrm{GOM}=90^\circ$ ですから, $\mathrm{OP}=\mathrm{OM}=\alpha+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\phi+1}{2}$ とわかります。

以上のことから、六角柱の底面の面積は $\left(\dfrac{\dfrac{\phi+1}{2}}{\dfrac{\sqrt{4\phi+3}}{2}}\right)^2\times\dfrac{5}{2}\sqrt{4\phi+3}=\dfrac{5(3\phi+2)}{2\sqrt{4\phi+3}}$

六角柱の高さは, $2\mathrm{OG}=2\sqrt{\left(\dfrac{4\phi+3}{10}\right)^2+\left(\dfrac{3\phi+1}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{25\phi^2+30\phi+10}}{5}=\dfrac{\sqrt{11\phi+7}}{\sqrt{5}}$ である。

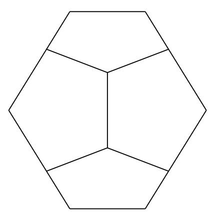
したがって, 六角柱の体積は、

$$\frac{5(3\phi+2)}{2\sqrt{4\phi+3}}\times\frac{\sqrt{11\phi+7}}{\sqrt{5}}=\frac{(7\sqrt{5}+15)\sqrt{11\sqrt{5}+25}}{4\sqrt{4\sqrt{5}+10}}=12.399$$

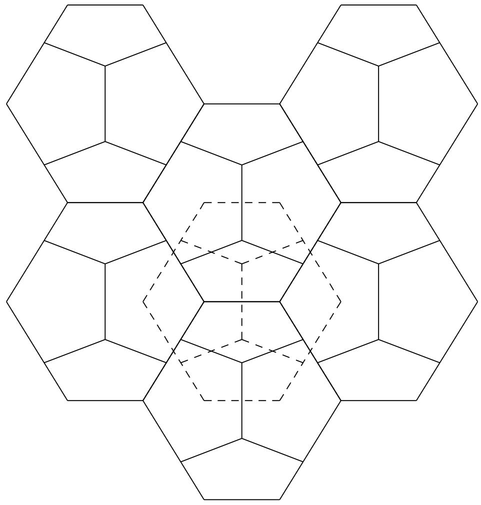
となるので、充填率は $7.663\div12.399=0.6180$ です。

どのように積むかは別にして、より充填率の高い積み方は無いか見てみましょう。

正十二面体を向かい合う 2 本の辺のうち 1 組が重なる方向から正十面体を見ると、図のような六角形に見えます。六角形なら平面に隙間無く敷き詰めることができます。セントヨゼフG（セントヨゼフ女子学園中学校）と安藤智紀さん（大手前高等学校）がこの六角形に注目しました。



安藤智紀さんは図のように平面上に隙間無く敷き詰める方法を提案しています。2 段目は向きを 90° 変えて積む方法で提案しています。しかし、図より、横方向の正十二面体の繰り返しは $\phi+2$ ごとなのに対し、縦方向の正十二面体の繰り返しは $\phi+1$ です。向きを 90° 変えると 2 段目を規則正しく積むためには隙間を開けなければいけません。つまり 2 段目はかなり隙間をあけて積むことになります。



点線のように向きを変えずに積めば、 2 段目以降も各段は横の平面上の隙間が無く積むことができます。この積み方のときの充填率を計算してみましょう。

この積み方のときは、図の六角形を底面として 1 段目と 2 段目の中心の高さの差を高さとする六角柱が正十二面体 1 個分が占める体積です。2 段目の正十二面体の中心は 1 段目の正十二面体の中心より, $\phi+\dfrac{1}{2}$ だけ高くなります。

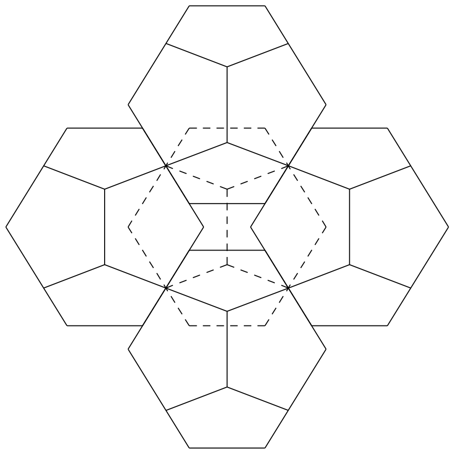
六角柱の底面となる六角形の面積は、$2\times\dfrac{1}{2}\{1+(\phi+1)\}\times\dfrac{\phi+1}{2}=\dfrac{4\phi+3}{2}$ ですから、

六角柱の体積は、$\dfrac{4\phi+3}{2}\times\left(\phi+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{18\phi+11}{4}=\dfrac{9\sqrt{5}+20}{4}=10.0311$ です。

この充填率は $7.663\div10.0311=0.7639$ になります。

他に積む方法は無いでしょうか。兒玉太陽さん（海陽中等教育学校）は平面上では隙間が空くように並べるが、その分、1 段目と 2 段目の高さを押さえる積み方を提案しています。

その積み方とは、図のように正十面体の体積を計算するときに使った 1 辺の長さが ϕ の立方体の辺を合わせていく積み方です。実はこの積み方は出題者が用意していた解答であり、解答者から提案された積み方の中でも一番充填率が高い積み方です。



では、この積み方の充填率を計算してみましょう。この積み方の場合は、1 辺の長さが ϕ の立方体が隙間無く積みあげられていく中で、1 つは正十二面体がすべてを占めその隣は各正十二面体の立方体の残りの図形が 6 個入りますので、正十二面体 1 個は立方体 2 個分の体積を占めていることになります。立方体 2 個分の体積は、$2\phi^3=4\phi+2=2\sqrt{5}+4=8.4721$ になります。充填率は $7.663\div8.4721=0.9045$ で先の 2 つの積み方に比べてもこの方が沢山積めることがわかります。

では、この積み方で一つのコンテナに何個積めるのでしょうか？正十二面体の立方体以外の図形の高さは $\dfrac{1}{2}$、立方体の 1 辺はの長さは $\phi=1.618$ でした。これは正十二面体の 1 辺の長さを 1 としたときの数ですから、1 辺の長さが 100 mm の今回の問題では、図形の高さは 50 mm、立方体の 1 辺の長さは 161.8 mm です。

したがって、コンテナの内寸から長さ、幅、高さ、すべてから図形の高さ 2 つ分の 100 mm を引いて、立方体を何個並べることができるか計算すれば求めることができます。

長さでは、 $(5899-100)\div161.8=35.8\cdots$、幅では、 $(2352-100)\div161.8=13.9\cdots$、

高さでは、 $(2386-100)\div161.8=14.1\cdots$ ですから、立方体は $35\times13\times14=6370$ 個入ります。立方体 2 個で正十二面体 1 個ですから、1 つのコンテナには $6370\div2=3185$ 個積むことが来ます。

本問の答としては、「コンテナは 4 個必要であり、それによって最大 12740 個の正十二面体を送ることができる。」が正解です。

積み方は、上の通りですが、一つ問題点があります。辺を下にして正十二面体を立てるのは難しいということです。どのような工夫をすればコンテナの中で動かないように積みあげることができるでしょうか？

（７）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール　共通問題第５問の解説

日本数学コンクール実行委員会委員

西村　治道（名古屋大学情報学研究科　准教授）
田地　宏一（名古屋大学工学研究科　准教授）
渡辺　武志（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
若山　晃治（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
林　　正人（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）

問題５．「変形 make10」

『車のナンバープレートの４つの数が四則演算と括弧を使って 10 になるか』という遊びがあり，make10 と呼ばれています。例えば 1, 2, 2, 3 だったら $2\times(1+3)+2$ で 10 にできます。では次の場合はどうでしょう。

（１）1, 1, 9, 9 を四則演算と括弧を使って 10 を作ってください。

さて，make10 を変形した問題はいろいろ考えられますが，以下の問題を解いてください。

（２）1 から 9 までの数を（重複を許して）５つ選び四則演算と括弧を使って 2017 を作ってください。
（３）1 から 9 までの数を(重複を許して)どのように４つ選んでも四則演算と括弧を使って 2017 は作れないことを示してください。
（４）３個の文字 a，b，c と ＋，× および括弧を組み合わせて，いくつの異なる式を作れるでしょうか？ ただし，a，b，c は必ず１度ずつ使うものとします。
（５）４個の文字 a，b，c，d について（４）と同様に考えると，いくつの異なる式を作れるでしょうか？ 一般に n 個の文字についてはどうでしょうか。
（６）自由にルールを変更して，いくつの異なる式が作れるか検討してください。

解説と講評

（1）(1+1÷9)×9 = 10 が唯一の方法です。÷を使って途中の計算で分数を経由することから，make10 の中で難しいとされる類の問題です（他には 3, 4, 7, 8 や 1, 1, 5, 8 なども難しい問題とされています)。もちろん考えうるすべてのパターンを試せばいずれはできるわけです。しかし，すべてのパターンをどうやって試すかわからない場合，いつまで経ってもできないことになりえます。すべてのパターンをもれなく，かつ効率を考えると重複なく数えることが共通問題５の課題となっています。

（2）5×5×9×9－8 = 2017，4×7×8×9+1=2017，6×6×7×8+1=2017 で 2017 が作れます。湯浅さん，角南さん，竹内さん，中尾さん（岡山県立津山高校 2 年）のチームは上記 3 つを見つける手順を丁寧に書いてくれていました。

（3）（1），（2）の解答例からみられるように，一般に n 個の数を選んで四則演算と括弧を使ってある数を作ろうとするとき，使用される四則演算の（重複も含めた）個数は$n-1$個です。よって 1 から 9 までの数から 4 つ選んで 2017 を作ろうとすると，四則演算は 3 回使うことになります。では 4 つの数を演算する方法にどのようなものがあるかというと，(A) 1 から 9 のうちの 3 つの数から作った数 x と 1 から 9 のどれか y に演算（＋，－，×，÷のどれか）を施すか，(B) 1 から 9 のうちの 2 つの数に演算を施した数 x と 1 から 9 のうちの 2 つの数に演算を施した数 y に演算を施すか，のどちらかに分かれます。図で表すと，(A)は以下の図 3-1 のように表現できます。これは最初 2 つの 1 から 9 の数 a, b（四角で表現）に演算（丸で表現）を施し，得られた数と 3 つ目の数 c に演算を施して x を得て，4 つ目の数 d=y との演算を行うことを表しています。(なお，－，÷は演算される 2 つの数の順番で値が変わるのでこの図はその意味で正確ではないですが，（3）を解答するうえではどちらの順番に解釈しても 2017 を作れないことになるので問題は生じません。）同様の解釈をすると(B)は図 3-2 のように表現できます。

図 3-1

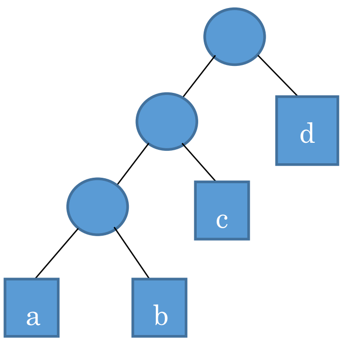
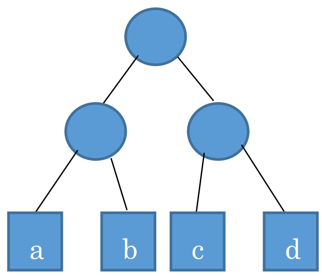


図 3-2



2017 が作れるとすると矛盾が生じることを示します。まず x , y が(B)で得られたものでないことを確認します。(B)の場合 x, y とも最大で 81 にしかなりませんので，2017 に届くには最後の演

算は×である必要が出てきます。しかし，2017 は素数なので x, y が整数である限り×は使えません（x や y が 1 ではもちろん×でも 2017 に届かないのでだめです)。すると x か y を作るために÷が必要になりますが，÷を使うと x か y は 9 以下になるので x×y でも 81×9 までしかいかないので 2017 にはなりえません。よって x, y は(A)の方法で得られる必要があります。再び x を得るために途中で÷が使われるとすると x は 81 以下になるので y とどんな演算をしても 2017 に届きません。よって x は整数でなければなりません。すると 2017 は素数なので最後に行う演算が×ではありません。つまり，① x+y=2017 か，② x－y=2017 か，③ x÷y=2017 かになります。①，②，③いずれの場合も x は 2017−9＞1000 以上となる必要がありますが，１から 9 までの数を 3 つ使って作れる数の最大は 9×9×9 で 1000 より小さいので，それは不可能です。よって 2017 が作れるとすると矛盾が生じました。

図 3-1, 3-2 のような表現は数式を木と呼ばれる数学的構造で表す方法であり，コンピュータ科学の分野などでよく用いられています。

（４）a+b+c, a×b×c, (a+b)×c, (a+c)×b, (b+c)×a, a×b+c, a×c+b, b×c+a の 8 通りが解答例です。これは図で表現すると以下の図 4-1，図 4-2 という 2 種類の木で表現できます。図において四角は a, b, c が入り，丸は演算（＋か×）を表します。図 4-1 は a+b+c と a×b×c を表現しています。黒丸として＋と×の 2 種類が取れるということです。＋は足す順序（あるいは×は掛ける順序）で結果が変わらないので，図 4-1 は a, b, c すべてを足す（あるいは a, b, c すべてを掛ける）ことを表現しています。図 4-2 は残りの 6 つを表現しています。白丸と黒丸は異なる演算を表現しています。たとえば(a+b)×c の場合は白丸が＋，黒丸が×を表していて，白丸の下の四角に a, b が入り, 黒丸の右下の四角に c が入ります。図 4-2 が 6 つの式に対応するのは黒丸の選び方（＋, ×）で 2 通り，黒丸の右下の四角に入る文字（a, b, c）の選び方で 3 通りあるからです。＋，×は２つの文字の順序で結果は変わらない（たとえば a+b=b+a）ので，白丸の下の２つの四角に入る文字の順序は問いません。

図 4-1

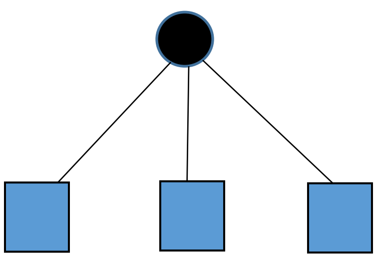
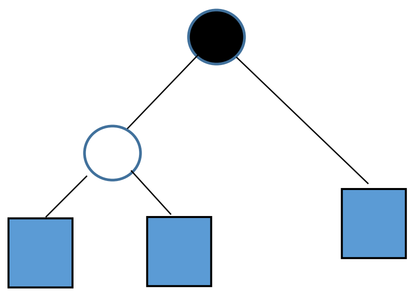


図 4-2



（５）まず 4 個の文字(n=4)の場合を考えます。ここでは（４）で使った図を再利用することでもれなく効率的に異なる式を数えることにします。（３）の解答例でも見たように，４つの文字を演算（＋，×）していく方法は，(A) 3 個の文字から作った式と 4 つ目の文字（a, b, c, d のどれか）を演算するか, (B) 2 つの文字から作った式と残りの 2 つの文字から作った式を演算するかの 2 種類が考えられます。(A)については，3 個の文字から作った式に対して（４）で使った図 4-1, 4-2 が再利用できます。その際，ポイントとなるのは 3 個の文字から作った式の最後の演算（図 4-1,

4-2 でいう黒丸）が 4 つ目の文字との演算と同じか違うかということです。この演算が 4 つ目の文字との演算と同じであるとき（ケース A1）は，図 4-1 は図 5-A1-1 に，図 4-2 は図 5-A1-2 に変形します（赤線は 4 つ目の文字の追加を表します)。たとえば図 5-A1-1 については a+b+c と d を足すことを，図 5-A1-2 については(a+b)×c と d を掛けることを考えていただくと良いかと思います。

(A1) 3 個の文字から作った式と 1 つの文字を演算するとき（図 4-1,4-2 の黒丸と同じ演算を 4 つ目の文字との演算にも使用）

図 5-A1-1

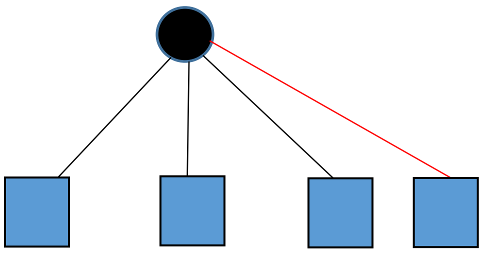
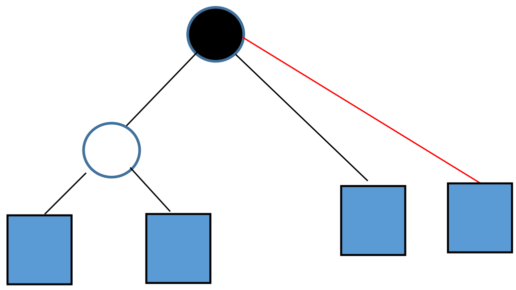


図 5-A1-2



一方で，3 個の文字から作った式の最後の演算（図 4-1，4-2 でいう黒丸）が 4 つ目の文字との演算と異なる場合（ケース A2)，図 4-1 は図 5-A2-1，図 4-2 は図 5-A2-2 に変形します。たとえば図 5-A2-1 は a+b+c に d を掛けることを，図 5-A2-2 は(a+b)×c に d を加えることを考えてみてください。なお，図 5-A2-1, 5-A2-2 を見て「白丸と黒丸が逆じゃないか」と思うかもしれませんが，パターン数を数えるうえでは白と黒を入れ替えても問題ないので（今後の説明のため）黒丸が一番上に来るようにしました。

(A2) 3 個の文字から作った式と 1 つの文字を演算するとき（図 4-1,4-2 の黒丸と異なる演算を 4 つ目の文字との演算に使用）

図 5-A2-1

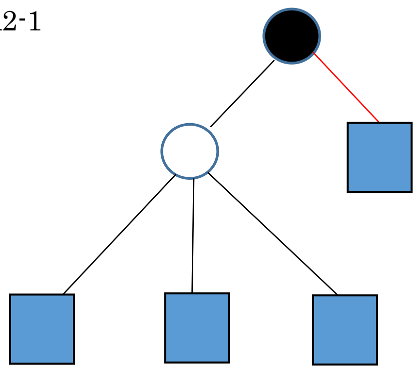
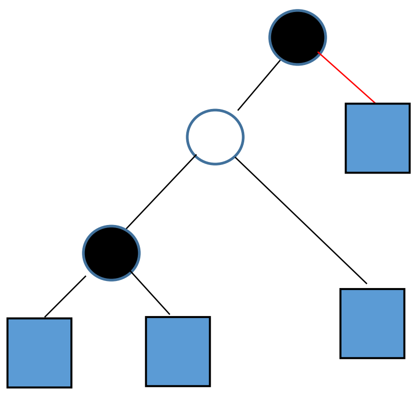
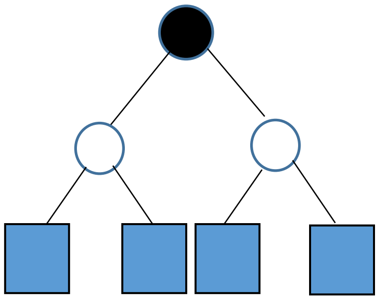


図 5-2A-2



次に(B)を考えます。ここでのポイントは,「2 つの式をそれぞれ 2 つの文字から作るときは同じ演算を施し，かつそれらを最後にまとめる演算は違う演算を施す」場合だけを考えることです。つまり，図 5-B で表現されるものだけを考えます。

図 5-B



なぜなら 2 つの式の一方でも最後にまとめる演算と等しくなると，図 5-A-1 あるいは図 5-A-2 と等しくなって重複してパターンを数えることになってしまうからです。たとえば a+b と c×d を×でまとめて(a+b)×(c×d)とすると，これは(a+b)×c×d＝((a+b)×c)×d と同じで図 5-A-2 ですでに考慮済みです。図 5-B の例は a×b+c×d や(a+b)×(c+d)などです。

最後に各図で表現される式のパターン数を数えます。まず図 5-A1-1 は簡単で 4 つの文字がすべて足されるか掛けられるか（黒丸の取り方）の 2 通り。図 5-A1-2 は白丸の下の 2 つの四角に 4 つの文字のどれを選ぶかで ${}_4C_2$=6 通りあり，黒丸の取り方で 2 通りあるので 6×2＝12 通り。図 5-A2-1 は黒丸の右下の四角にどの文字を入れるかで 4 通り，黒丸の取り方で 2 通りなので 4×2=8 通り。図 5-2A-2 は一番上の黒丸の右下の四角と白丸の右下の四角に 4 つの文字のどれを選び，かつ選んだ 2 つがどちらに割り当てられるかも区別しないといけないので 4×3=12 通りあり，黒丸の取り方で 2 通りなので 12×2=24 通り。図 5-B は 4 つの文字のどの 2 つをペアにするかで 3 通り，黒丸の取り方で 2 通りなので 3×2=6 通り。以上より，求めるパターン数は 2+12+8+24+6=52 通りです。

この 52 通りという解答に（上記の解答例ではないが）正しい思考過程の記述とともに到達したのは，ジュニア団体で 1 チーム（石河さん，西山さん，宮崎さん，廣野さん（津市立橋北中学校）のチーム），シニア団体で 4 チーム（湯浅さん，角南さん，竹内さん，中尾さん（岡山県立津山高校）のチーム，河原さん，小川さん，安藤さん，堀江さん（名大附属）のチーム，三宅さん，北村さん，下津さん，松本さん（奈良工業高等専門学校）のチーム，大河原さん，樋口さん，名越さん，豊田さん（高田高校）のチーム），シニア個人で 4 名（勝田さん（恵那高校），酒井さん（滝高校），藤井さん（愛知県立明和高等学校），中村さん（浜松北高等学校））でした。また，ジュニア個人では野呂さん（私立桜蔭中）が思考過程に若干のミスがあったものの 52 通りという解答にたどり着いていました。

さて次に n=5 のときを考えます。やはり n=4 のときと同様これまでの図を再利用します。すると以下のケース(C1),(C2),(D)が考えられます。

(C1) 4 個の文字から作った式と 1 つの文字を演算するとき（図 5-A1-1, 5-A1-2, 5-A2-1, 5-A2-2, 5-B の一番上の黒丸と同じ演算を 5 つ目の文字との演算にも使用）

図 5-C1-1

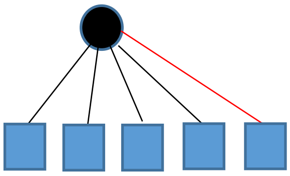


図 5-C1-2

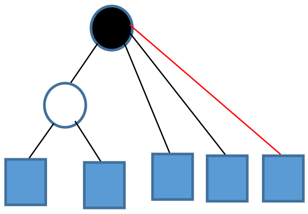


図 5-C1-3

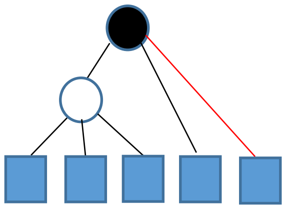


図 5-C1-4

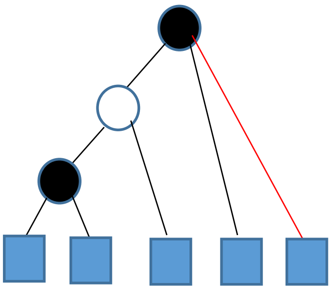
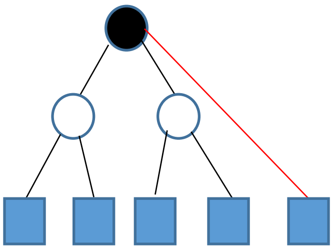


図 5-C1-5



(C2) 4 個の文字から作った式と 1 つの文字を演算するとき（図 5-A1-1, 5-A1-2, 5-A2-1, 5-A2-2, 5-B の一番上の黒丸と異なる演算を 5 つ目の文字との演算に使用）

図 5-C2-1

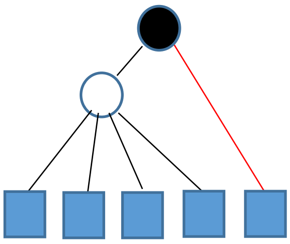


図 5-C2-2

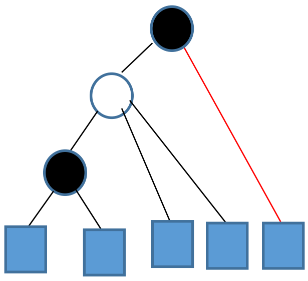


図 5-C2-3

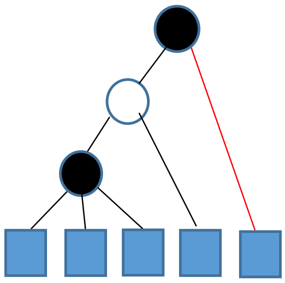


図 5-C2-4

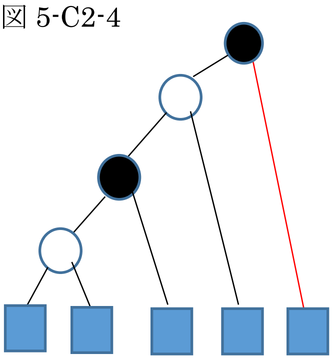
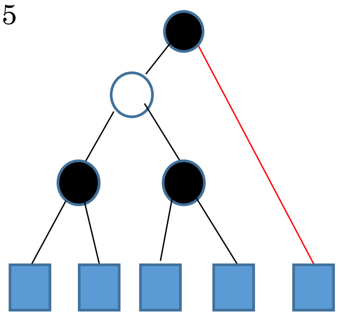
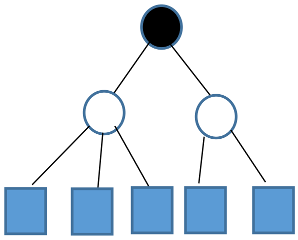


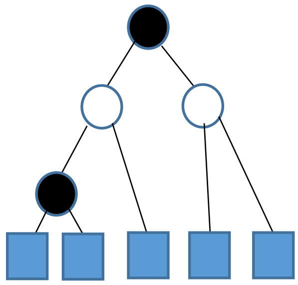
図 5-C2-5



(D) 3 個の文字から作った式と 2 個の文字から作った式を演算（3 個の文字から作った式には図 4-1, 4-2 を再利用）

図 5-D-1　　　　　　　　　　　図 5-D-2

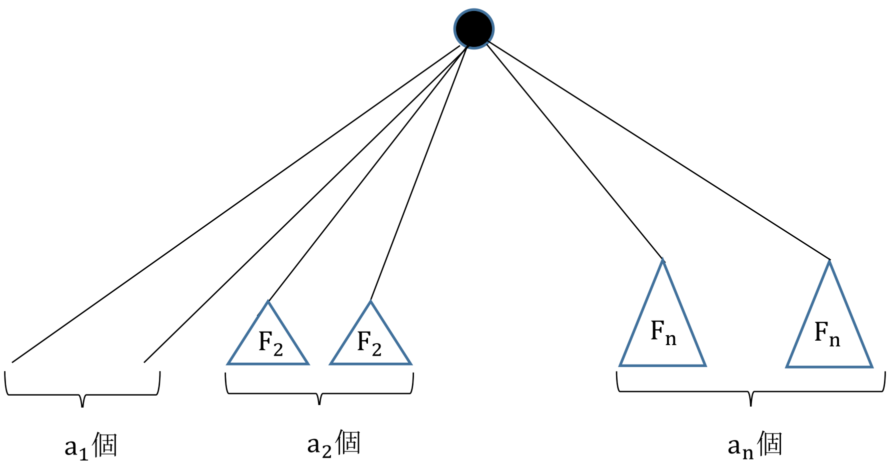




総パターン数を数えましょう。以下では黒丸は×であるとして数えます。すると得られたパターン数を 2 倍すれば総パターン数が得られるからです。まず(C1)ですが，図 5-C1-1 は 1 パターン，図 5-C1-2 は $_5C_2$=10 パターン，図 5-C1-3 は $_5C_2$=10 パターン，図 5-C1-4 は $_5C_2$×3=30 パターン，図 5-C1-5 は 5×3=15 パターンで計 66 パターン（各図のパターン数がなぜそうなるか疑問に思った方は自分で考えてみてください）。次に(C2)ですが，図 5-C2-1 は 5 パターン，図 5-2C-2 は 5×$_4C_2$=30 パターン，図 5-2C-3 は 5×4=20 パターン，図 5-2C-4 は 5×4×3=60 パターン，図 5-2C-5 は 5×3=15 パターンで計 130 パターン。最後に(D)ですが，図 5-D-1 は $_5C_2$=10 パターン，図 5-D-2 は $_5C_2$×3=30 パターンで計 40 パターン。よって，黒丸が×であるとして数えたときのパターン数は 66+130+40=236。以上より，n=5 の場合の総パターン数は 236×2=472 通りとなります。

このように n 番目の値や数学的構造を求めるために$n-1$番目以下の値や数学的構造を利用することを再帰といいます。再帰の代表例は n の階乗 n!で，これは 1×2×…×n（つまり 1 から n までの積）のことですが，再帰的な表現では $n!=n\times(n-1)!$と表せます（ただし，0!=1 とします）。上記の解答例は n の階乗よりはるかに複雑ではありますが，やはり再帰を用いています。実際，上記の解答例の考え方を（多少飛躍はありますが）一般化すると，以下に示す図 5-S が得られます。ただし，F_nは n 個の数を＋，×を使って表した式を表現する図の 1 つ（例えばF_3は図 4-1 か図 4-2）で，一番上の黒丸はやはり×を表すとします。

図 5-S



この図をもとに以下の漸化式が得られます。

Schröder の漸化式：r_nを n 個の異なる文字を＋，×（および括弧）で表したときに最後に×を使う式のパターン数

$$r_{n+1} = \sum_{\substack{a_1,a_2,\dots,a_n: \\ \text{各}a_i\text{は 0 以上の整数で} \\ a_1+2a_2+\cdots+na_n=n+1}} \frac{(n+1)!\, r_1^{a_1} r_2^{a_2} \cdots r_n^{a_n}}{a_1!\, a_2! \cdots a_n!\, (1!)^{a_1} (2!)^{a_2} \cdots (n!)^{a_n}}$$

よって，r_nを 2 倍すれば一般の n に対する式が得られることになります。

Schröder の漸化式は簡潔とはとてもいいがたい漸化式で，実際にr_nを求めるのは大変なので，より簡潔な形でr_nを求めるための漸化式も知られています。たとえば以下の漸化式はその 1 つです。

Felsenstein の漸化式：$r_{m,n}$を n 個の異なる文字を＋，×（および括弧）で表したときに最後に×を使う式で，かつ上記のような木で表したときの丸頂点の個数が m であるような式の個数

$$r_{m,n} = \begin{cases} 0\ (m < 1 \text{ または } m > n-1),\ \ 1\ (m = 1 \text{ かつ } n \geq 2), \\ m r_{m,n-1} + (n+m-2) r_{m-1,n-1}\ (2 \leq m \leq n-1 \text{ かつ } n \geq 2) \end{cases}$$

実際，$r_n = \sum_{m=1}^{n-1} r_{m,n}$であることから，Felsenstein の漸化式を使って比較的容易にr_nを計算できることになります（表 5-F)。

表 5-F

	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
m=1	1	1	1	1	1	1
m=2		3	10	25	56	119
m=3			15	105	490	1918
m=4				105	1260	9450
m=5					945	17325
m=6						10395
r_n	1	4	26	236	2752	39208

（6）自然な拡張の１つとして，＋，×の代わりに四則演算すべてを使える場合が考えられます。－や÷は演算される数の順序で異なる式になりえる（たとえば－の場合，$a-b$と$b-a$は異なる式になる）ので，はるかに複雑になりそうです。文字数２の場合，a+b，a − b，b − a, a×b, a÷b, b÷a の 6 通りになります。興味のある方は，文字数３や４の場合，さらにはより大きな場合を考えてみてください。

参考文献

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® https://oeis.org
[2] E. Schröder, Vier combinatorische Probleme, Z. f. Math. Phys., 15 (1870), 361-376.
[3] J. Felsenstein, The number of evolutionary trees, Systematic Zoology, 27 (1978), 27-33.
[4] P. Regner, Phylogenetic Trees: Selected Combinatorial Problems, Master Thesis, Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Vienna, 2012.

文献[1]は知られている数列を集めたサイトです。上記解答例で出てきた数列 r_nの部分列である 1, 4, 26, 236, 2752 をそのサイトで検索すると数列r_nがヒットします。数列r_nは数列番号 A000311 で登録されていて Schröder's fourth problem などと呼ばれています。数列 A000311（＝数列r_n）は文献[2]で Schröder が本問題と同様のパターン数を数えるために初めて研究されたようです。また，数列 A000311 のページには文献[2]以外にもたくさんの参考文献(LINKS)や情報が集められています。Feinstein の漸化式は文献[3]で得られました。図 5-S や表 5-F などは文献[4]の 3.1.2 章を参考にしました。

（８）日本数学コンクール・日本ジュニア数学コンクール
論文賞の解説

テーマ１．「正三角形の詰め込み」

１辺の長さが１である正方形の中に、n 個の合同な正三角形を重なり合わないように入れます。そのような正三角形の１辺の長さの最大値を求めてください。正方形の代わりに他の形を考えたらどうでしょうか。

解　説

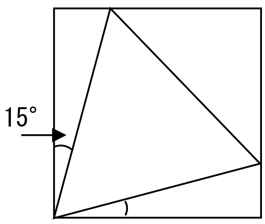
日本数学コンクール実行委員会委員　岩本　隆宏（三　重　高　等　学　校　講師）
奥田　真吾（三重県立津・津西高等学校　講師）
小倉　一輝（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
田邉　　篤（三 重 県 立 津 高 等 学 校　教諭）

「正方形の中に正方形を」入れる問題は既に考えられていますが、「正方形の中に正三角形を」入れる問題は今の所、遭遇したこともなく、新作問題として出題しました。また、これが最大値だと思われても証明ともなると手も足も出ず、比較することによりこれ以上大きいものはないと判断していくもどかしさを感じられた方も多かったのではないでしょうか。これまで、この問題が取り上げられなかったのもこの辺に要因があるように思われます。n が大きくなればなる程、難しさは底知れぬものとなりそうです。ただし、n が単独の場合、n＝１のときは、1987 年にハンガリー数学オリンピックに、また、大学入試問題に長年に渡りいくつかの大学で出題されております。最近では、2010 年千葉大(後)に証明も含めて出題されています。
n＝４のときは、2001 年岡山大学(前)に比較する方法で出題されております。

提出された５つの論文の中で、石井秀俊さん、櫻井徳吾さん、丹羽雄哉さん(筑波大学附属駒場高２年)の共著論文は、回転、拡大により充填率をいかに高くすることができるか、論理的に考えを詰めていく方法を論じ、最大値に迫っていく健闘が光っていました。

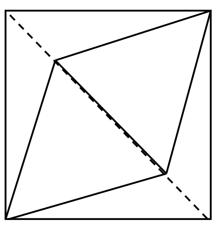
この問題は、今始まったばかりだと考えて下さい。以下には、現時点での最大値を示しておきます。今後、新たな最大値を見付けられた場合は、こちらまで報告して下さい。無期限に受け付けたいと思います。

n＝1



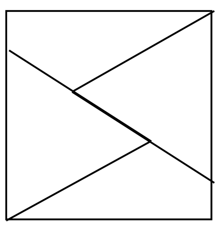
max $\boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \fallingdotseq 1.03528$

n＝2



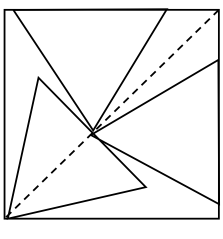
$\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}} \fallingdotseq 0.81650$ ＞

差 $\fallingdotseq 0.0278$



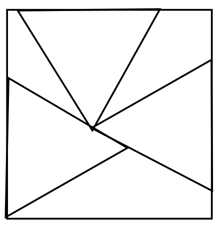
$\boxed{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}} \fallingdotseq 0.78868$

n＝3



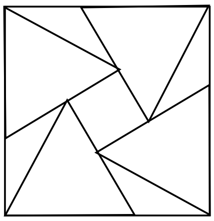
$\boxed{\dfrac{2\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{3}} \fallingdotseq 0.67641$ ＞

差 $\fallingdotseq 0.0097$

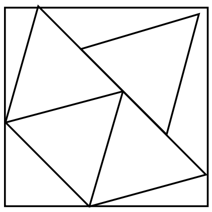


$\boxed{\dfrac{2}{3}} = 0.\dot{6}$

n＝4



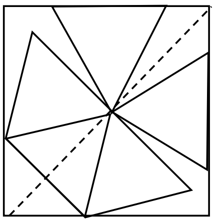
$\boxed{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}} \fallingdotseq 0.63397$ ＞



$\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}} \fallingdotseq 0.59772$

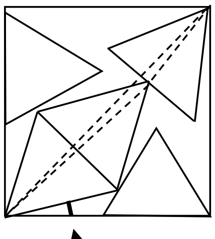
差 $\fallingdotseq 0.036$

n＝5



$\boxed{2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-3}$

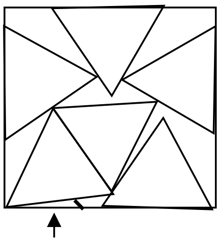
$\fallingdotseq 0.54587$ ＞



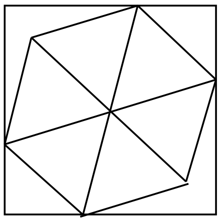
$\boxed{\fallingdotseq 0.54465}$ ……（＊）

差 $\fallingdotseq 0.0012$　　$\theta \fallingdotseq 13.6°$

n＝6



$\boxed{\fallingdotseq 0.52086}$ ＞

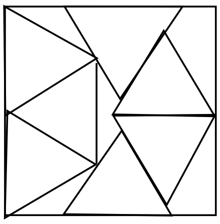


$\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} \fallingdotseq 0.51764$

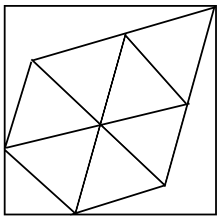
差 $\fallingdotseq 0.0032$

$$\theta=\sin^{-1}\frac{-6+\sqrt{3}}{2\sqrt{37+10\sqrt{3}}}+\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{37+10\sqrt{3}}}\fallingdotseq 7.188°$$

n＝7



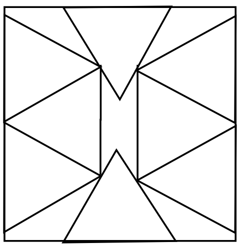
$\boxed{\dfrac{1}{2}} = 0.5$ ＞



$\boxed{\dfrac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{13}} \fallingdotseq 0.45648$

差 $\fallingdotseq 0.0435$

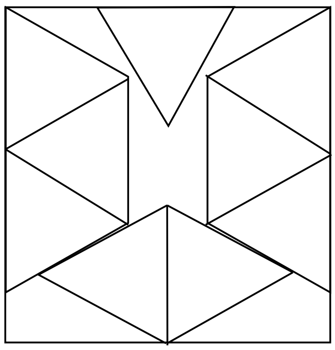
n＝8



$\dfrac{\mathbf{11-6\sqrt{3}}}{\mathbf{26}} \fallingdotseq \mathbf{0.023}$

$\boxed{\dfrac{3\sqrt{3}+1}{13}} \fallingdotseq \mathbf{0.47663}$

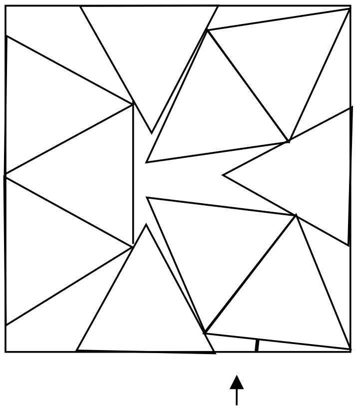
n＝9



$\boxed{\dfrac{6+\sqrt{3}}{18}} \fallingdotseq \mathbf{0.42956}$

（＊）方程式　$81x^4+216x^3+24x^2-384x+160=0$ の解の１つである。

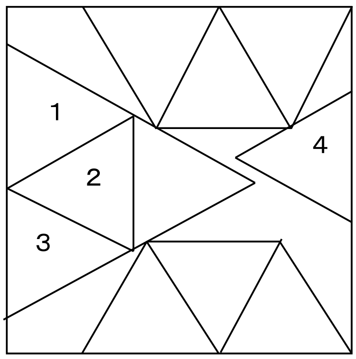
ｎ＝１０



$\boxed{\fallingdotseq 0.4187374206}$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{4+\sqrt{3}}} - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}} \fallingdotseq 6.94718°$$

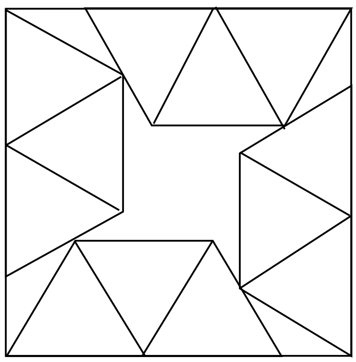
ｎ＝１１

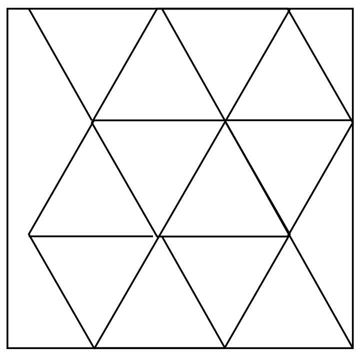


１～４の正三角形は少し移動可能 ……（＊＊）

$\boxed{\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}} \fallingdotseq 0.3943375673$

ｎ＝１２





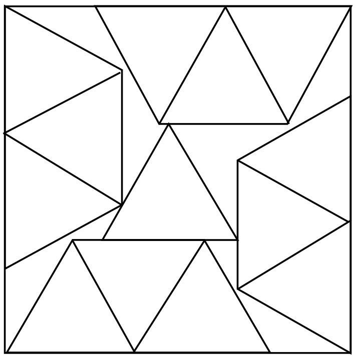
三角形の高さ＝$\dfrac{1}{3}$

$\boxed{\dfrac{6-\sqrt{3}}{11}} \fallingdotseq 0.3879953811 \quad > \quad \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}} \fallingdotseq 0.3849001795$

差 ≒ 0.003095

（＊＊） ｎ＝１１のときは、４つの正三角形を少し動かすことができます。現時点では、必ずしも動かせないものが最大とは限らないと考えています。「正方形の中に正方形を」のパターンでは、ｎ＝１７，１８，１９の場合に動かせる正方形が存在しています。参考文献を参照して下さい。

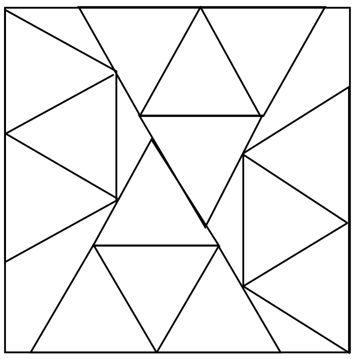
n＝１３



三角形の高さ＝$\frac{1}{3}$

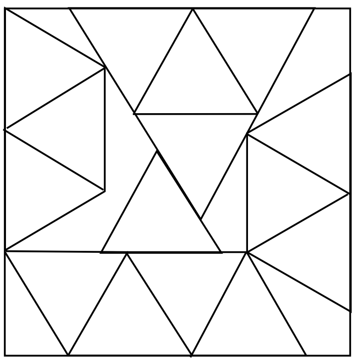
$\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}} \fallingdotseq 0.3849001795$

n＝１４



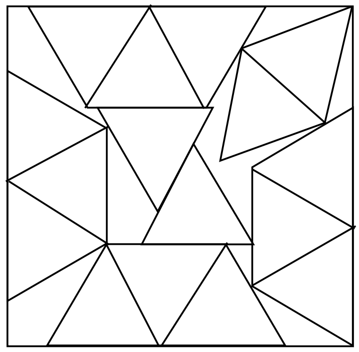
$\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}} \fallingdotseq 0.3660254038$

n＝１５



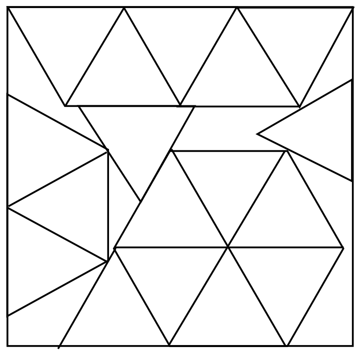
$\boxed{\dfrac{2\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}} \fallingdotseq 0.3489152604$

n＝１６



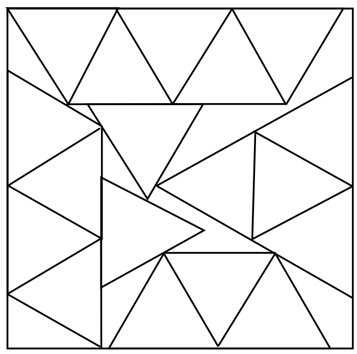
$\boxed{\dfrac{2\left(75+23\sqrt{3}\right)}{673}} \fallingdotseq 0.341269446$

n＝１７



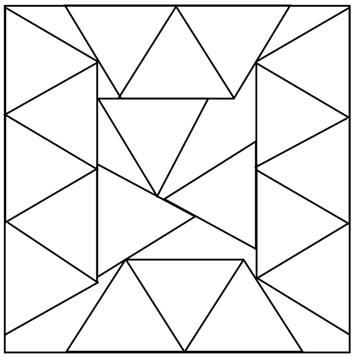
$\boxed{\dfrac{1}{3}} = 0.\dot{3}$

n＝１８



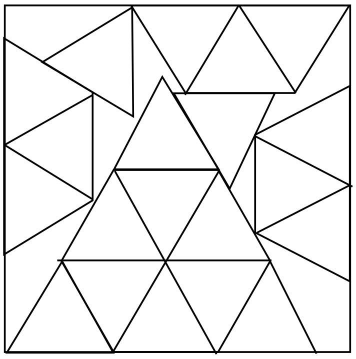
$\boxed{\dfrac{2\left(15-2\sqrt{3}\right)}{71}} \fallingdotseq 0.3249548841$

ｎ＝１９



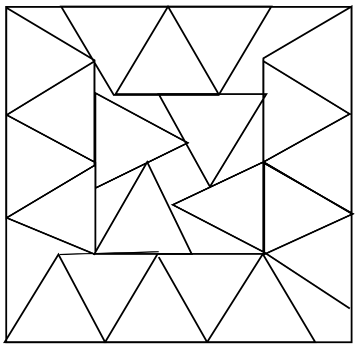
$$\boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{4}} \fallingdotseq 0.3169872981$$

ｎ＝２０



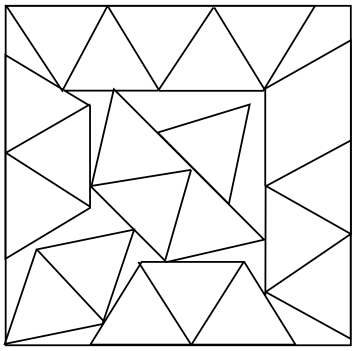
$$\boxed{\frac{5+\sqrt{3}}{22}} \fallingdotseq 0.3060023094$$

ｎ＝２１



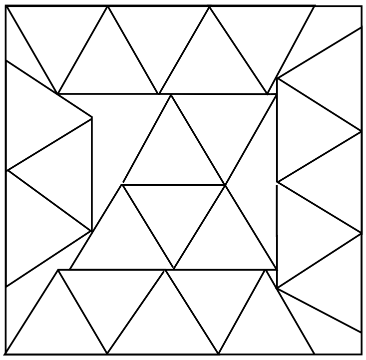
$$\boxed{\frac{5-\sqrt{3}}{11}} \fallingdotseq 0.2970862902$$

ｎ＝２２



$$\boxed{\frac{8\sqrt{3}-9\sqrt{2}-5\sqrt{6}+12}{3}} \fallingdotseq 0.2936785618$$

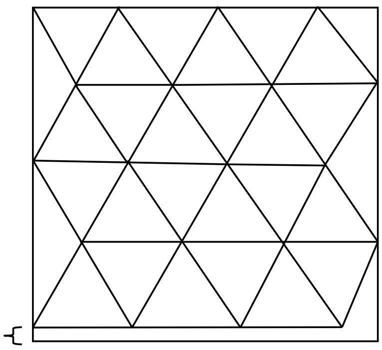
ｎ＝２３



三角形の高さ$=\dfrac{1}{4}$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}} \fallingdotseq 0.2886751346$$

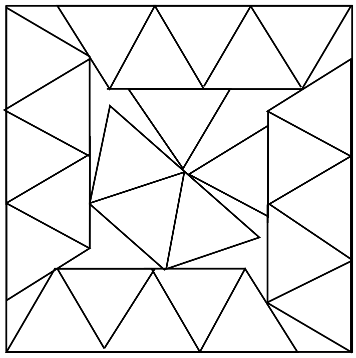
ｎ＝２４



0.01≒

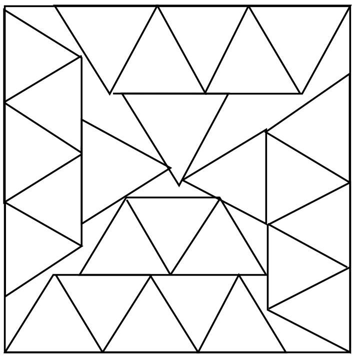
$$\boxed{\frac{2}{7}} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$$

ｎ＝２５

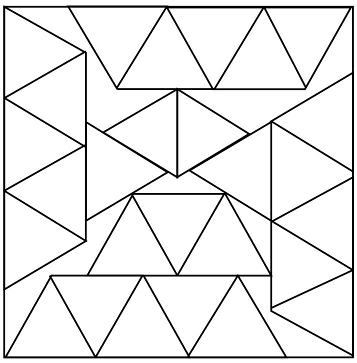


$\boxed{\dfrac{9-\sqrt{3}}{26}} \fallingdotseq 0.2795365074$

ｎ＝２６

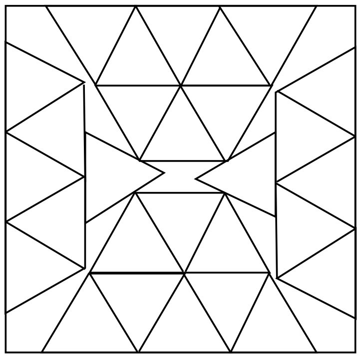


ｎ＝２７



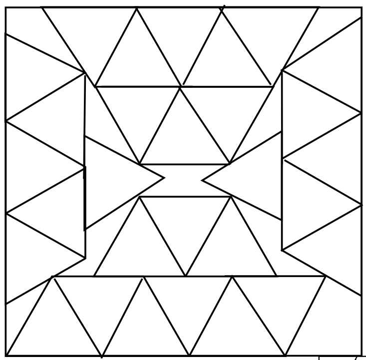
$\boxed{2-\sqrt{3}} \fallingdotseq 0.2679491924$

ｎ＝２８



$\boxed{\dfrac{1+5\sqrt{3}}{37}} \fallingdotseq 0.261087947$

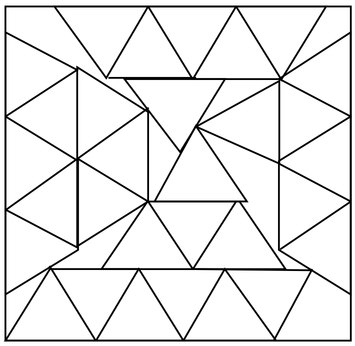
ｎ＝２９



$\boxed{\dfrac{2\left(6-\sqrt{3}\right)}{33}}$

$\fallingdotseq 0.2586635874$

ｎ＝３０



（注）ｎ＝２６、３０のときについては、計算結果が出ていないので、参考資料です。ｎが大きくなるにつれて、計算が極めて困難になってきました。

【参考文献】

別冊サイエンス　数学ゲームⅣ　　マーチン・ガードナー著　日経サイエンス社（1982）
「４．詰めこみ主義」28－34、136　（「正方形の中に正方形を」のパターン）

テーマ２．「棒引きの作戦」

運動会の競技に棒引きがあります．2 つのチーム A，B が 3 本の棒を引き合います．両チームとも何人をどの棒に振り分けるかは予め決めていて，相手の動きによらずその作戦を実行するとし，棒の引っ張り合いでは人数の多いほうが必ず勝ち（同人数のときは引き分け），チームとして勝つのは，より多くの棒で勝った方ということにします．例えば，両チームが 3 人ずつならば，チーム A は 1 本に 1 人ずつ振り分ければ，チーム B がどのように人数を振り分けても負けることはありません．このような作戦を，両チームの人数や棒の数を色々と変えた場合に考えて下さい．

解　説

日本数学コンクール実行委員会委員　鈴木　紀明（名 城 大 学 理 工 学 部　教授）
花薗　　誠（名古屋大学経済学研究科　准教授）

§1. チーム B が無作為に 3 本の棒に人数を割り振る場合
§2. チーム B の個人個人が無作為に棒を選ぶ場合 (実際の運動会はこちら？)
§3. 金賞を受賞した鶴岡祐介さん (四條畷高 3 年) の論文について
§4. ゲーム理論からのアプローチ

問題作成の際に私が想定していた解答例は §2 ですが，そのためにまず §1 を調べます[1]．金賞を受賞した鶴岡祐介さん (四條畷高 3 年) の論文はこれを越えるものです (棒が m 本の場合を考察している！)．その内容は §3 で説明します．最後に，§4 でゲーム理論からの解釈 (の一端) に触れます[2]．なお，問題文では「作戦」と書きましたが，この解説では「戦略」という言葉を使うことにします．

§1. 棒が 3 本で，チーム A, B の人数が n 人の場合を考える．「チーム B が無作為に 3 本の棒に人数を割り振る場合」について，チーム A の最良の戦略を考える．

n 人を 3 つに分けるすべての組を $X(n)$ とします．すなわち，

(1.1)
$$X(n) := \{(x, y, z);\ x, y, z \text{ は非負の整数で } x + y + z = n\}$$

です．このとき，$X(n)$ の要素の個数は $(n + 2)(n + 1)/2$ ですから，

(1.2)　チーム B は $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 通りの中から無作為に 1 組の戦略 (x, y, z) を選ぶことになります．

さて，(x, y, z), $(a, b, c) \in X(n)$ について，

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ が } (a,b,c) \text{ に勝つ} &\iff x > a,\ y > b,\ z > c \text{ のうち 2 つが成り立つ}\\
(x,y,z) \text{ が } (a,b,c) \text{ に負ける} &\iff x > a,\ y > b,\ z > c \text{ のうち 1 つしか成り立たない}\\
(x,y,z) \text{ と } (a,b,c) \text{ は引き分け} &\iff \text{勝ちでも負けでもない}
\end{aligned}$$

です．言い換えると，(x, y, z) と (a, b, c) が引き分けとは，

$$x > a,\ y < b,\ z = c,\quad x < a,\ y > b,\ z = c,\quad x > a,\ y = b,\ z < c,\quad x < a,\ y = b,\ z > c,$$
$$x = a,\ y < b,\ z > c,\quad x = a,\ y > b,\ z < c,\quad x = a,\ y = b,\ z = c$$

のどれかが成り立つことです．さらに，次の記号を使います．

$$\begin{aligned}
W(a,b,c) &:= \{(x,y,z) \in X(n);\ (a,b,c) \text{ が } (x,y,z) \text{ に勝つ}\}\\
L(a,b,c) &:= \{(x,y,z) \in X(n);\ (a,b,c) \text{ が } (x,y,z) \text{ 負ける}\}\\
D(a,b,c) &:= \{(x,y,z) \in X(n);\ (a,b,c) \text{ と } (x,y,z) \text{ は引き分け}\}
\end{aligned}$$

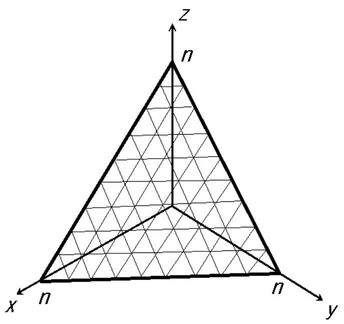
[1] この解説記事を書くにあたり，数値計算と図の作成に関して，愛知工業大学の中村豪先生と名古屋大学研究員の中川勇人さんに助けて頂きました．感謝申し上げます．
[2] ゲーム理論については名古屋大学経済学部の花園誠先生にいろいろと教えて頂きました．感謝申し上げます．

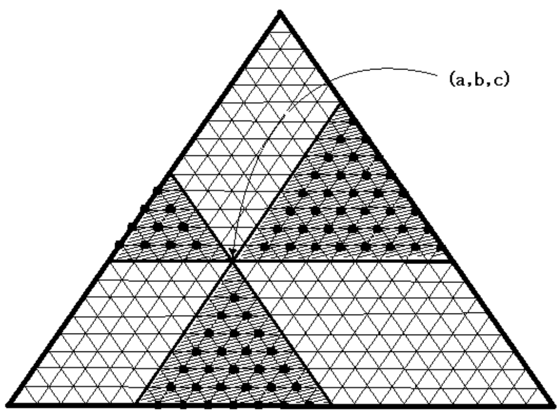
以後，集合 X の要素の個数を $^{\#}X$ と表す.

定理 1. $(a,b,c) \in X(n)$ のとき，次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
{}^{\#}W(a,b,c) &:= ab+bc+ca \\
{}^{\#}L(a,b,c) &:= \frac{a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)}{2} \\
{}^{\#}D(a,b,c) &:= 2n+1
\end{aligned}$$

これは下図から読み取れるでしょう.





斜線部内にある交点が $L(a,b,c)$ に対応している.

定理 2. $(a,b,c) \in X(n)$ のとき，$^{\#}W(a,b,c)$ が最大になるのは

$$\begin{aligned}
n = 3k \text{ のとき } &: (a,b,c) = (k,k,k) \\
n = 3k+1 \text{ のとき } &: a,b,c \text{ のうち 2 つが } \left[\tfrac{3k+1}{3}\right] \text{ で他の 1 つが } \left[\tfrac{3k+1}{3}\right]+1 \\
n = 3k+2 \text{ のとき } &: a,b,c \text{ のうち 1 つが } \left[\tfrac{3k+2}{3}\right] \text{ で他の 2 つが } \left[\tfrac{3k+2}{3}\right]+1
\end{aligned}$$

ここで，$[x]$ はガウスの記号 (x を超えない最大の整数) です.

これらの結果は

(1.3) $$n^2 = (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca) + \frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

から容易に導かれます．よって，チーム B が (1.2) の戦略のとき，チーム A の最良の方法は (a,b,c) を定理 2 のように取ることです．例えば，$n=3k$ のとき，チーム A は (k,k,k) のときに勝つ確率が最も高くなり，その値は

(1.4) $$\frac{^{\#}W(k,k,k)}{^{\#}X(n)} = \frac{2n^2}{3(n+2)(n+1)}$$

です.

§2. チーム B の個人個人が無作為に棒を選ぶ場合 (実際の運動会はこちら？) は，各個人は 3 本の棒のうちの 1 つを自由に選ぶことができるので，選び方の総数は 3^n 通りですから，

(2.1) チーム B は 3^n 通りの中から無作為に 1 組の戦略を選ぶ

場合を考えます．$(x, y, z) \in X(n)$ とする．3 本の棒に割り振る人数が (x, y, z) になるのは

$$\frac{n!}{x!y!z!} \tag{2.2}$$

通りあることに注意すると次がわかります．

定理 3. チーム A の割り振りを $(a, b, c) \in X(n)$ とし，$T(a, b, c)$ を チーム B が チーム A に勝つ場合の全体 (すなわち，A が B に負ける) とする．このとき

$$^{\#}T(a, b, c) = \sum_{(x,y,z)\in L(a,b,c)} \frac{n!}{x!y!z!} \tag{2.3}$$

です[3]．

証明は，定理 1 と (2.2) に注意すればよい．チーム B が (2.1) の場合には，チーム A としての最良の戦略は $^{\#}T(a, b, c)$ を最小にする (a, b, c) を求めることです．

残念ながら，定理 2 のように具体的にこの数を求めることができなかったので，$n = 4, 5, 6, 10$ についての $^{\#}T(a, b, c)$ を計算機を使って計算した結果を記します．

(i) $n = 4$ のとき, チーム B の取りうる戦略の総数は $3^4 = 81$.

$$X(4) = \left\{ \begin{array}{l} (4,0,0),(0,4,0),(0,0,4),(3,1,0),(3,0,1),(1,3,0),(1,0,3),(0,3,1),(0,1,3), \\ (2,2,0),(2,0,2),(0,2,2),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)) \end{array} \right\}$$

(a,b,c)	$L(a,b,c)$	$^{\#}T(a,b,c)$
$(4,0,0)$	$\{(0,3,1),(0,1,3),(0,2,2),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$	50
$(0,4,0)$	$\{(3,0,1),(1,0,3),(2,0,2),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$	50
$(0,0,4)$	$\{(3,1,0),(1,3,0),(2,2,0),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$	50
$(3,1,0)$	$\{(0,3,1),(0,2,2),(1,2,1)\}$	22
$(3,0,1)$	$\{(0,1,3),(0,2,2),(1,1,2)\}$	22
$(1,3,0)$	$\{(3,0,1),(2,0,2),(2,1,1)\}$	22
$(1,0,3)$	$\{(3,1,0),(2,2,0),(2,1,1)\}$	22
$(0,3,1)$	$\{(1,0,3),(2,0,2),(1,1,2)\}$	22
$(0,1,3)$	$\{(1,3,0),(2,2,0),(1,2,1)\}$	22
$(2,2,0)$	$\{(3,0,1),(0,3,1)\}$	8
$(2,0,2)$	$\{(3,1,0),(0,1,3)\}$	8
$(0,2,2)$	$\{(1,3,0),(1,0,3)\}$	8
$(2,1,1)$	$\{(0,2,2)\}$	6
$(1,2,1)$	$\{(2,0,2)\}$	6
$(1,1,2)$	$\{(2,2,0)\}$	6

よって，チーム A は $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$ を選んだときが最良であり，そのときの A が負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1 - \frac{^{\#}T(2,1,1)}{3^4} = 1 - \frac{6}{81} = \frac{25}{27}$$

(ii) $n = 5$ のとき，チーム B の取りうる戦略の総数は $3^5 = 243$.

$$X(5) = \left\{ \begin{array}{l} (5,0,0),(0,5,0),(0,0,5),(4,1,0),(4,0,1),(1,4,0),(1,0,4),(0,4,1),(0,1,4),(3,2,0),(3,0,2), \\ (2,3,0),(2,0,3),(0,3,2),(0,2,3),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2) \end{array} \right\}$$

[3] ここでは A が負ける場合を計算したが，$L(a, b, c)$ の代わりに $W(a, b, c)$ を用いれば A が勝つ場合がわかる．

(a,b,c)	$L(a,b,c)$	${}^{\#}T(a,b,c)$
$(5,0,0)$	$\{(0,4,1),(0,1,4),(0,3,2),(0,2,3),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$	180
$(0,5,0)$	$\{(4,0,1),(1,0,4),(3,0,2),(2,0,3),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$	180
$(0,0,5)$	$\{(4,1,0),(1,4,0),(3,2,0),(2,3,0),(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$	180
$(4,1,0)$	$\{(0,4,1),(0,3,2),(0,2,3),(1,3,1),(2,2,1),(1,2,2)\}$	105
$(4,0,1)$	$\{(0,1,4),(0,3,2),(0,2,3),(1,1,3),(2,1,2),(1,2,2)\}$	105
$(1,4,0)$	$\{(4,0,1),(3,0,2),(2,0,3),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,2)\}$	105
$(1,0,4)$	$\{(4,1,0),(3,2,0),(2,3,0),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,2)\}$	105
$(0,4,1)$	$\{(1,0,4),(3,0,2),(2,0,3),(1,1,3),(2,1,2),(1,2,2)\}$	105
$(0,1,4)$	$\{(1,4,0),(3,2,0),(2,3,0),(1,3,1),(2,2,1),(1,2,2)\}$	105
$(3,2,0)$	$\{(4,0,1),(0,4,1),(0,3,2),(1,3,1)\}$	40
$(3,0,2)$	$\{(4,1,0),(0,1,4),(0,2,3),(1,1,3)\}$	40
$(2,3,0)$	$\{(4,0,1),(0,4,1),(3,0,2),(3,1,1)\}$	40
$(2,0,3)$	$\{(4,1,0),(0,1,4),(3,2,0),(3,1,1)\}$	40
$(0,3,2)$	$\{(1,4,0),(1,0,4),(2,0,3),(1,1,3)\}$	40
$(0,2,3)$	$\{(1,4,0),(1,0,4),(2,3,0),(1,3,1)\}$	40
$(3,1,1)$	$\{(0,3,2),(0,2,3),(1,2,2)\}$	50
$(1,3,1)$	$\{(3,0,2),(2,0,3),(2,1,2)\}$	50
$(1,1,3)$	$\{(3,2,0),(2,3,0),(2,2,1)\}$	50
$(2,2,1)$	$\{(3,0,2),(0,3,2)\}$	20
$(2,1,2)$	$\{(3,2,0),(0,2,3)\}$	20
$(1,2,2)$	$\{(2,3,0),(2,0,3)\}$	20

よって，チーム A は $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ を選んだときが最良であり，そのときの A が負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1-\frac{{}^{\#}T(2,2,1)}{3^5}=1-\frac{20}{243}=\frac{223}{243}$$

(iii) $n=6$ のとき, チーム B の取りうる戦略の総数は $3^6=729$.

$$X(6)=\left\{\begin{array}{l}(6,0,0),(0,6,0),(0,0,6),(5,1,0),(5,0,1),(1,5,0),(1,0,5),(0,5,1),(0,1,5),(4,2,0),\\(4,0,2),(2,4,0),(2,0,4),(0,4,2),(0,2,4),(4,1,1),(1,4,1),(1,1,4),(3,3,0),(3,0,3),\\(0,3,3),(3,2,1),(3,1,2),(2,3,1),(2,1,3),(1,3,2),(1,2,3),(2,2,2)\end{array}\right\}$$

(a,b,c)	${}^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	${}^{\#}T(a,b,c)$
$(6,0,0)$	602	$(4,1,1)$	260
$(0,6,0)$	602	$(4,1,1)$	260
$(0,0,6)$	602	$(1,4,1)$	260
$(5,1,0)$	416	$(3,3,0)$	102
$(5,0,1)$	416	$(3,0,3)$	102
$(1,5,0)$	416	$(0,3,3)$	102
$(1,0,5)$	416	$(3,2,1)$	110
$(0,5,1)$	416	$(3,1,2)$	110
$(0,1,5)$	416	$(2,3,1)$	110
$(4,2,0)$	197	$(2,1,3)$	110
$(4,0,2)$	197	$(1,3,2)$	110
$(2,4,0)$	197	$(1,2,3)$	110
$(2,0,4)$	197	$(2,2,2)$	60
$(0,4,2)$	197		
$(0,2,4)$	197		

よって，チーム A は $(2,2,2)$ を選んだときが最良であり，そのときの A の負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1-\frac{{}^{\#}T(2,2,2)}{3^6}=1-\frac{60}{729}=\frac{223}{243}$$

(iv) $n=10$ のとき, B チームの取りうる戦略の総数は $3^{10}=59049$.

$$X(10)=\left\{\begin{array}{l}(10,0,0),(0,10,0),(0,0,10),(9,1,0),(9,0,1),(1,9,0),(1,0,9),(0,9,1),(0,1,9),\\(8,2,0),(8,0,2),(2,8,0),(2,0,8),(0,8,2),(0,2,8),(8,1,1),(1,8,1),(1,1,8),\\(7,3,0),(7,0,3),(3,7,0),(3,0,7),(0,7,3),(0,3,7),(7,2,1),(7,1,2),(2,7,1),(2,1,7),\\(1,7,2),(1,2,7),(6,4,0),(6,0,4),(4,6,0),(4,0,6),(0,6,4),(0,4,6),(6,3,1),(6,1,3),\\(3,6,1),(3,1,6),(1,6,3),(1,3,6),(6,2,2),(2,6,2),(2,2,6),(5,5,0),(5,0,5),(0,5,5),\\(5,4,1),(5,1,4),(4,5,1),(4,1,5),(1,5,4),(1,4,5),(5,3,2),(5,2,3),(3,5,2),(3,2,5),\\(2,5,3),(2,3,5),(4,4,2),(4,2,4),(2,4,4),(4,3,3),(3,4,3),(3,3,4)\end{array}\right\}$$

(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$
$(10,0,0)$	57002	$(9,1,0)$	51892	$(8,2,0)$	40427	$(7,3,0)$	25322	$(6,4,0)$	12932
$(0,10,0)$	57002	$(9,0,1)$	51892	$(8,0,2)$	40427	$(7,0,3)$	25322	$(6,0,4)$	12932
$(0,0,10)$	57002	$(1,9,0)$	51892	$(2,8,0)$	40427	$(3,7,0)$	25322	$(4,6,0)$	12932
		$(1,0,9)$	51892	$(2,0,8)$	40427	$(3,0,7)$	25322	$(4,0,6)$	12932
		$(0,9,1)$	51892	$(0,8,2)$	40427	$(0,7,3)$	25322	$(0,6,4)$	12932
		$(0,1,9)$	51892	$(0,2,8)$	40427	$(0,3,7)$	25322	$(0,4,6)$	12932
				$(8,1,1)$	46872	$(7,2,1)$	35802	$(6,3,1)$	21882
				$(1,8,1)$	46872	$(7,1,2)$	35802	$(6,1,3)$	21882
				$(1,1,8)$	46872	$(2,7,1)$	35802	$(3,6,1)$	21882
						$(2,1,7)$	35802	$(3,1,6)$	21882
						$(1,7,2)$	35802	$(1,6,3)$	21882
						$(1,2,7)$	35802	$(1,3,6)$	21882
								$(6,2,2)$	26142
								$(2,6,2)$	26142
								$(2,2,6)$	26142

(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$	(a,b,c)	$^{\#}T(a,b,c)$
$(5,5,0)$	8270	$(4,4,2)$	10656
$(5,0,5)$	8270	$(4,2,4)$	10656
$(0,5,5)$	8270	$(2,4,4)$	10656
$(5,4,1)$	12222	$(4,3,3)$	9786
$(5,1,4)$	12222	$(3,4,3)$	9786
$(4,5,1)$	12222	$(3,3,4)$	9786
$(4,1,5)$	12222		
$(1,5,4)$	12222		
$(1,4,5)$	12222		
$(5,3,2)$	15402		
$(5,2,3)$	15402		
$(3,5,2)$	15402		
$(3,2,5)$	15402		
$(2,5,3)$	15402		
$(2,3,5)$	15402		

よって，チーム A は $(4,3,3),(3,4,3),(3,3,4)$ を選んだときが最良であり，そのときの A の負けない (勝つか引き分ける) 確率は

$$1-\frac{^{\#}T(4,3,3)}{3^{10}}=1-\frac{9786}{59049}=\frac{16421}{19683}$$

結果として，これらは [1] の場合と同じ戦略を選ぶことが有利であることがわかり，一般の n でもこの主張が成り立つであろうと予想できますが，確認できていません．

§3. 鶴岡祐介さん (四条畷高 3 年) は棒の本数が $m \geq 3$ の場合の考察を行いました．左端から，棒を $S_1, S_2, \cdots, S_m$ と名付ます．チーム A の戦略が $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ のとき，A が勝つときのチーム B の組み合せの総数を考えます．このとき $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$ であり，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m \geq 0$ としてよい．鶴岡さんは $m=3$ の場合を丁寧に考えて，それをもとにして，次のように一般化させました．

T_k を m 個の数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ から k 個選んで積をとったものの総和とすると，次のように表されます：

$$\prod_{k=1}^{m}(x+a_k) := \sum_{k=0}^{m} T_k x^{m-k} \tag{3.1}$$

つまり，数列 $\{T_k\}$ は m 次式における解と係数の関係の x の k 次の項の係数です．

(i) $m=3$ のとき，勝つのは 2 勝 1 敗です．チーム A が (a_1, a_2, a_3) のときに勝つのは

(1) S_1, S_2 で勝つとき：チーム B の S_1, S_2 の人数は，それぞれ a_1, a_2 未満で，その総数は a_1a_2 通り．

(2) S_2, S_3 で勝つとき：(1) と同様に考えて，その総数は a_2a_3 通り．

(3) S_3, S_1 で勝つとき：(1) と同様に考えて，その総数は a_3a_1 通り．

以上より，チーム A が勝つ組み合わせの総数は $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=T_2$ 通り (§1 の定理 1 の $^{\#}W(a_1.a_2,a_3)$)．

(ii) $m=4$ のとき，勝つのは 3 勝 1 敗または 2 勝 1 敗 1 分です．

(1) チーム A が 3 勝 1 敗のとき (○○○×) 　T_3 通り．

(2) チーム A が 2 勝 1 敗 1 分のとき (○○×−)　×と − の順序を考慮して $2T_2$ 通り．
以上より，$m=4$ のときチーム A が勝つ組み合わせの総数は T_3+2T_2 通り．

(ii) $m=5$ のとき，勝つのは以下のときです．
(1) チーム A が 4 勝 1 敗のとき (○○○○×)　T_4 通り．
(2) チーム A が 3 勝 2 敗のとき (○○○××)　T_3 通り．
(3) チーム A が 3 勝 1 敗 1 分のとき (○○○×−)　$2T_3$ 通り．
(2) チーム A が 2 勝 1 敗 2 分のとき (○○×−−)　$3T_2$ 通り．
以上より，$m=5$ のときチーム A が勝つ組み合わせの総数は $T_4+3T_3+3T_2$ 通り．

同様にして，棒 m 本に対してチーム A が勝つ組み合わせの総数は次のように表されます．

棒の本数	勝つ組み合わせの総数
3	T_2
4	T_3+2T_2
5	$T_4+3T_3+3T_2$
6	$T_5+3T_4+6T_3+4T_2$
7	$T_6+3T_5+7T_4+10T_3+5T_2$
$\cdots$	$\cdots$

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$ より，

(3.2)
$$T_k \leq \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a_1^k$$

であり，等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_m$ のときであり，要素 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の分散が小さいほど，数列 T_k は大きくなり，勝つ組み合わせは増加します．つまり，チーム B が無作為に人数を割り振るとき，勝つ確率を上げためには n 人をできるだけ均等に各棒に割り振ればよいことになります．

さらに鶴岡さんはチーム A が負ける場合の組み合わせの総数も求めています．詳細は省いて結果だけを記します．数列 $\{K_{p,q}\}$ を以下で定義する．これは，チーム A が p 勝 q 敗 $m-p-q$ 分となる組み合わせの総数です．(p, q は自然数，$1 \leq p < q \leq m-p$, $i_1, i_2, \cdots, i_p$ は自然数で $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p \leq m$)．チーム A が $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ のとき

(3.3)
$$K_{p,q} := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq m} \begin{pmatrix} a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p} \\ q \end{pmatrix}$$

このとき，チーム A が負ける組み合わせの総数は
(i) $m=3$ のとき $K_{1,2}$ 通り
(ii) $m=4$ のとき $K_{1,3}+3K_{1,2}$ 通り
(iii) $m=5$ のとき　$K_{1,4}+4K_{1,3}+6K_{1,2}+K_{2,3}$ 通り
さらに，次の数列 $\{L_p\}$ を定義する：

(3.4)
$$L_p := \sum_{q=p+1}^{m-p} \begin{pmatrix} m-p \\ q \end{pmatrix} K_{p,q}$$

これは，チーム A が p 勝で負ける組み合わせの総数を表しています．この L_p を使うと，チーム A が負ける組み合わせの総数は $m=3$ のとき L_1, $m=4$ のとき L_1, $m=5$ のとき L_1+L_2 となり，棒が m 本のときチーム A が負ける組み合わせの総数は

(3.5)
$$\sum_{p=1}^{[(m-1)/2]} L_p$$

で与えられます ($[\cdot]$ はガウス記号)．

鶴岡さんは，具体例として $m=4, n=9$ の場合にチーム A の取りうる組み合わせとその勝敗の表を与えています．

(a_1, a_2, a_3, a_4)	勝	負	分
$(9,0,0,0)$	0	192	28
$(8,1,0,0)$	16	140	64
$(7,2,0,0)$	28	101	91
$(7,1,1,0)$	37	101	85
$(6,3,0,0)$	36	75	109
$(6,2,1,0)$	52	68	100
$(6,1,1,1)$	61	65	94
$(5,4,0,0)$	40	62	118
$(5,3,1,0)$	61	50	109
$(5,2,2,0)$	68	46	106
$(5,2,1,1)$	77	43	100
$(4,4,1,0)$	64	50	109
$(4,3,2,0)$	76	29	115
$(4,3,1,1)$	85	26	109
$(4,2,2,1)$	92	28	100
$(3,3,3,0)$	81	30	109
$(3,3,2,1)$	97	23	100
$(3,2,2,2)$	104	13	103

§4. チーム B が無作為でなくてチーム A と同じように戦略を考えて来た場合にはどうすればよいでしょうか？鶴岡さんの論文もこの点に少し触れていますが，ここでは，花園先生 (名大・経済) に教えて頂いたゲーム理論からのアプローチを考えてみます[4]．

$n=m=3$ の場合をもう一度振り返ってみましょう．§1 での考察は，チーム B が (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,1,2), (0,2,1), (1,1,1) の 10 通りの中から無作為に戦略を選んだとすると，チーム A の取るべき最良の戦略は (1,1,1) ということでした．くどいようですがこれを表に表わしてみます．勝敗はチーム B から見たものです．

縦 B, 横 A	$(3,0,0)$	$(0,3,0)$	$(0,0,3)$	$(2,1,0)$	$(2,0,1)$	$(1,2,0)$	$(1,0,2)$	$(0,1,2)$	$(0,2,1)$	$(1,1,1)$
$(3,0,0)$	分	分	分	分	分	分	分	負	負	負
$(0,3,0)$	分	分	分	分	負	分	負	分	分	負
$(0,0,3)$	分	分	分	負	分	負	分	分	分	負
$(2,1,0)$	分	分	勝	分	分	分	勝	分	負	分
$(2,0,1)$	分	勝	分	分	分	勝	分	負	分	分
$(1,2,0)$	分	分	勝	分	負	分	分	勝	分	分
$(1,0,2)$	分	勝	分	負	分	分	分	分	勝	分
$(0,1,2)$	勝	分	分	分	勝	負	分	分	分	分
$(0,2,1)$	勝	分	分	勝	分	分	負	分	分	分
$(1,1,1)$	勝	勝	勝	分	分	分	分	分	分	分

これを見ると，チーム B は (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3) を選ぶと勝つことはできません．従って，チーム B が勝つための戦略を考えたとすれば，これらを選ぶことはありえません．チーム A もこれらを選ぶことはないので，それを除いた表を作ってみます．

縦 B, 横 A	$(2,1,0)$	$(2,0,1)$	$(1,2,0)$	$(1,0,2)$	$(0,1,2)$	$(0,2,1)$	$(1,1,1)$
$(2,1,0)$	分	分	分	勝	分	負	分
$(2,0,1)$	分	分	勝	分	負	分	分
$(1,2,0)$	分	負	分	分	勝	分	分
$(1,0,2)$	負	分	分	分	分	勝	分
$(0,1,2)$	分	勝	負	分	分	分	分
$(0,2,1)$	勝	分	分	負	分	分	分
$(1,1,1)$	分	分	分	分	分	分	分

[4]これは私が理解した範囲に限って記したもので，本来のゲーム理論のほんの入り口です．さらに，私が誤解していることもあるかもしれませんがご容赦下さい．

この表を見ると，(1,1,1) が最良とは言えません． 勝 1，負 −1, 分 0 と点数化すれば，7 通りの戦略はどれも同じになります．この事実をゲーム理論の立場から見てみましょう．

戦略型 (非協力) ゲームは，プレーヤー，戦略，利得の 3 つの要素から構成されます．ゲーム理論は，対戦相手がどのような戦略を選ぶかを合理的に考えて，最適な戦略を見つけることです．考え方として，(1) 各プレーヤーにとって劣位な戦略があれば逐次消去する．(2) 各プレーヤーが自己利得を最大化するように戦略を選び，自分の予想と他者の選択が一致している均衡状態をナッシュ均衡と言います．

棒引きの問題に戻ります．プレーヤーは 2 つのチーム A, B です．これまで，戦略としては §1 で (1.2) , §2 では (2.1) を考えました．3 人を 3 組に分けるパターンは (3,0,0), (2,1,0), (1,1,1) です．これらに順序を入れて (1.2) では 10 通りを考えてきましたが，(3,0,0) の 3 通りと (2,1,0) の 6 通りはそれぞれ同じ状況になっています．このことから，花園先生は

(4.1) 人数の組み合わせだけを決めて，どこに配置するかはランダムにする

ことを「戦略」と考えることを提案されました．以後は，戦略としてはこれを考えることにします．逐次消去で劣位な戦略 (3,0,0) を消去して，前述の表を，この戦略で書き換えてみると

縦 B, 横 A	$(2,1,0)$	$(1,1,1)$
$(2,1,0)$	$1/6, 1/6$	$0, 0$
$(1,1,1)$	$0, 0$	$0, 0$

縦 B, 横 A	$(2,1,0)$	$(1,1,1)$
$(2,1,0)$	0	0
$(1,1,1)$	0	0

ここで，左表は，チーム A が (2,1,0)，チーム B が (2,1,0) のときは，どの順列を取っても 1 勝 1 敗 4 分なので，B が勝つ確率 1/6，B が負ける (A が勝つ) 確率 1/6 の意味です．チーム A が (2,1,0)，チーム B が (1,1,1) のときはどの順列でも 6 分なので 0,0 です．右図は勝 1，負 −1, 分 0 と点数化したときで，値はすべて 0 です．この場合は A, B の戦略として，それぞれが，(2,1,0), (1,1,1) のどれを取ったとしても全てナッシュ均衡になっています (ナッシュ均衡が 4 通りある).

以上の考察を $n = 4, m = 3$ でも考えてみましょう．このときの戦略のパターンは (4,0,0), (3,1,0), (2,2,0), (2,1,1) の 4 通りです．劣位の戦略の (4,0,0) を消去して，2 つの表を作ると

縦 B, 横 A	$(3,1,0)$	$(2,2,0)$	$(2,1,1)$
$(3,1,0)$	$1/6, 1/6$	$1/3, 1/3$	$0, 1/3$
$(2,2,0)$	$1/3, 1/3$	$0, 0$	$1/3, 0$
$(2,1,1)$	$1/3, 0$	$0, 1/3$	$0, 0$

縦 B, 横 A	$(3,1,0)$	$(2,2,0)$	$(2,1,1)$
$(3,1,0)$	0	0	$-1/3$
$(2,2,0)$	0	0	$1/3$
$(2,1,1)$	$1/3$	$-\frac{1}{3}$	0

これから，ナッシュ均衡 (互いに戦略を変えない方が損をしない状態) は A, B とも $(2, 2, 0)$ とした場合になります.[5] 私の理解はここまでです[6].

[5] これはゲーム理論からの帰結ですが，少し説明を加えます．チーム B が (2,2,0) の順列なら チーム A が (2,1,1) のどの順列の場合でも B の 1 勝 2 分で，A は勝てません．では，なぜ §1 では (2,1,1) が最良であったのか？これは (2,1,1) が順序を考慮した (3,0,0) にいつも勝つからです．§1 で (2,1,1) を有利にした要素 (3,0,0) を §4 では除いて考えているので， (2,1,1) の有利さが減少したのです．さらに，直感的な理屈を付け足すと，棒が 3 本のときは必ず 1 敗をしますが，もっとも効率良く" 負ける" のは，その棒に一人も行かないことです．(2,1,1) で勝つ場合には無駄な一人がいますが，(2,2,0) で勝てば無駄がありません．この考えでは (3,1,0) も無駄はありませが，他との対戦結果から棄却されます.

[6] 上記の考察では右表からナッシュ均衡を求めていますが，同じ内容の左表からも同じ結論が得られるのかが疑問でした．その点について花園先生に明快に答えて頂きました.「左表はゲーム理論で用いられる利得表と関連させようとすると誤解を招きます．左表はあくまで「勝つ確率」であり,「利得」ではないからです．利得と見なすなら，勝ち 1 点，負けと引き分け 0 点の場合と考えられるが，この時はゼロ和ゲームでなくなり，分析も異なります．左表でのナッシュ均衡は (2,1,0) を取り合うことになります．(1,1,1) では勝てないので，勝てる可能性が少しでもある (2,1,0) の方がよいという理屈です．4 人の場合の左表のナッシュ均衡は (2,2,0)，(3,1,0) の組み合わせになります」．さらに．花園先生から頂いた資料によると，$n = 5$ のときは，両者が (3,2,0)，$n = 6$ のときは両者が (4,2,0) の戦略としたときがナッシュ均衡です．興味深いことは $n = 7$ のときはナッシュ均衡は存在しないとのことです．花園先生ありがとうございます.

この考えを類推すると，$n = 30$ のときの最良の戦略は $(10, 10, 10)$ でも $(15, 15, 0)$ でもはなくて $(20, 10, 0)$ のような気がしますが，確認できていません．花園先生助けて下さい.

テーマ３．「自由課題」

解　説

日本数学コンクール実行委員会委員　伊師　英之（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
宇澤　　達（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）

論文賞銀賞を受賞した鈴木拓磨君，富井海斗君，平井晧陽君，藤田源翔君，山崎雅貴君（いずれも長野県立飯山高校３年）の論文「オイラー関数を含むある方程式の解法について」では，オイラー余関数およびオイラー余陪関数の高次評価を証明し，それを応用してオイラー関数を含むいくつかの方程式の解を与えました．オイラー余（陪）関数の高次評価は飯高茂氏による３次の評価を拡張した形をしていますが，単なる一般化にとどまらず組織的に考察を深めたもので，結果の面白さだけではなく，研究をすすめるスタイルも評価できます．

同じく論文賞銀賞を受賞した山口颯仁君（佐賀県立佐賀西高校３年）の論文「最短経路」では，与えられた点を結ぶ最短経路を見つけるというシュタイナー問題に対して色々なアプローチから考察を進めました．６年間にわたる研究の集大成として，石鹸膜が極小曲面を張ることを利用してシュタイナー問題の解を物理的に与えたり，モジホコリの行動が最短経路をなすという通説に対して反証を与えるなど，様々な実験を工夫し，数学だけにとどまらないスケールの大きい研究を展開したことは大変素晴らしいことです．

論文賞銅賞を受賞した勝田宗平君（岐阜県立恵那高校３年）の論文「５辺国の可約性について」は五色問題のケンプによる証明を改良して四色問題のコンピュータを使わない証明を与えることを目指し，考察をすすめました．困難と思われる問題に果敢に挑戦し，独自の成果を出したことは素晴らしいことです．図を丁寧に描くなどして込み入った議論を分かりやすくする工夫を凝らしたことも評価できます．

同じく論文賞銅賞を受賞した山崎豪士君（筑波大学附属駒場高校２年）の論文「水でπを近似する」では，正規分布が二項分布の極限であることに着想を得て，二項係数および他項係数のある種の極限として円周率を表す美しい公式を得ました．級数や無限積の諸公式を手際よく取り扱う技量は目を見張るものでした．

論文賞ジュニア部門を受賞した吉松更紗さん，野呂静流さん，西村奏音さん，猪瀬陽佳さん（いずれも桜蔭中学１年）の論文「オイラーの多面体定理は本当に正しいのか」では，穴の開いた立体についてはオイラーの多面体定理が成り立つとは限らないことを，例を挙げて実証しました．そのような面白い例を見出したことは大変重要で，これを出発点にしてどのように議論を発展させるか，今後の研究が楽しみです．

今年度はレベルの高い自由課題の論文がとくに沢山提出されました．惜しくも受賞には至りませんでしたが，石床悠人君（大阪府立生野高校２年）「３を底に持つ完全数の特徴付け」，奥田雄也君，阿部航大君，酒井実季穂さん，阪本舞香さん（いずれも名古屋市立向陽高校３年）「素数判

定と素数生成多項式」，網矢彪君，伊藤雅起君，大内翔太郎君，福本怜生さん（いずれも愛媛県立松山南高校３年）「ルーローの三角形の数式的考察」，大坪遼士郎君（筑波大学附属駒場高校２年）「ビュフォンの針」，山西博雅君（筑波大学附属駒場高校２年）「道順問題における`“抵抗率”について」林由翔君（筑波大学附属駒場高校２年）「高速道路の合流部における渋滞のシミュレーション」は，いずれも問題の着想に見るべきものがありました．さらに自由に発想を広げて研究を進められることを期待します.

4. 受賞者一覧

第28回日本数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大賞（1名）

SS-53	兒玉 太陽	愛知県	海陽中等教育学校	高1	3,4

優秀賞（3名）

SS-12	久富 一輝	岐阜県	岐阜県立大垣東高等学校	高3	1
SS-44	酒井 優希	愛知県	滝高等学校	高3	2,3,5
SS-54	星野 泰佑	愛知県	東海高等学校	高1	1,3,4

優良賞（6名）

SS-2	宇佐美 友那	東京都	桜蔭高等学校	高2	1,2,3
SS-8	浅沼 英樹	愛知県	東海高等学校	高1	2,3
SS-9	熊谷 光剛	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	高1	2,3
SS-20	松下 紗也輝	愛知県	愛知県立明和高等学校	高3	2,3
SS-29	山内 一輝	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	1,3
OSS-12	小山 宗晃	大阪府	大阪府立四條畷高等学校	高2	2,3

奨励賞（7名）

SS-5	増田 和俊	愛知県	愛知県立旭丘高等学校	高1	3
SS-21	藤澤 勇太	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	2
SS-22	西川 寛人	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	1,3
SS-27	杉山 昇大	愛知県	愛知県立明和高等学校	高2	2,3
SS-43	市川 景也	愛知県	愛知県立一宮興道高等学校	高2	3
SS-58	宮田 哲	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	2
OSS-8	安藤 智紀	大阪府	大阪府立大手前高等学校	高2	3,4

＊問題　1. 映画館の設計　2. 最短経路で往復　3. パスカルとフラクタル
4. あなたはデザイン事務所の事務担当　5. 変形make10

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第28回日本数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞（1組）

SG-9	チームカピバラ	川久保　隼	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高1	3
		佐々木　慎太朗	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高1	
		廣瀬　悟大	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高1	
		木村　敏樹	神奈川県	鎌倉学園高等学校	高1	

優秀賞（3組）

SG-16	ナン	新井　一希	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	2,3
		高野　淳	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
		梅田　智華子	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
		野田　結愛	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
TSG-12	たくうみ	辻　竜聖	三重県	三重県立伊勢高等学校	高2	1,2,3
		佐々木　拓海	三重県	三重県立伊勢高等学校	高2	
		矢田　健太	三重県	三重県立伊勢高等学校	高2	
		中村　太陽	三重県	三重県立伊勢高等学校	高1	
FSG-1	サワシード	澤﨑　遥夏	福井県	福井県立藤島高等学校	高1	3
		高野　準也	福井県	福井県立藤島高等学校	高1	
		寺田　博昭	福井県	福井県立藤島高等学校	高1	
		小林　恒	福井県	福井県立藤島高等学校	高1	

優良賞（3組）

SG-4	れっつ！いんてぐらる！	西尾　七海	三重県	暁中学校・高等学校	高3	2
		伊藤　咲良	三重県	暁中学校・高等学校	高3	
		川村　梨彩子	三重県	暁中学校・高等学校	高3	
		山川　桃佳	三重県	暁中学校・高等学校	高3	
SG-14	リカ嬢	残華　宏和	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	2
		甲斐　史菜	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
		平野　誠一	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
		坂番　祥美香	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
TSG-7	馬酔木	佐藤　希宏	三重県	高田高等学校	高2	3
		山本　陸斗	三重県	高田高等学校	高2	

奨励賞（4組）

SG-15	STEAM　1	河原　杏莉	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	1,5
		小川　詩乃	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
		安藤　悠介	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
		堀江 孝文	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	高2	
TSG-8	ダブルミニオンズ	渡邊　莉絵	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	4
		長井　有沙	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
TSG-9	Clever Girls	小坂　恵里奈	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	3
		栗原　優奈	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
		倉田　真彩	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
		野田　彩音	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	高2	
HSG-1	智辯学園	岡本　卓巳	奈良県	智辯学園高等学校	高2	3
		小西　健斗	奈良県	智辯学園高等学校	高2	
		三船　裕輝	奈良県	智辯学園高等学校	高2	
		森田　大智	奈良県	智辯学園高等学校	高2	

＊問題　1．映画館の設計　2．最短経路で往復　3．パスカルとフラクタル
4．あなたはデザイン事務所の事務担当　5．変形make10

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第21回日本ジュニア数学コンクール【個人戦】受賞者一覧

大　賞(1名)

JS-2	岡林　生夫	東京都	筑波大学附属駒場中学校	中3	1,2,3,5

優秀賞(4名)

JS-10	神垣　朱里	東京都	雙葉小学校	小5	1
JS-15	三宅　智史	愛知県	東海中学校	中1	1,2,3
FJS-1	森山　和	富山県	富山大学人間発達科学部附属中学校	中2	1,2,3
OJS-2	猪倉　彼方	東京都	筑波大学付属駒場中学校	中2	1,3,5

優良賞(3名)

JS-3	野呂　静流	東京都	桜蔭中学校	中1	1,3,5
JS-5	藤倉　賢尚	神奈川県	栄光学園中学校	中3	1,3
JS-7	並木　俊輔	東京都	開成中学校	中2	1,3

奨励賞(5名)

JS-14	横山　玄英	愛知県	東海中学校	中1	5
JS-18	井上　聡士	愛知県	名古屋市立神丘中学校	中2	3
JS-19	林　優花	愛知県	豊川市立南部中学校	中1	5
JS-20	富山　理月	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	中2	4
OJS-1	幡鎌　太郎	愛知県	海陽中等教育学校	中2	4

＊問題　1. 係と席替え　 2. 最短経路で往復　 3. パスカルとフラクタル
4. あなたはデザイン事務所の事務担当　 5. 変形make10

表記は次の順にしてあります。参加番号、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第21回日本ジュニア数学コンクール【団体戦】受賞者一覧

大賞（1組）

JG-11	東海中3	渡辺　空一翔	愛知県	東海中学校	中3	1,3,5
		柳　健大	愛知県	東海中学校	中3	
		田中　梨太郎	愛知県	東海中学校	中3	
		中根　敦久	愛知県	東海中学校	中3	

優秀賞（2組）

TJG-2	Departure	石河　圭太	三重県	津市立橋北中学校	中3	3,5
		宮崎　奨佑太	三重県	津市立橋北中学校	中3	
		西山　颯	三重県	津市立橋北中学校	中3	
		廣野　航輝	三重県	津市立橋北中学校	中3	
TJG-3	セントヨゼフ	奥山　咲笑	三重県	セントヨゼフ女子学園中学校	中3	1,2,4
		樋口　実波	三重県	セントヨゼフ女子学園中学校	中3	
		牛場　日菜乃	三重県	セントヨゼフ女子学園中学校	中3	
		内田　裕菜	三重県	セントヨゼフ女子学園中学校	中3	

優良賞（5組）

JG-23	私の名前は言えない	沖　柚歩	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	3
		杉野　愛莉	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	
		直原　志織	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	
JG-26	R・H	寺田　博怜	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	3
		藤原　龍一	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	
JG-29	Uuu	山﨑　みどり	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	1,3
		神田　雪絵	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	
		高増　有花	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中3	
JG-67	名大附属中3チーム1	大山　世來	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	中3	1,2
		栗本　陽菜	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	中3	
		中島　隆之介	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	中3	
		酒井　幹太	愛知県	名古屋大学教育学部附属中・高等学校	中3	
TJG-4	高中グループ	飯田　美乃里	三重県	高田中学校	中2	3,5
		宮口　紗良	三重県	高田中学校	中2	
		前川　陽香	三重県	高田中学校	中2	
		枚本　菜緒	三重県	高田中学校	中2	

奨励賞（2組）

JG-1	レグルス	丹羽　凌大	愛知県	南山国際中学校	中2	2
		胡井　琢磨	愛知県	南山国際中学校	中2	
		尾藤　樹	愛知県	南山国際中学校	中2	
JG-36	さっちゃん	山口　怜威	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中2	2
		小山　遼	三重県	鈴鹿中学校・高等学校	中2	

＊問題　1. 係と席替え　2. 最短経路で往復　3. パスカルとフラクタル
4. あなたはデザイン事務所の事務担当　5. 変形make10

表記は次の順にしてあります。参加番号、チーム名、氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象の問題。

第18回日本数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

鶴岡 祐介	大阪府	大阪府立四條畷高等学校	3年	棒引きの作戦

銀賞

鈴木 拓磨 富井 海斗 平井 皓陽 藤田 源翔 山﨑 雅貴	長野県	長野県飯山高等学校	3年 共著5名	オイラー関数を含むある方程式の解法について
山口 颯仁	佐賀県	佐賀県立佐賀西高等学校	3年	最短経路

銅賞

内田 翔	大阪府	大阪市立咲くやこの花高等学校	3年	あなたはデザイン事務所の事務担当
勝田 宗平	岐阜県	岐阜県立恵那高等学校	3年	5辺国の可能性について
鄭 従真 中満 悠人	奈良県	奈良工業高等専門学校	3年 共著2名	棒引きの作戦
石井 秀俊 櫻井 徳吾 丹羽 雄哉	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	2年 共著3名	正三角形の詰め込み
山崎 豪士	東京都	筑波大学附属駒場高等学校	2年	水でπを近似する

第18回日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧

金賞

該当者なし

銀賞

該当者なし

銅賞

石堀 朝陽	東京都	筑波大学附属駒場中学校	2年	棒引きの作戦
野呂 静流 吉松 更紗 西村 奏音 猪瀬 陽佳	東京都	桜蔭中学校	1年 共著4名	オイラーの多面体定理は本当に正しいのか

＊テーマ 1. 正三角形の詰め込み 2. 棒引きの作戦棒引きの作戦
3. 自由課題 4. 感想戦

表記は次の順にしてあります。 氏名、所在県名、所属校名、学年、表彰対象のテーマ。

5. 日本数学コンクール参加状況

第28回日本数学コンクール参加状況一覧　個人戦　　　参加数　75

会場	地域	学校所在地	性別	高校生						計	
				1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	15	18	15	16	4	5	34	39
			女	3		1		1		5	
		岐阜	男	1	1	5	5	2	2	8	8
			女	0		0		0		0	
		三重	男	1	1	0	0	1	2	2	3
			女	0		0		1		1	
		静岡	男	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	関東	東京	男	1	2	0	1	0	1	1	4
			女	1		1		1		3	
	小計		男	**18**	**22**	**20**	**22**	**7**	**10**	**45**	**55**
			女	**4**		**2**		**3**		**9**	
津高校	中部	三重	男	0	0	2	3	0	0	2	3
			女	0		1		0		1	
	小計		男	**0**	**0**	**2**	**3**	**0**	**0**	**2**	**3**
			女	**0**		**1**		**0**		**1**	
大手前高校	近畿	大阪	男	2	2	7	7	2	2	11	11
			女	0		0		0		0	
		兵庫	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
		奈良	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	**4**	**4**	**7**	**7**	**2**	**2**	**13**	**13**
			女	**0**		**0**		**0**		**0**	
橋本市	近畿	和歌山	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
		大阪	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
		奈良	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	**3**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3**	**3**
			女	**0**		**0**		**0**		**0**	
福井大学	中部	福井	男	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0		0		0		0	
	小計		男	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
			女	**0**		**0**		**0**		**0**	
合計			男	**23**	**27**	**29**	**32**	**9**	**12**	**61**	**75**
			女	**4**		**3**		**3**		**10**	

第28回日本数学コンクール参加状況一覧　団体戦

参加数　149

会場	地域	学校所在地	性別	高校生 1年		2年		3年		計	
名古屋大学	中部	愛知	男	8	9	14	27	0	0	22	36
			女	1		13		0		14	
		岐阜	男	2	4	5	5	0	0	7	9
			女	2		0		0		2	
		三重	男	3	10	9	11	0	4	12	25
			女	7		2		4		13	
	関東	神奈川	男	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**17**	**27**	**28**	**43**	**0**	**4**	**45**	**74**
			女	**10**		**15**		**4**		**29**	
津高校	中部	三重	男	3	3	27	36	0	0	30	39
			女	0		9		0		9	
	小計		**男**	**3**	**3**	**27**	**36**	**0**	**0**	**30**	**39**
			女	**0**		**9**		**0**		**9**	
大手前高校	近畿	大阪	男	5	8	0	0	0	0	5	8
			女	3		0		0		3	
		奈良	男	0	0	0	2	2	2	2	4
			女	0		2		0		2	
	中国	岡山	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	九州	熊本	男	0	0	0	0	2	2	2	2
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**5**	**8**	**4**	**6**	**4**	**4**	**13**	**18**
			女	**3**		**2**		**0**		**5**	
橋本市	近畿	和歌山	男	9	10	0	0	0	0	9	10
			女	1		0		0		1	
		奈良	男	0	0	4	4	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**9**	**10**	**4**	**4**	**0**	**0**	**13**	**14**
			女	**1**		**0**		**0**		**1**	
福井大学	中部	福井	男	4	4	0	0	0	0	4	4
			女	0		0		0		0	
	小計		**男**	**4**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**	**4**
			女	**0**		**0**		**0**		**0**	
合計			**男**	**38**	52	**63**	89	**4**	8	**105**	149
			女	**14**		**26**		**4**		**44**	

第28回日本数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学校名
愛知県	愛知県立千種高等学校
	愛知県立五条高等学校
	愛知県立旭丘高等学校
	東海高等学校
	名古屋高等学校
	愛知県立瑞陵高等学校
	愛知県立明和高等学校
	愛知県立一宮興道高等学校
	滝高等学校
	愛知県立高蔵寺高等学校
	愛知県立豊橋南高等学校
	愛知県立一宮高等学校
	海陽中等教育学校
	名古屋大学教育学部附属高等学校
	愛知県立半田高等学校
	愛知県立西春高等学校
	愛知県立時習館高等学校
岐阜県	岐阜県立大垣東高等学校
	岐阜県立恵那高等学校
	岐阜県立斐太高等学校
	岐阜県立多治見北高等学校
東京都	桜蔭高等学校
	國學院高等学校
	筑波大学附属駒場高等学校
静岡県	静岡県立浜松北高等学校

学校所在都道府県	学校名
三重県	三重県立四日市高等学校
	鈴鹿高等学校
	高田高等学校
	三重県立相可高等学校
	暁高等学校
	三重県立津高等学校
	三重県立松阪高等学校
	三重県立伊勢高等学校
神奈川県	鎌倉学園高等学校
大阪府	大阪星光学院高等学校
	大阪市立咲くやこの花高等学校
	大阪府立大手前高等学校
	大阪府立四條畷高等学校
	近畿大学附属高等学校
奈良県	東大寺学園高等学校
	智辯学園高等学校
	奈良工業高等専門学校
兵庫県	灘高等学校
和歌山県	和歌山県立橋本高等学校
	高野山高等学校
	初芝橋本高等学校
岡山県	岡山県立津山高等学校
熊本県	熊本県立熊本北高等学校
福井県	敦賀気比高等学校
	福井県立藤島高等学校

第21回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　個人戦

参加数　28

会場	地域	学校所在地	性別	小学生		中学生						計	
				5年	6年	1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	0	0	4	5	3	3	1	1	8	9
			女	0	0	1		0		0		1	
		岐阜	男	0	0	1	1	1	1	0	0	2	2
			女	0	0	0		0		0		0	
		三重	男	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	関東	東京	男	0	0	0	1	1	2	1	1	2	5
			女	1	0	1		1		0		3	
		神奈川	男	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
		千葉	男	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
			女	0	0	1		0		0		1	
	小計		男	**0**	**0**	**6**	**9**	**5**	**6**	**3**	**3**	**14**	**19**
			女	**1**	**0**	**3**		**1**		**0**		**5**	
大手前高校	中部	愛知	男	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	関東	東京	男	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
		群馬	男	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**3**	**3**
			女	**0**	**0**	**0**		**0**		**0**		**0**	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	1	1	1	0	1	1	1	3	4
			女	0	0	0		1		0		1	
		奈良	男	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**1**	**1**	**1**	**4**	**5**
			女	**0**	**0**	**0**		**1**		**0**		**1**	
福井大学	中部	富山	男	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
			女	0	0	0		0		0		0	
	小計		男	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
			女	**0**	**0**	**0**		**0**		**0**		**0**	
合計			男	**0**	**2**	**8**	**14**	**8**	**10**	**4**	**4**	**22**	**28**
			女	**1**	**0**	**3**		**2**		**0**		**6**	

第21回日本ジュニア数学コンクール参加状況一覧　団体戦　　　参加数　266

会場	地域	学校所在地	性別	中学生						計	
				1年		2年		3年			
名古屋大学	中部	愛知	男	23	37	31	61	48	61	102	159
			女	14		30		13		57	
		岐阜	男	0	0	8	15	0	0	8	15
			女	0		7		0		7	
		三重	男	0	0	2	6	21	42	23	48
			女	0		4		21		25	
	小計		男	23	37	41	82	69	103	133	222
			女	14		41		34		89	
津高校	中部	三重	男	2	2	11	23	8	12	21	37
			女	0		12		4		16	
	小計		男	2	2	11	23	8	12	21	37
			女	0		12		4		16	
大手前高校	近畿	大阪	男	0	0	0	0	3	3	3	3
			女	0		0		0		0	
	小計		男	0	0	0	0	3	3	3	3
			女	0		0		0		0	
橋本市	近畿	和歌山	男	0	4	0	0	0	0	0	4
			女	4		0		0		4	
	小計		男	0	4	0	0	0	0	0	4
			女	4		0		0		4	
合計			男	25	43	52	105	80	118	157	266
			女	18		53		38		109	

第21回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学校名
愛知県	名古屋市立川名中学校
	東海中学校
	名古屋市立神丘中学校
	名古屋大学教育学部附属中学校
	名古屋市立平田中学校
	名古屋市立鎌倉台中学校
	椙山女学園中学校
	稲沢市立大里中学校
	小牧市立光ヶ丘中学校
	瀬戸市立品野中学校
	豊川市立南部中学校
	海陽中等教育学校
	蒲郡市立大塚中学校
	扶桑町立扶桑中学校
	南山国際中学校
	豊田市立崇化館中学校
	豊田市立朝日丘中学校
	北名古屋市立天神中学校
岐阜県	岐阜市立岩野田中学校
	羽島市立中島中学校
	中津川市立苗木中学校

学校所在都道府県	学校名
三重県	暁中学校
	鈴鹿中学校
	三重大学教育学部附属中学校
	津市立橋北中学校
	セントヨゼフ女子学園中学校
	高田中学校
和歌山県	和歌山県立古佐田丘中学校
	橋本市立高野口中学校
	橋本市立応其小学校
神奈川県	栄光学園中学校
東京都	筑波大学附属駒場中学校
	桜蔭中学校
	白百合学園中学校
	開成中学校
	雙葉小学校
群馬県	高崎市立倉賀野小学校
千葉県	渋谷教育学園幕張中学校
大阪府	大阪学芸中等教育学校
奈良県	智辯学園中学校
富山県	富山大学人間発達科学部附属中学校

６．参加者アンケート調査結果

日本数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　　75（参加者75名）

１．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	9 人	（ 12.0 %）
イ 先生から	42 人	（ 56.0 %）
ウ 友人から	1 人	（ 1.3 %）
エ 両親から	6 人	（ 8.0 %）
オ 兄弟姉妹から	0 人	（ 0.0 %）
カ 新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク 雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ 日本数学コンクールのホームページから	10 人	（ 13.3 %）
コ その他	7 人	（ 9.3 %）
〇 部活動	3 人	
〇 案内が届いた	3 人	
〇 去年参加したから	1 人	

２．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	43 人	（ 42.2 %）
イ 数学が好きになりたいと思ったから	2 人	（ 2.0 %）
ウ 数学が苦手だから	0 人	（ 0.0 %）
エ 以前参加して有意義だったから	23 人	（ 22.5 %）
オ 先生に勧められたから	10 人	（ 9.8 %）
カ 両親に勧められたから	2 人	（ 2.0 %）
キ 友人に誘われたから	2 人	（ 2.0 %）
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	2 人	（ 2.0 %）
ケ 何となく興味があったから	6 人	（ 5.9 %）
コ 参考書持参が自由だから	0 人	（ 0.0 %）
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	1 人	（ 1.0 %）
シ その他	11 人	（ 10.8 %）
〇 部活動	9 人	
〇 おもしろそうだったから	1 人	
〇 景品が良いため	1 人	
〇 授業関係	1 人	

３．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	14 人	（ 14.3 %）
イ 問題は難しいけれど楽しかった	55 人	（ 56.1 %）
ウ 問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	11 人	（ 11.2 %）
オ 数学の学問的広さを感じた	9 人	（ 9.2 %）
カ 問題文の意味が分かりにくい	6 人	（ 6.1 %）
キ その他	3 人	（ 3.1 %）
〇 時間がかなり短かった	1 人	
〇 面白い、楽しかった	1 人	
〇 めっちゃ時間かかる	1 人	

４．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	39 人	（ 45.3 %）
イ 今後の進路を考える参考になると思った	4 人	（ 4.7 %）
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	41 人	（ 47.7 %）
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	（ 0.0 %）
オ その他	2 人	（ 2.3 %）
〇 数学の広さを再実感した	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

25名 物理
14名 化学
2名 情報
2名 生物
2名 科学
＊ その他（各1名ずつ）
英語、地学、実験、プログラミング、理系融合、北朝鮮、じゃがいも

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

5 名 数学ガール
4 名 フェルマーの最終定理
3 名 浜村渚の計算ノート
3 名 数の悪魔
2 名 Newton
2 名 大学への数学
2 名 ガロア理論

＊ その他（各1名ずつ）
眠れなくなる数学Best、不思議議な数列フィボナッチの秘密、不思議な数πの伝記、博士の愛した数式、中学への数学、数学の大統一に挑む、高校への数学、リーマン予想、四色問題、魔方陣の世界、ポンカレ予想、ベイズ統計学、不等式への招待、パズルゲームで楽しむ数学、代数概論、数学ワンポイント、数学は世界を変える、数学の楽しみ、史上最強図解これならわかる！ベイズ統計学、ゲーム理論、グラフ理論の魅惑の世界、虚数の情緒、解析入門Ⅰ、オイラーの贈り物eiπ＝-1、Focus

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月22日(土)「世界は三角関数で出来ている」「1 + 1/4 + 1/9 +1/16+・・」
5月27日(土)「実演・円周率の計算」「円周率は本当に無理数か？」
6月24日(土)「あやとりと数学」「四元数と八元数」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	38 人	（ 50.7 %）
②知らない	36 人	（ 48.0 %）

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	25 人	（ 33.3 %）
②ない	10 人	（ 13.3 %）
③わからない	39 人	（ 52.0 %）

C これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
- 無限級数
- 対称性
- 量子力学
- リーマン予想
- ややこしい漸化式
- フラクタル
- フーリエ変換
- フィボナッチ数列
- ハニカム構造
- ゼータ関数
- 次元
- 高次元空間
- 計算複雑性
- 群論
- ガンマ関数
- 黄金比の不思議
- じゃがいも
- 金正恩
- 弾道を予想できたとき、人は弾道をよけられるのか。
- 日曜日にも開催してほしいです。東京の人が来れないので。

８．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- 用事で早退しなければいけなかったのが残念だった。
- どの問題もとても難しかったです。5時間半の試験時間の中で問題3だけを解答してましたが、1つの問題にこれだけ長時間かけるのは初めてでした。なんとなくわかっても、それを記述するのがとても難しかったです。
- 問題4で作成した正十二面体を共有できなく問題が解けなかった。
- 数学は日常生活を含めた幅広い分野に応用できるとわかった。非常に良い経験になったと思う。
- かなり忙しく、楽しかったです。長い間ありがとうございました。
- 普段はできない数学に長時間取り組むことができてよかった。
- 楽しかったです。
- とても難しくて歯がたたなくて、自分もまだまだだなと感じた。問題の内容が面白かった。
- とても楽しかったです！！
- 日々解いている問題集なんかよりも、とても楽しかったです。
- 普段目にしないような問題でおもしろかったです。学校の授業でならったようなことをこのようなときに使えて楽しかったです。
- 2回目の参加ですが、面白かったです。今回で最後になってしまいますが、今後もこのコンクールの発展を楽しみにしています。
- 来年受験生なので、今回最後のコンクールになると思う。残念です。
- パスカルの三角形の奥深さが面白かった。
- 思ったよりも楽しかったので、来年に向けて勉強する気が湧きました。
- 6時間近くずっとテストを受けるということは、なかなか無かったので良い経験になりました。
- 今回は2回目の挑戦だけどなかなか難しく大変だった。でもがんばってやったのでとても楽しくて、もう3年生だから次はないけどこれからも楽しく数学をやっていきたいと思った。
- 学校でのテスト問題とは大きく異なっていたので、頭の働かせ方を変えながら、問題に取り組むことができてすごく楽しかったです。
- 昨年は団体で出たが、そのときより自分のやりたいものを優先できた。
- 難しいですが、とても楽しく解けました。ただ、なかなか全てを解き切ることができなくて、悔しかったです。来年こそはリベンジするつもりでがんばりたいです！
- 楽しかった
- 毎年多くのひねられた問題を楽しんでいます。ありがとうございました。
- 楽しかったです。ありがとうございました。本当は関東にも会場があると嬉しいです。
- 東京などにも会場を増やし、規模を大きくすべきだと思う。
- 名古屋は暑い。
- 個人情報を書く欄が多いので、減らしてほしいです。
- 用事がかぶってしまって、最後までとけなかったが、とても楽しい時間でした。また来年も来たいと思っているので、また開催してくれるのを楽しみにしています。
- もう少し時間があったら解けたかもしれない問題もあった。もう少し時間配分を考えるべきだった。
- やや問題の意味が不明りょうな部分もあったが、面白かった。
- 書くのが疲れました。
- おもしろかった。
- 有意義な時間になりました。面白かったです。
- 頭をしっかり使うことができたと思う。
- ヒラメキカと、説明する力、頭の中のことをうまく文字にする能力は大切だと思った。

日本数学コンクール【団体戦】

アンケート総数 141（参加者149名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	23 人	（ 17.3 %）
イ	先生から	77 人	（ 57.9 %）
ウ	友人から	27 人	（ 20.3 %）
エ	両親から	0 人	（ 0.0 %）
オ	兄弟姉妹から	0 人	（ 0.0 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ･テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	3 人	（ 2.3 %）
コ	その他	3 人	（ 2.3 %）
	○ いつの間にか登録された	1 人	
	○ 例年来てるから	1 人	
	○ 部活動	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	44 人	（ 26.0 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	2 人	（ 1.2 %）
ウ	数学が苦手だから	3 人	（ 1.8 %）
エ	以前参加して有意義だったから	18 人	（ 10.7 %）
オ	先生に勧められたから	35 人	（ 20.7 %）
カ	両親に勧められたから	0 人	（ 0.0 %）
キ	友人に誘われたから	27 人	（ 16.0 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	1 人	（ 0.6 %）
ケ	何となく興味があったから	18 人	（ 10.7 %）
コ	参考書持参が自由だから	1 人	（ 0.6 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	6 人	（ 3.6 %）
シ	その他	14 人	（ 8.3 %）
	○ 部活動	4 人	
	○ 人数合わせ	3 人	
	○ 例年来てるから	2 人	
	○ いつの間にか登録されていた	1 人	
	○ 友だちと楽しみたいから	1 人	
	○ 強制	1 人	
	○ 友人代理	1 人	
	○ 大学入試のときに使えるから	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	50 人	（ 27.0 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	74 人	（ 40.0 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	25 人	（ 13.5 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	22 人	（ 11.9 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	13 人	（ 7.0 %）
キ	その他	1 人	（ 0.5 %）
	○ 超楽しかった！	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	56 人	（ 37.3 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	2 人	（ 1.3 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	77 人	（ 51.3 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	4 人	（ 2.7 %）
オ	その他	11 人	（ 7.3 %）
	○ 自分はまだまだだと感じた	1 人	
	○ 先生との関係	1 人	
	○ 数学に対する客観性がかわった	1 人	
	○ 学校の数学を頑張ろうと思う	1 人	
	○ 特に思うことはない	1 人	
	○ 数学がより楽しいと感じるようになった。	1 人	
	○ もっといろいろ解きたい	1 人	
	○ 今後のことには変わりはない	1 人	

5．数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

26 名 物理
18 名 化学
10 名 英語
6 名 情報
4 名 生物
4 名 地理
3 名 実験
3 名 歴史
3 名 古典
2 名 現代社会
2 名 現代文
2 名 国語
2 名 書道
2 名 地学
2 名 全ての教科

＊ その他（各1名ずつ）
K-POP、アニメ、合唱、漢字、漢文、将棋、数列、スピーチ、ディベート、なぞ解き、日本史、プログラミング、法律、麻雀、機械、級数、理系総合

6．今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

7 名 浜村渚の計算ノート
4 名 数学ガール
3 名 四色問題
3 名 チャート
3 名 お任せ！数学屋さん
3 名 Newton
2 名 最近、妹がグレブナー基底に興味を持ち始めたのだが。
2 名 高校数学の美しい物語
2 名 虚数の情緒
2 名 数の悪魔

＊ 各1名ずつ
面積迷路、数学ガールの秘密ノート、決してマネしないでください。、フェルマーの最終定理、微分・積分、体感する数学、大学への数学、素数の本、線形代数入門、数学史、初等整数論、塾技、巨大数、ガロア理論、ガウスについて、岡潔博士ってだれ？、右脳パズル、稲荷の独習数学、青の素数、青の数学、アインシュタインの相対性理論、π、2進数について

7．名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月22日(土)「世界は三角関数で出来ている」「1 + 1/4 + 1/9 +1/16+・・」
5月27日(土)「実演・円周率の計算」「円周率は本当に無理数か？」
6月24日(土)「あやとりと数学」「四元数と八元数」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	16 人	(11.3 %)
②知らない	115 人	(81.6 %)

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	16 人	(11.3 %)
②ない	20 人	(14.2 %)
③わからない	95 人	(67.4 %)

C　これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

- 魔方陣
- 積分
- 数列
- 虚数
- 黄金比の関係
- リーマン予想
- リーマンゼータ関数
- 四次元空間について
- 有名な問題の面白い解法
- もっと身近で現実的な条件の下で問題をつくってほしい
- 複素数平面
- フィナボッチ数列
- トポロジー
- 高田の定理
- 外積
- 素数
- 世界の数字について
- 四則演算
- 虚数
- 完全数「6」
- 折り紙
- おもしろいこと
- オイラーの出身地に行ってみた
- 暗号理論
- 1.1.9.9を使って10を作る。

８．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- 楽しい。
- 難しかったけど、とてもおもしろかったです。
- とてもむずかしかったが、面白かった。
- チームで話し合いながら問題を解いていくことがとても楽しかったです。
- 問題は難しかったが、とても楽しく解かせてもらいました。
- とても楽しむことができました。
- 問題はむずかしかったが、楽しかった。
- 数学のおもしろさを再確認することができました。
- 団体戦形式は、仲間と高め合いつつできるから楽しく良いと思った。
- 良い経験となりました。ありがとうございました。
- 二人では人数不足。脳が回らなかった。
- 名前シールが欲しい。
- 楽しかった。
- フォントが違う。ですます体が曖昧。
- おつかれさまでした。
- おもしろかったです。
- とてもおもしろい夏の思い出ができました。ありがとうございました。
- 楽しくそして困難でした。
- 難しかった。
- 今回のような時間をかけて問題をとくことが初めてでなかなか楽しかったです。
- わかりそうな問題からやればよかった。
- 難しいものもあったが、わかるところは時間をかけたらできた。
- 今回も奥が深い問題ばかりで楽しめました。
- ごり押し万歳
- 数学の問題が難しかったけど、数学に関する興味がより深まった。
- 今年も楽しかったです。
- 自由な発想をしっかりと読み、評価してください。公式、教科書に捕らわれず、1から解き直すのが、僕は数学だと思っています。
- 会場が暑い。講評が欲しい。
- 1.1.9.9を使ってどうやって10を作るのでしょうか。
- ひたすら暑い。
- 会場が暑い。
- とても暑かったです。楽しかったです。
- 各グループの講評が欲しいです。また、優秀グループの回答等も見たい。ぜひ大学生枠を！！　暑かったです。
- 問題が難しくて本当に大変でした。
- 皆で解くことは楽しく、とても良かったと思いますが、会場の空調の効きが悪く、少しバテそうでした。
- 周りと相談しながら問題を解決することができて、非常に意義のある時間となった。また、分からないなりにも問題を完遂させるという達成感を味わうことができた。
- 眠かった。5時間も拘束されるのは辛い。

- すごく暑かったので、もっと涼しくしてほしい。思っていたより楽しく、数学がもっと好きになった。
- 問題はとても難しかったけど、解くのは楽しかったです。
- 楽しかった。暑かった。難しかった。
- クーラーがきいてなくてすごく暑かった。
- クーラーの効きが悪かった。附属学校でもいいから涼しいところがいい！
- クーラーがあまり効いていなかったため、とても暑かった。①の問題が面白かった。
- 湿気と暑さが辛かったです。クーラーの効きが悪かったです。
- 数学の奥の深さを改めて感じることができ、難しい問題も解けるように頑張って行きたいと思いました。
- とても難しかったが、とても楽しかった。1つの問題について2時間ぐらい考え、答えを導くことができたため、とても自信につながった。それと同時に、自分がどれだけ数学ができないかを感じた。来年はもっと力をつけて挑みたいと思う。
- 楽しくできた。
- 難しかったけど、楽しかったです！次回もぜひ。
- 誰がこの問題を解いても同じや同じやと思った。友人に違うだろ！違うだろ！と怒られたのが印象に残っている。
- ⑤の（1）の答えは（1÷9＋1）×1でした。1.9.1.9…問題をつくった人に会いたいですね。深夜テンションだったのかな？数学×下ネタは良問でした。
- 我々数学部が研究している「素数」「婚約数」の定義についてより深くかかわれる材料が手に入ったのはとても大きな成果です。そもそもなぜ我々が数学を研究しているのかというと、世界の発展に数学が必要だからです。例えば問5の（1）1919事件のように…
- 暑かったです。名古屋を出たいと思いました。あと、ジュース飲み放題だと思っていました。
- 数学が自由な考え方だなーと思いました。ジュースやシャープペンをもらえて嬉しかったです！
- 自分の力が確認できた。もっと実力をつけたい。
- 部屋が暑かったです。思ってたよりも楽しかったです。学校では、1問に対してこんなにも悩める時間があるというのはなかなかないことなので、貴重な体験ができたと思います。
- 楽しかった。自分とは視点の異なる友人たちと力を合わせていっけん難しそうな数学の問題を解くのは新鮮だった。
- 部屋が暑かった。5時間半かけて問題を解いたのは初めてだったけど、あっという間だった。友達と協力して解くことが楽しかった。参加して良かったと思った。
- シャープペンとジュースありがとうございました。今まで、数学の問題1問にこんなに時間をかけて考えたことがなかったので、新しい感覚でした。友達と相談をしてもなかなか解けないし、いろいろと深くまで考えることができて楽しかったです。
- 今年も楽しかったです！
- 楽しかった。
- 会場が暑いです。問題文がわかりにくかった。
- 結構集中できないくらい暑かった。数学はすごい嫌いだし、やりたくもなかったけど、友達とできて楽しかった。
- あつかった。
- 楽しかった。
- 楽しかったです。
- 仲間との関係も深められて、来て良かったと思いました。本日は、数学コンクールを開催していただき、ありがとうございました。
- 良かった。
- 難しいけど楽しかった。

日本ジュニア数学コンクール【個人戦】

アンケート総数　　28（参加者28名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア 学校の掲示を見て	5 人	（ 15.2 %）
イ 先生から	17 人	（ 51.5 %）
ウ 友人から	0 人	（ 0.0 %）
エ 両親から	6 人	（ 18.2 %）
オ 兄弟姉妹から	2 人	（ 6.1 %）
カ 新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク 雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ 日本数学コンクールのホームページから	1 人	（ 3.0 %）
コ その他	2 人	（ 6.1 %）
○ 部活動	1 人	
○ いとこから	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア 数学が好きだから	19 人	（ 38.8 %）
イ 数学が好きになりたいと思ったから	0 人	（ 0.0 %）
ウ 数学が苦手だから	0 人	（ 0.0 %）
エ 以前参加して有意義だったから	5 人	（ 10.2 %）
オ 先生に勧められたから	8 人	（ 16.3 %）
カ 両親に勧められたから	3 人	（ 6.1 %）
キ 友人に誘われたから	0 人	（ 0.0 %）
ク 名古屋大学のキャンパスに関心があったから	0 人	（ 0.0 %）
ケ 何となく興味があったから	7 人	（ 14.3 %）
コ 参考書持参が自由だから	2 人	（ 4.1 %）
サ コンクールの雰囲気を味わいたいから	4 人	（ 8.2 %）
シ その他	1 人	（ 2.0 %）
○ 研究テーマなどがあればいいと思い	1 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア 問題が難しいと思った	8 人	（ 15.4 %）
イ 問題は難しいけれど楽しかった	21 人	（ 40.4 %）
ウ 問題が難しいと思わなかった	0 人	（ 0.0 %）
エ 学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	8 人	（ 15.4 %）
オ 数学の学問的広さを感じた	9 人	（ 17.3 %）
カ 問題文の意味が分かりにくい	5 人	（ 9.6 %）
キ その他	1 人	（ 1.9 %）

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア 勉強の励みになると思う	17 人	（ 50.0 %）
イ 今後の進路を考える参考になると思った	1 人	（ 2.9 %）
ウ 数学に対するイメージがこれまでより広くなった	13 人	（ 38.2 %）
エ 数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	0 人	（ 0.0 %）
オ その他	3 人	（ 8.8 %）
○ モチベーションが上がった	1 人	
○ かわらない	1 人	
○ いろいろな数学があり、これからもっと数学を知っていきたい	1 人	

5．数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。
あれば，それはどのような分野ですか。

7 名 化学
6 名 物理
2 名 生物
2 名 歴史

＊ その他（各1名ずつ）
地学、情報、理科全般、美術、推理、社会系、科学

６．今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

＊ 各1名ずつ
目で見る数学、数の悪魔、もう一度高校数学、マスペディア、Newton、数学の問題の発見的解き方、数学のほんとうの使い道、数学ガール、高校数学の美しい物語、数の世界、円周率の謎を追う

７．名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを,「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は１０月～１月と3月～６月の第４土曜日で，場所は名古屋大学多元数理科学棟５０９講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

４月２２日(土)「世界は三角関数で出来ている」「１ + 1/4 + 1/9 +1/16+・・」
５月２７日(土)「実演・円周率の計算」「円周率は本当に無理数か？」
６月２４日(土)「あやとりと数学」「四元数と八元数」

Ａ 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	7 人	(25.0 %)
②知らない	20 人	(71.4 %)

Ｂ これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	3 人	(10.7 %)
②ない	3 人	(10.7 %)
③わからない	21 人	(75.0 %)

Ｃ これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。
- ○ $\sqrt{2}$について
- ○ 関数
- ○ 「数学」と「スポーツなどの他の分野」との関わり

８．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- ○ 問題がおもしろくてよかったです。
- ○ 少ない問題だったけど、とてもむずかしかった。もっと勉強をしたほうがいいと思った。
- ○ また受けてみたいです。
- ○ 初めて数学コンクールに参加したので、緊張しました。問題も難しかったけど、今後の数学が楽しみになるくらいの問題だったので、来年も参加したいと思いました。
- ○ 1問でも集中すれば5時間はあっという間に過ぎた。かなり有意義な時間だった。
- ○ 知識のみを競う問ではなく、それを応用する問で、楽しかった。
- ○ 難しかった。
- ○ 楽しかった。
- ○ 東京会場を作ってほしいです。
- ○ 難しくて解けない問題が多かったので家に帰ってから解いてみようと思います。
- ○ 解き応えがあって面白かったです。SSHで研究するテーマが見つかりました。ありがとうございます。
- ○ 超まほう陣て知っていますか？

日本ジュニア数学コンクール【団体戦】

アンケート総数 264 （参加者266名）

1．今回のコンクールの開催については，どのようにして知りましたか。

ア	学校の掲示を見て	61 人	（ 21.2 %）
イ	先生から	174 人	（ 60.4 %）
ウ	友人から	43 人	（ 14.9 %）
エ	両親から	3 人	（ 1.0 %）
オ	兄弟姉妹から	1 人	（ 0.3 %）
カ	新聞で	0 人	（ 0.0 %）
キ	ラジオ・テレビで	0 人	（ 0.0 %）
ク	雑誌で	0 人	（ 0.0 %）
ケ	日本数学コンクールのホームページから	2 人	（ 0.7 %）
コ	その他	4 人	（ 1.4 %）
	○ 去年参加したから	1 人	
	○ 家に紙が送られた	1 人	
	○ チラシ（学校）	1 人	

2．今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。

ア	数学が好きだから	83 人	（ 22.7 %）
イ	数学が好きになりたいと思ったから	15 人	（ 4.1 %）
ウ	数学が苦手だから	7 人	（ 1.9 %）
エ	以前参加して有意義だったから	21 人	（ 5.8 %）
オ	先生に勧められたから	78 人	（ 21.4 %）
カ	両親に勧められたから	3 人	（ 0.8 %）
キ	友人に誘われたから	86 人	（ 23.6 %）
ク	名古屋大学のキャンパスに関心があったから	9 人	（ 2.5 %）
ケ	何となく興味があったから	49 人	（ 13.4 %）
コ	参考書持参が自由だから	3 人	（ 0.8 %）
サ	コンクールの雰囲気を味わいたいから	6 人	（ 1.6 %）
シ	その他	5 人	（ 1.4 %）
	○ 名古屋に行ってみたかったから	1 人	
	○ なんとなく面白そうだったから	1 人	
	○ 妹に誘われたから	1 人	
	○ 無理やり（友達）	2 人	

3．今回のコンクールの問題については，どのように感じましたか。

ア	問題が難しいと思った	103 人	（ 26.4 %）
イ	問題は難しいけれど楽しかった	142 人	（ 36.4 %）
ウ	問題が難しいと思わなかった	3 人	（ 0.8 %）
エ	学校での問題とは、かなり内容が違うと思った	54 人	（ 13.8 %）
オ	数学の学問的広さを感じた	39 人	（ 10.0 %）
カ	問題文の意味が分かりにくい	44 人	（ 11.3 %）
キ	その他	5 人	（ 1.3 %）
	○ 最高	1 人	
	○ 時間が足りないと感じた	1 人	
	○ 見ただけで頭が痛くなった	1 人	
	○ はじめは楽しいが、どんどんあきる	1 人	
	○ 昨年よりも難しかった	1 人	

4．今回のコンクールに参加して，今後のことをどう思いますか。

ア	勉強の励みになると思う	92 人	（ 32.9 %）
イ	今後の進路を考える参考になると思った	19 人	（ 6.8 %）
ウ	数学に対するイメージがこれまでより広くなった	157 人	（ 56.1 %）
エ	数学に対するイメージがこれまでより悪くなった	8 人	（ 2.9 %）
オ	その他	4 人	（ 1.4 %）
	○ 数学的に考えることの大切さを知った。	1 人	
	○ 全然分からなかったから将来が不安になりました。	1 人	
	○ 数学の難しさを知った。	1 人	
	○ 難しいな。	1 人	

5. 数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。

28 名 化学
22 名 物理
22 名 歴史
17 名 理科
17 名 科学
16 名 英語
13 名 社会
13 名 生物
12 名 国語
6 名 美術
6 名 地理
4 名 工作
4 名 体育
4 名 計算
4 名 音楽
3 名 パズル
3 名 現代文
2 名 日本史
2 名 道徳

＊ その他（各1名）
料理、粒子原子の配合、地学、素粒子、戦国史、生活の知恵、実験、工学、公民、個性的なやつ、家庭科、医療、医学、立体の作成、理系、物語作成、プログラム、ひらめき問題、ピアノ、なぞなぞ、読書、鉄道、ディベート、自由研究、クイズ、漢字、かるた、家庭科、折り紙、犬、遺伝子分解、アニメ

6. 今までで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

11 名 お任せ！数学屋さん
7 名 青の数学
6 名 浜村渚の計算ノート
5 名 フェルマーの最終定理
4 名 教科書
3 名 異端の数ゼロ
3 名 博士の愛した数式
3 名 円周率の謎を追う
3 名 π
3 名 数学ガール
2 名 素数
2 名 数の悪魔
2 名 真夏の方程式
2 名 数の悪魔
2 名 面白くて眠れなくなる数学
2 名 Newton
2 名 $\sqrt{2}$

＊ その他（各1名ずつ）
不思議な数eの物語、不可能不確定不完全、数学ガールの秘密ノート、数のモンスターアタック、確立捜査官御子柴岳人、四色問題、ベクトル空間、ブラックジャック必勝法、フェルマーの大定理、フェルマー、ピタゴラスイッチ、ハッピーになれる数学、素数表、世界は二乗でできている、数学を1つ1つ分かりやすく、仕事に役立つ数学、オイラー・リーマン・ラマヌジャン、円周率、γ

7. 名古屋大学では数学についての公開形式のセミナーを，「数理ウェーブ」という名で開催しています。講演者は主に名古屋大学の教員と院生で，話題は数学コンクールの問題に関連したものから素粒子論まで様々です。数理ウェーブの開催日は10月～1月と3月～6月の第4土曜日で,場所は名古屋大学理1号館509講義室，題目や要旨はインターネットで公開しています。（名大のホームページにリンクしています。）今年度開催された講演のテーマは次のとおりです。

4月22日(土)「世界は三角関数で出来ている」「1 + 1/4 + 1/9 +1/16+・・」
5月27日(土)「実演・円周率の計算」「円周率は本当に無理数か？」
6月24日(土)「あやとりと数学」「四元数と八元数」

A 数理ウェーブが行われていることを知っていますか。

①知っている	24 人	(9.1 %)
②知らない	232 人	(87.9 %)

B これから数理ウェーブに参加する希望はありますか。

①ある	16 人	(6.1 %)
②ない	53 人	(20.1 %)
③わからない	186 人	(70.5 %)

C　これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

- 分かれば簡単な問題
- ルートの計算
- 四色問題
- 無量大数以上の数について
- 身近にある数学
- 身近なことに使える数学
- 北海道五稜郭、「11」について
- プログラムについて
- 物理
- ピタゴラスの定理
- パズル問題
- 虹のできる確率
- 素数に規則性はあるのか
- 素数
- 数学で世界は変わるのか
- 社会
- 実際に問題を解く
- 次元とは
- 虚数
- 荷電粒子
- 仮想現実について
- カオス理論
- 折り紙
- おかしや食べ物に関係すること
- 新しい公式の発見
- π3.05の証明
- 0をどうやって発見したか。
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$　は本当か

8．その他，感想があれば何でも結構ですから書いてください。

- とても難しく、絶対に解けないと思う問題もあったが、今までやってきたものとは全く違う問題に取り組んだだけでも、貴重な経験になったと思う。
- 難しくもやりがいがあり、とても楽しかったです。
- とても難しかった。
- 団体戦ということで、仲間と楽しく問題に挑むことができました。面白かったです。
- 5時間半あっても考え方にすら到達できないことから、数学の深さを知った。
- すんげー楽しかった。来年も絶対来る。
- 楽しかった。
- 難しい。
- かんとくの先生が優しかった。
- 思っていたより楽しかったです。ありがとうございました。
- テストのように個人個人で解くのではなく、4人で力を合わせて解くのが楽しかったです。ぜひこのようなイベントをひらいて欲しいです。
- 数学はあまり好きではなかったけれど楽しかったです。
- 楽しかったです。
- 去年よりは楽しかったが、答えにたどり着くまでが長かった。
- とても楽しかったです。ありがとうございます。
- 数学の楽しさを改めて思い出しました。この世界の森羅万象は好奇心によって一つずつ解決できるものだと実感しました。
- 頭の中に0と1でできたピラミッドが離れません。$\sum_{k=0}^{n}$□　？
- 数学に関する考え方が深まり、もっとやってみたいと思いました。
- チームで協力してできて楽しかった。
- 団体戦はみんなでやるので楽しいし4人分のひらめきがあってよりできました。
- チームでじっくりと考え、答えを導くことがおもしろかったです。
- 普段あまりやらない難しい問題をすることができて楽しかったし、とてもおもしろかったです。
- むずかしかった。
- 数学がさらにめんどくさく、でも楽しく感じた。
- 学校で解くような問題とはかなり違っていて難しかったですが、解いていて楽しいなと思ったところもありました。このような問題を解く機会はあまりなかったので、いい機会になったと思います。来年も来ようかなと思いました。
- こんな機会はめったにないのでいい経験になりました。楽しかったです。
- 問題の意味が分かりにくかった。
- 今日はいい経験になったのでとてもよかったです。
- 難しかったです。
- 問題文をもう少し分かりやすくして欲しいです。でも楽しかった。
- 問題はおもしろかったです。問題文が少し分かりにくかったので、もう少し簡単にしてほしいと思いました。
- 学校とはまったく別の問題が出題されて、とってもおもしろいと思いました。また参加したいです。
- 今日始めてだったのですが、とてもおもしろかったので、次のときもやってみようかなと思いました。
- 問題でまったく意味がわからないぐらい難しかったです。
- 楽しい。

○ 楽しかったけれど、難しかったです。来年はもっと解きたいです。
○ 難しかったです。次はもっと問題が解けるように頑張ります。
○ 難しかったので、できるように考えてみたいです。
○ 楽しいですが、かなり難しいので、また団体で来たいです。
○ 全部の問題が難しかった。
○ 難しい言葉があり、理解が出来なかったので、難しい言葉の意味を書いてもらえると嬉しいです。
○ 問題がとても難しかった。もう少し数学の勉強をしたら、こういう問題をしたい。
○ 問題は分からない言葉だらけだったので、言葉の意味を書いてくれるとうれしいです。
○ ・集合時間が早すぎて眠くなりました。・ご飯を食べる時間を自由にしてほしいです。・チーム名が間違っていてテンションが下がりました。・意外と楽しかったです。・問題2の「Hホテル」が思春期の子たちにはちがう事を想像してしまうと思いました。自分は想像してしまいました・・・！！
○ ・お昼ごはんを食べる時間が12:00～だとちょっと遅いなと思いました。いつでも食べていいという感じにした方がいいと思いました。・意外と楽しかったです。
○ 楽しかった。
○ 思った以上に問題が難しかったです。
○ 問題は難しかったけど、友達と協力して問題をとくことができて、すごくいい経験になりました。
○ 難しかったけどみんなと考えられてきずなが深まっていいと思いました。
○ 私には想像力が足りないなと思いました。もっと勉強して、来年はしっかりと解けるようになって参加したいです。
○ とても難しかったです。でもグループで考えることができてよかったです。
○ 問題がとても難しかったですが、皆と話し合えておもしろかったです。
○ 様々なジャンルの問題があり、選択しやすかったです。もうちょっとレベルの低いのも出して欲しいです。
○ 普段解いたことのないようなものばかりで、おもしろかった。また、解けた時の達成感がすごく大きくてなかなか味わえないものだと思った。
○ いままで解いたことのないような問題に出会って数学への意識が高まりました。公式を自分でつくってみてそれが合っているとなったときにとてもうれしくなった。学校の数学の授業もがんばっていきたいです。
○ ふつうの授業では全く解いたこともないようなかんじで、おどろきました。ひとつの問題からヒントとなる文カギとなる文を探してそれを元に表や図で解いたりするのはすごく楽しかった。
○ すぐに答えがでるものが数学だと思っていたけど、数コンをやってみて、30分とか1時間かけて解くことも大切だと思いました。
○ 思っていた以上に問題が難しく、苦戦しました。私は、数学が苦手なので、結構大変でした。
○ 難しかったけど、いい経験になりました。
○ 難しかったけど、いい経験になりました。楽しかったです。
○ 文章が難しい。考えて正解に近づいたら楽しい。
○ とても難しくて答えがなかなかでない所がよかったです。
○ 解ける問題と解けない問題があった。
○ 意外と難しかった。
○ 大変だった。でも楽しい。
○ 頭をかなり使った。仲間で協力できてよかった。
○ 学校では味わえない、数学の深さを感じました。難しかったけど、とっても楽しかったです。友人との絆も深まりました。
○ 普段は解かないような問題が解ける良い機会となった。
○ おととし、数学コンクールに参加させてもらったのですが、その時より問題が難しかったけれど、考えるのがおもしろく、相談するのが楽しかったです。
○ あと少しで解けそうなところで解けなかった。くやしい。またチャレンジしたい。
○ パスカルの問題がおもしろかった。
○ カルピスがあってうれしかった。
○ 頭が狂いそうなくらい難しかった。
○ 過去問とは違う難しさがたくさんありました。問題の意味がわかれなかったり、問題が難しかったりしました。でもいい経験になったので良かったです。
○ とても難しかったし、1問解くだけでとても時間がかかったので、1日あっても足りないなとも思ったし、友達とやることに楽しさも感じた。
○ とても難しかったけれど、もう少しだけ考えたいといつもよりも思うようになり、とても集中できてよかったです。
○ 参加してよかったです。自分で考えることの重要性を実感しました。ありがとうございました。
○ 難しかったが楽しかった。
○ 意外にむずかしかったです。
○ 私は数学が苦手で、きまった答えがあるということが好きでないこともあり、数学に関するものには苦手意識ができていました。今日の問題を解いてみて、計算が全て数学というわけではないと思いましたが、必ずどこかに本当の答えがあるように感じました。
○ 他のチームとはかべがあったりして、近くにいてもいないような感じだと思っていたのですが、結構近くでおどろきました。
○ 難しかったですが、楽しかったです。
○ とても難しかったけれど、前日にやった過去問に比べて手がつけやすかったので楽しめた。1.1.9.9の四則演算は出来そうで出来なかったのでとても悔しかった。
○ とても難しく、特に1.1.9.9や2017を作る問題が分かりそうで分からない感じでムズムズしました。
○ 分かりそうで分からない問題と全く分からない問題があって、モヤモヤしました。分かったらすごい達成感が来ると思いました。
○ 1個1個の問題が難しかったけど、それが解き終わった時はとてもうれしい気持ちになれるのでたくさんやりたいなと思いました。
○ 1つ1つの問題が難しく、かなり時間がかかりました。
○ 去年もジュニアコンクールに出てとても難しかったことを覚えています。今年は問題が全然ちがいましたが、やっとのことで2問解くことができたので良かったです。来年も出来ればまた出たいと思います。
○ 難しかったです。
○ シャーペンがもらえてうれしかった。むずかしすぎて問題が解けなかったけど、楽しかった。来れてよかった。
○ しんどい。去年よりは取り組む気が出た。
○ 難しい。
○ ペンと消しゴムをありがとう。
○ シャーペンThank！
○ みんなで考えることはあまりなかったので、この機会を通してみんなと協力する楽しさを知りました。
○ むずかしい問題ありがとうございました。次回もよろしくお願いします。楽しかったです。

- 考えれば1つは解けるところがいいです。
- もっとひらめきを必要とする問題をときたい。
- すごく難しくて、あまりとけなかった。でも楽しかったからまたやりたい。
- めっちゃむずかった。
- 飲み物がもらえて良かったです。仲間と協力することの大切さがわかった。
- 長時間数学をやり続けたので結構辛かった。これの個人戦はやりたくない。
- のみもの、参加賞いいと思った。
- 数学コンクールとても楽しかった！
- 問題はすごく難しかったけれど、あーじゃないこーじゃないと試行錯誤しながら解くことができて楽しかったです。
- 学校や塾の問題とは違って、おもしろかった。
- 難しかったが、とても手応えのある問題ばかりで楽しかった。分かりそうになかった問題を必死に考えた末に答えが出たときは、とても嬉しかった。
- みんなで同じ問題に協力してとくことがとても楽しかったです。わかりそうでわからないぜつみょうな問題が多くとけた時はとてもたっせい感がありました。次もまた友達ときてみたいです。
- とても難しい問題が多いのですが、おもしろいからとてもわくわくしました。
- 数学の応用、その一端に今日ふれてとても楽しかったし、興味をもった。
- 正十二面体を複数使っているチームがあったので、そこを平等にしてほしいと思った。問題を協力して解くのが楽しかったです。
- ふざけている子がいたからよくないと思った。問題がおもしろかった。
- 友達と協力して考えて仲を深めることができて良かった。
- 素数問題がやりたいです！
- 素数の問題がやりたいと思った。
- 電卓を使っても、計算することが難しかったけど、高校ではそのような計算もするだろうから、一つの経験としてやってよかったと思えるいい問題だった。
- 仲間と問題にとりくめてむずかしかったけどたのしかった。
- 問題は難しかったけど、学校の問題とちがって楽しかった。
- おもしろかった。またきたい。
- 楽しかった。
- 問題は難しかったけど、色々な考え方が出来たので、とても楽しかったです。
- Hホテルの問題がいいと思いました。簡単なとき方を知りたいです。
- むずかしかった。
- むずかしくて、問題が全然解けなかった。カンは大切だとわかった。
- 久しぶりに難しい問題に触れられておもしろかった。
- はじめてでしたが、とてもおもしろかった。
- 久しぶりに難しい問題をやって、楽しかったです。
- たのしかった。
- 良いけいけんとなった。
- 難しかったけど、楽しく問題を解けたし、普段使わない脳も使えてしげきになりました。
- 初めて数学コンクールに来て、数学は1つの考え方しかないと思っていたけど、今回来て、いろいろな考えがあっておもしろいと思いました。
- これてよかったです。自分の無知を痛感しました。これからの学習におおいに生かしていきます。
- 数学の世界はとてもすばらしいものだと思いました。そしてもっと数学について勉強していきたいと思います。
- 名大はすごいと思いました。
- 名大はすごいと思った。・数学コンクールをやって、学校とは問題が全然ちがうからびっくりしました。
- 暑い。
- 楽しかった！！！

日本数学コンクール実行委員会委員名簿

学内委員	宇 澤 達	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	大 平 徹	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	林 正 人	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	伊 師 英 之	（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
	松 浦 能 行	（名古屋大学理学研究科　准教授）
	西 村 治 道	（名古屋大学情報学研究科　准教授）
	花 薗 誠	（名古屋大学経済学研究科 准教授）
	田 地 宏 一	（名古屋大学工学研究科　准教授）
	渡 辺 武 志	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
	大 羽 徹	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
	若 山 晃 治	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
学外委員	鈴 木 紀 明	（名城大学理工学部　教授）
	松 川 和 彦	（愛知きわみ看護短期大学　事務局長）
	高 田 宗 樹	（福井大学学術研究院工学系部門　教授）
	服 部 展 之	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	野 村 昌 人	（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
	児 玉 靖 宏	（愛知県立刈谷北高等学校　教諭）
	村 田 英 康	（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
	小 島 洋 平	（愛知県立岡崎高等学校　教諭）
	渡 辺 喜 長	（愛知県立瑞陵高等学校　教諭）
	青 木 勝 人	（愛知県立旭丘高等学校　定時制　教諭）
	高 原 文 規	（愛知県立千種高等学校　教諭）
	山 内 真 澄 美	（愛知県立豊明高等学校　教諭）
	伊 藤 慎 吾	（愛知県立鳴海高等学校　教諭）
	小 島 彰 二	（愛知県立半田高等学校　教諭）
	奥 田 真 吾	（三重県立津・津西高等学校　講師）
	岩 本 隆 宏	（三重高等学校　講師）
	小 倉 一 輝	（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
	市 川 敏	（椙山女学園高等学校　教諭）
	大 須 賀 裕 貴	（愛知県立愛知総合工科高等学校　教諭）
	青 木 健 一 郎	（愛知県立刈谷高等学校　教諭）
	田 邉 篤	（三重県立津高等学校　教諭）
	岡 﨑 建 太	（京都大学数理解析研究所　研究員）
	波 多 野 善 隆	（大阪府立四條畷高等学校　教諭）
	高 木 由 起 子	（愛知県立東海商業高等学校　教諭）
	川 上 祥 子	（愛知県立豊田西高等学校　教諭）
顧問	大 沢 健 夫	（元名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	安 本 雅 洋	（元名古屋大学情報科学研究科　教授）
	丹 羽 一 雄	
	服 部 保 孝	（大同大学大同高等学校　校長）
	樋 口 英 次	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	矢 野 秀 樹	（大同大学大同高等学校　教諭）
	土 岐 慎 一	（元岐阜県立多治見北高等学校　講師）
	田 所 秀 明	（元三重県立伊勢高等学校　教諭）

日本数学コンクール委員会委員名簿

委員長	髙橋　雅英	（理事・副総長）
委　員	納谷　信	（多元数理科学研究科長）
	野口　晃弘	（経済学研究科長）
	村瀬　洋	（情報学研究科長）
	杉山　直	（理学研究科長）
	新美　智秀	（工学研究科長）
	磯谷　桂介	（事務局長）
	吉野　明	（研究協力部長）
	宇澤　達	（実行委員会委員長）

（平成29年4月1日現在）

主　　催

名古屋大学
日本数学コンクール委員会
名古屋市千種区不老町

後　　援

愛知県教育委員会	岐阜県教育委員会
三重県教育委員会	名古屋市教育委員会
大阪市教育委員会	愛知県高等学校数学研究会
和歌山県橋本市教育委員会	三重県高等学校数学教育研究会
岐阜県高等学校数学教育研究会	中日新聞社
大阪高等学校数学教育会	東海テレビ放送株式会社
テレビ愛知株式会社	

■■■ 編集後記 ■■■

あらゆるところで財政の危機が叫ばれる昨今の本邦ですが、いよいよ今年度からは数学コンクールの運営も非常に厳しい予算の問題に直面することとなりました。この「まとめ冊子」の発行形態も含めて、様々なことを見直さざるを得ない状況にあります。そのようななか２８回目を盛況のうちに開催することができたことは関係者の皆様の多大な尽力のおかげです。しかし、これから未来に向けて数学コンクールを安定的に運営していくためにはどうすればいいか、いま私たちは大きな岐路に差し掛かっています。