2020
日本数学コンクールのまとめ

第 31回　日本数学コンクール
第 24回　日本ジュニア数学コンクール

ー令和2年10月25日実施ー

第 21回　日本数学コンクール論文賞

日本数学コンクール委員会
名古屋大学

目　　　　次

１．はじめに

日本数学コンクールを開催して--１

日本数学コンクール委員会委員長（名古屋大学副総長）杉山　直

２．日本数学コンクール開催の趣旨--２

３．講評と解説

（１）２０２０年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評----------------------------------３

実行委員会委員長　宇澤　　達

（２）シニア・ジュニア問題１「集合検査法」--４

実行委員会委員　林　正人，田地　宏一，高木　由起子，渡辺　喜長

（３）シニア問題２「トーナメント戦の秘密」--１１

実行委員会委員　岩本　隆宏，田邉　篤，小倉　一輝，奥田　真吾

（４）ジュニア問題２「速決じゃんけん」--１８

実行委員会委員　中島　誠，岡﨑　建太

（５）シニア・ジュニア問題３「企画列車のスタンプラリー」------------------------------２６

実行委員会委員　高田　宗樹，保倉　理美，市川　敏

（６）シニア・ジュニア問題４「凸多角形の面積」--４０

実行委員会委員　伊師　英之，松田　晃孝，川上　祥子，

髙原　文規，小林　亮一

（７）シニア・ジュニア問題５「植物の成長を数式であらわすと？」--------------------４６

実行委員会委員　宇澤　達，渡邉　武志，工藤　教孝，古庄　英和

（８）論文賞テーマ１「対称的な図形」--５０

実行委員会委員　伊師　英之，宇澤　達

（９）論文賞テーマ２「野菜の乱切り」--５１

実行委員会委員　岡﨑　建太

（１０）論文賞テーマ３「自由課題」--５４

実行委員会委員　宇澤　達，伊師　英之

４．受賞者一覧

第３１回日本数学コンクール受賞者一覧---５７

第２４回日本ジュニア数学コンクール受賞者一覧---５８

第２１回日本数学コンクール日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧---------５９

５．日本数学コンクール参加状況

第３１回日本数学コンクール参加状況---６０

第３１回日本数学コンクール参加校一覧--６１

第２４回日本ジュニア数学コンクール参加状況--６２

第２４回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧---------------------------------------６３

６．参加者アンケート調査結果--６４

〇委員会名簿

〇主催、後援団体一覧

〇編集後記

１．はじめに

日本数学コンクールを開催して

日本数学コンクール委員会委員長
名古屋大学副総長　　杉山　直

令和 2 年 10 月に、名古屋大学主催の第 31 回日本数学コンクール、第 24 回日本ジュニア数学コンクールおよび第 21 回日本数学コンクール論文賞を、例年とは少し違った形でしたが無事開催することができ、ご尽力いただいた関係者の皆様に心より感謝申し上げます。

例年は、名古屋・三重・大阪・和歌山・福井の 5 会場で夏休みに開催していましたが、今年度は新型コロナウイルス感染症対策のため、 時期を秋に移した上で、団体戦を中止して、個人戦のみオンラインでの開催といたしました。論文賞においても、共著論文は原則受付中止とせざるを得ませんでした。しかし、一方で、個人戦は去年を大きく上回る参加申込があり、論文賞においても、シニア部門の自由課題は昨年を超えた多くの投稿がありました。多くの高校生・中学生・小学生の皆さんに参加いただけたことを大変うれしく思っています。

本コンクールは学校での数学の試験とは異なり、5 時間半以上の持ち時間の中で、自由な発想、独創的な発想で問題を解いてもらうことが特色です。中高生には経験のない長い時間を数学だけに集中して、問題を解くユニークなコンクールです。特定の 1 問だけに集中しても良いし、複数の問題にチャレンジしても良く、参加者の個性を大事にするコンクールとして企画されています。本年の出題問題も、コロナ禍に題材を求めた「集合検査法」、また「速決じゃんけん」「企画列車のスタンプラリー」「植物の成長を数式であらわすと？」といった身の回りの題材を取り上げたものから、「トーナメント戦の秘密」「凸多角形の面積」など、数学の本質を問いかけるものまで幅広く、数学の楽しさを実感してもらう工夫がちりばめられています。参加者からはいつものように「問題は難しかったけど楽しかった」という感想が多く寄せられ、「数学のイメージがこれまでより広がった」と感じた参加者も多く、いつもと違う考え方で数学の問題を解く面白さを味わってもらう機会になったものと思います。

本コンクールを通じて数学が楽しいと思う若者が育ち、将来数学で学んだことを様々な分野で応用して活躍する人材の育成につながれば、私たちとしても嬉しい限りです。近年の AI や情報技術の発展の中で、深い数学的な知識を有する人材がますます必要になり、活躍する機会も多くなってくると思います。受賞した人も、残念ながら受賞を逃した人も、引き続き、数学の面白さを追求していってください。最後に、お忙しい中で問題を考え、作成していただいた先生方、解答の評価をしていただいた先生方に、心より御礼を申し上げます。

２．日本数学コンクール開催の趣旨

開催の趣旨

今日世界はいろいろな意味で大きな転機に立っています。産業技術の高度化や高度情報化の技術革新は急速な進展を見せていますが，反面，人口爆発，エネルギー問題，環境汚染等人類がかつて経験したことのない複雑多岐にわたる課題に直面しています。このような問題を解決し，将来にわたって人類社会の発達と繁栄を享受していくためにも，総合的，学際的な学術研究の振興が必要です。このことは，必然的に汎科学性を有する数学の一層の飛躍とそれによる新しい科学の発展が求められており，それを支える優れた数学的思考力を持ち，探求心と創造性豊かな人材の育成が急務となっています。

このような情勢にかんがみ，新しい科学と技術の開拓を担う夢とロマンを秘めた青少年の発掘，伸長を図っていくため，中・高校生を対象に，平成 2 年度から「日本数学コンクール」を，同 9 年度からは「日本ジュニア数学コンクール」を，同 12 年度からは「論文賞」を開催してきました。そして同 27 年度からは，協力して解を導き出せる人材の発掘・育成のため「団体戦」を導入しました。私ども委員会は今後とも数学コンクールを実施し，もって世界の学術研究進展の基礎形成に寄与していくものです。

なお，令和 2 年度は，新型コロナウイルス感染症対策のため「団体戦」を中止とし，「個人戦」のみオンラインで開催いたしました。また，論文賞においても「共著論文」は原則受け付けないことといたしました。

特　色

◎自由にゆったり考える

一題に絞っての解答も可能です。参考書やノート，電卓，PC・タブレット等の電子機器等の使用も自由です。

◎楽しい数学の発見

学校における数学の教育課程，教科書にとらわれず，数学の本質に根ざした考えていて楽しい問題を提供します。数理実験も積極的に採り入れます。

◎多彩な才能の評価

優秀な能力をもった生徒，ユニークな発想をもった生徒等様々な参加者の才能を多面的に評価します。特定の一題に集中して素晴らしい発想を出した生徒も顕彰します。

◎優れた人材の育成

日本数学コンクール参加者の数学的な能力，資質を一層高めるために，定期的に，中・高校生を対象に数学の公開講座「数理ウェーブ」を開催しています。

なお，「数理ウェーブ」は一般の方々の参加も認めており，多数の参加があります。

３．講評と解説

（１）２０２０年日本数学コンクール問題の狙いと全体講評

日本数学コンクール実行委員会委員長　宇澤　達
（名古屋大学多元数理科学研究科教授）

シニア・ジュニア問題１「集合検査法」

コロナ問題でウィルスの検査をするときにも使用された「集合検査法」について考えてもらいました．一つひとつを調べるのではなく，まとめて検査して，陽性反応が出た部分を精査するのはどのような場合に有効か，という部分が問題となります．

シニア問題２「トーナメント戦の秘密」

数学の立場から言えば「実力」を正確に定義すること，計測することは大変難しい問題です．ここではトーナメント戦において，順位が逆転する現象について考えてもらいました．日本語でよく言われる「人事を尽くして天命を待つ」，「捨てる神あれば拾う神あり」といった言い回しと合わせて考えると面白いかと思います．

ジュニア問題２「速決じゃんけん」

じゃんけんのルールを変更したらどうなるか，考えてもらう問題です．ゲーム理論として考えても大変興味ある問題だと思います．

シニア・ジュニア問題３「企画列車のスタンプラリー」

各駅で降りなければならない場合に最適な戦略があるかを問う問題です．問題文中で考える「距離」としては，点と点の間の距離の絶対値の他にも様々なバリエーションがあり得ます．観測データが平面上に並んでいるときに，距離の二乗が最小になるような直線を求めよ，と言う問題は最小二乗法と呼ばれます．

シニア・ジュニア問題４「凸多角形の面積」

凸多角形の面積に関する問題です．凸図形の持つ様々な美しい性質は，Minkowski の理論などを経て，現代数学の驚くようなところにも顔を出します．

シニア・ジュニア問題５「植物の成長を数式であらわすと？」

植物を花，葉などの形態によって分類する方法ではなく，植物がどのように生長するかを記述する方法を提案したLindenmeyer の仕事を辿っていく問題です．この理論は，Computer Graphics，言語学といった分野と関係します．また，ノーベル物理学賞を受賞したペンローズ先生のペンローズタイリング，準結晶の問題との興味深い関係もあります．

以上全ての問題について，参加者の皆さん，よく頑張ってくださいました．ありがとうございます．

問題（シニア）

【集合検査法】
中国の武漢市ではコロナ肺炎の流行のため，1月下旬に都市封鎖が実施され，4月になって都市封鎖が解除されました．しかしその後も，中国国内での武漢市へのコロナ肺炎に関する懸念が消えず，武漢市では全市民に対してPCR検査を行うことになりました．すなわち，５月１５日から6月1日までに，989万9828人(ほぼ1,000万人)のPCR検査を行い，300人の無症状感染者を確認しました．ほぼ1,000万人の検体を個別に検査機器で検査すると膨大なコストと時間が必要となります．そこで，複数の被験者を一つのグループにし，このグループに属する被験者の検体を1本の試験管に集めて一度に検査する『集合検査法（Pooling)』とよばれる新たな手法が採用されました．この場合，陽性反応が出たグループに属する被験者は，後であらためてひとりひとり個別に検体を採取した上で検査することで感染者を確定させました．さて，これに関連して問題です．

問１．問題を単純化するために，検体の採取に関するコストは無視し，検査機器のコストのみ問題にします．１つの試験管に対する検査のコストを A とし，感染者の検体が1つでも含まれていたら検査機器は必ず陽性反応を示すとします．

（１）上記の武漢市の例では，人口1000万人に対して，300人の感染者がいたことになります．この例で20人で1つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．このときの第1ステップの検査数と，第2ステップの検査数の最小値と最大値を考えなさい．

（２）上記の例で最大で x 人で1つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．最も検査数が多くなる場合での検査コストの和を考えなさい．

（３）被験者の数を M 人，そのうち，感染者の数を N 人とします．最大で x 人で1つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．最も検査数が多くなる場合の検査コストの和を考えなさい．そして，そのコストを最小化する x の値を求めなさい．

問２．より現実的な状況を考慮するため，問1の条件に加え，１つの検体の採取に関するコストを B とします．最も検査数が多くなる場合の検査コストの和を考えなさい．そして，そのコストを最小化する x の値を求めなさい．

問３．3段階の検査法を考えます．最初の検査では，最大で x_1 人で1つのグループを形成する検査を行います．次の検査では陽性反応が出たグループに属する被験者に対して，最大で x_2 人で1つのグループを形成する検査を行います．最後に2つ目の検査で陽性反応が出たグループに属する被験者に対して，個別の検査を行います．この場合での検体の採取コストを含めない場合と含めた場合の双方について最も検査数が多くなる場合の検査コストの和を考えなさい．さらに，これを最小にする x_1, x_2 の対の値を求めなさい．

問４．問1と同じように，検体の採取に関するコストは無視し，検査機器のコストのみ問題にします．上記と方法で，$x_1, \ldots, x_n$ を用いて $n+1$ 段階の検査方法を考え，最も検査数が多くなる場合の検査機器のコストを考えなさい．そしてそのコストを最小にする n と $x_1, \ldots, x_n$ の値と最小のコストを求めなさい．

解説（シニア）

【集合検査法】現在，日本でも新型コロナウイルスの流行が続いています．その感染の有無を調べる手段としてPCR検査が知られています．最近は，日本でもその検査費用が安くなりましたが，当初は高額でした．例えば，日本国全体で（もしくは，１地方全体で）新型コロナウイルスの患者数ゼロを目指すのであれば，１つの方法として，全国民（全住民）に対してPCR検査を実施し，新型コロナウイルスの感染者を隔離する方法が考えられます．もちろんこのような大規模な検査では，現在のPCR検査の費用でもその検査費用は大きな負担になります．したがって，少しでもその検査費用を抑える必要があります．その検査費用は抑え，効率的にPCR検査を行う方法が集合検査法(Group testing)です．集合検査法は1941年に数学的に定式化され，様々な分野で利用されてきました．例えば遺伝子解析を効率的に行うために利用されました．

集合検査法の新型コロナウイルスのPCR検査法に適用は，2020年5月末に中国の武漢で実施されました．武漢は世界で最初に新型コロナウイルスが爆発的に流行した都市として有名で，その人口はおおよそ１０００万人です．2020年4月の時点で，かなり武漢の新規患者数は減っていましたが，無症状の感染者が後を絶たない状況でした．そのため，全ての無症状感染者を特定するため，武漢の全市民にPCR検査法を実施することになりました．ただ，普通にPCR検査を行うと費用が大変なことになるので，この問題を解決するために，集合検査法が用いられました．どれだけの数の検体をまとめて1つの検査に掛けたかについてはよくわかりません．日本の新聞でも5月末に武漢で集合検査法を用いたPCR検査法が実施されたことが報道されましたが，報道機関によって，そこで説明されている1つの検査にかけた検体の数が異なるからです．また，今回の問題のように3以上のステップを考えたのではなく，２ステップの集合検査法を用いたようです．そして，最適化を考えて第1ステップでまとめて検査を行う検体数を決めたわけでないようです．それでも，普通に検査する場合と比べて著しくコストを抑えることができたと考えられます．

問題文では，集合検査法を用いると，検査コストを節約でき，１つの検体の採取コストは変わらないと書きましたが，実際には，集合検査法を用いると1つの検体の採取コストも少し節約できます．武漢での検査では1つの容器に直接複数の採取した検体を入れました．このような大規模な検査の場合，検体を保管する容器の蓋を開けて，そこに検体を入れる手間を無視できません．この作業を複数の検体でまとめて行えれば，検体を採取して容器に入れる1つの検体当たりの手間は少し節約できます．事実，武漢での検査では検体の採取を担当した看護師の方の負担は相当だったようで，まとめて，検体を1つの容器に入れることで少しは手間が省けたのかもしれません．これらの検査で無症状感染者が特定でき，現在では武漢では新型コロナウイルスの感染リスクは大幅に小さくなっています．

なお，集合検査法を新型コロナウイルスのPCR検査法に適用する場合，最適な手法は，対象となる集団の中の陽性者の比率に依存します．一般には，事前に陽性者の比率を完全に同定することは不可能ですが，事前に一定数のサンプルに対して検査を行うことで，陽性者の比率を推定することができます．したがって，現実に集合検査法を新型コロナウイルスのPCR検査法に適用する場合，その推定値を用いることになります．

また，現実の検査装置の場合，あまりにたくさんの被験者の検体をまとめて検査すると，１つでも陽性の検体があった場合に正しく陽性の検体の存在を検出できるとは限りません．検査機器の性能から，同時に検査できる検体の数に上限があると考えられますが，今回の問題では，理想的な場合を考え，その上限は存在しないと仮定しました．以下，簡単に問題の解答例を記載します．

解答例

問１．(１) 第 1 ステップ 1000 万/20=50 万．50 万件の検査

第 2 ステップ 300/20=15 なので最小の検査数は１５グループに２０人ずつ感染者がいるときに実現される。すなわち，300 件の検査数である．

最大の検査数は 300 グループに 1 人ずつ感染者がいるときに実現される。すなわち，300 × 20=6000 件の検査数である．

(２) $300 > 10^7/x$，すなわち，$x \geqq 33334$ とする．最大のコストは全てのグループから感染者が出た場合に実現される．このときのコストは $A(\lceil 10^7/x \rceil + 10^7)$ である．なお，$\lceil x \rceil$ は x を超えない最大の整数である．

$300 \leqq 10^7/x$，すなわち，$x \leqq 33333$ とする．最大のコストは 300 グループから感染者が出た場合に実現される．このときのコストは $A(\lceil 10^7/x \rceil + 300x)$ である．

(３) $M/x \geqq N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．最悪の場合を考えると, 陽性となるグループの数は N である．2 回目の検査数は xN である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + xN$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + xN)$ である．

$M/x < N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．最悪の場合を考えると全てのグループで陽性となる．2 回目の検査数は M である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + M$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + M)$ である．$M/x + xN = N((M/N)/x + x)$ を最小にする x は，$\sqrt{M/N}$ である．そのときの値は $A(M/\sqrt{M/N} + N\sqrt{M/N}) = 2A\sqrt{MN}$ である．

問２．$M/x \geq N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．検体の数は M である．最悪の場合を考えると，陽性となるグループの数は N である．2 回目の検査数は xN である．検体の数も xN である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + xN$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + xN) + B(M + xN)$ である．$M/x < N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．検体の数は M である．最悪の場合を考えると全てのグループで陽性となる。2 回目の検査数は M である．検体の数は M である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + M$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + M) + 2BM$ である．

$$F(x) = A(M/x + xN) + B(M + xN) = BM + AM/x + (A + B)Nx$$

の最小化を考える．$x = \sqrt{AM/(A + B)N}$ のとき，上記の値は最小値を取る．最小値は $BM + 2\sqrt{AM(A + B)N}$ である．

問３．検体の採取コストを含めない場合を考える．このときの検査数の和は $M/x_1 + x_1N/x_2 + x_2N = M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/1)$ となる．x_2 について最小化すると $M/x_1 + 2\sqrt{x_1}N$ となる．これを x_1 について微分すると，$-M/x_1^2 + \sqrt{x_1}^{-1}N$ となる．これが 0 になるのは $x_1^{3/2} = M/N$ となる．すなわち，$x_1 = (M/N)^{2/3}, x_2 = \sqrt{x_1} = (M/N)^{1/3}$ のとき，コストの最小値として $3AM^{1/3}N^{2/3}$ を得る．

検体の採取コストを含めた場合のコストは以下となる．

$$A(M/x_1 + x_1N/x_2 + x_2N) + B(M + x_1N + x_2N)$$
$$= BM + AM/x_1 + BNx_1 + Ax_1N/x_2 + (A + B)Nx_2.$$

x_2 について最小化すると，$BM + AM/x_1 + BNx_1 + 2\sqrt{Ax_1(A+B)}N$ を得る．x_1 について微分すると，$-AM/x_1^2 + BN + \sqrt{A(A+B)}\sqrt{x_1}^{-1}N$ を得る．これが 0 になるのは x_1 が $BNx_1^2 + \sqrt{A(A+B)}Nx_1^{3/2} - AM = 0$ を満し，$x_2 = \sqrt{\frac{Ax_1}{A+B}}$ を満たすときである．

問４．検体の採取コストを含めない場合を考える．このときの検査数の和は $M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/x_3 + \ldots + x_n/1)$ である．$(M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/x_3 + \ldots + x_n/1))/(n+1)$ は $M/x_1, N(x_1/x_2), N(x_2/x_3), \ldots, Nx_n/1$ に関する算術平均である．
$M/x_1, N(x_1/x_2), N(x_2/x_3), \ldots, Nx_n/1$ に関する幾何平均は $(MN^n)^{\frac{1}{n+1}}$ である．算術平均と幾何平均の関係より，

$$(M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/x_3 + \ldots + x_n/1))/(n+1) \geq (MN^n)^{\frac{1}{n+1}} \tag{1}$$

となり，$(M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/x_3 + \ldots + x_n/1)/(n+1)$ は $M/x_1, N(x_1/x_2), N(x_2/x_3), \ldots, Nx_n/1$ がすべて等しいときに，等号が成り立つ．すなわち，$(M/x_1 + N(x_1/x_2 + x_2/x_3 + \ldots + x_n/1)$ の最小値は $(n+1)(MN^n)^{\frac{1}{n+1}} = N(n+1)(\frac{M}{N})^{\frac{1}{n+1}}$ である．これの対数をとすると、$\log N + \log(n+1) + \frac{1}{n+1}\log(\frac{M}{N})$ である．n について微分すると，$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\log(\frac{M}{N})$ を得る．この値が 0 になるのは $n+1 = \log(\frac{M}{N})$ のときである．すなわち，最小値は

$$N(n+1)(\frac{M}{N})^{\frac{1}{n+1}} = N\log(\frac{M}{N})(\frac{M}{N})^{\frac{1}{\log(\frac{M}{N})}} = Ne\log(\frac{M}{N}) \tag{2}$$

である．よって，最小のコストは $ANe\log(\frac{M}{N})$ である．

問題（ジュニア）

【集合検査法】

中国の武漢市ではコロナ肺炎の流行のため，1月下旬に都市封鎖が実施され，4月になって都市封鎖が解除されました．しかしその後も，中国国内での武漢市へのコロナ肺炎に関する懸念が消えず，武漢市では全市民に対して PCR 検査を行うことになりました．すなわち，５月１５日から６月１日までに，989 万 9828 人 (ほぼ 1,000 万人) の PCR 検査を行い，300 人の無症状感染者を確認しました．ほぼ 1,000 万人の検体を個別に検査機器で検査すると膨大なコストと時間が必要となります．そこで，複数の被験者を一つのグループにし，このグループに属する被験者の検体を 1 本の試験管に集めて一度に検査する『集合検査法（Pooling)』とよばれる新たな手法が採用されました．この場合，陽性反応が出たグループに属する被験者は，後であらためてひとりひとり個別に検体を採取した上で検査することで感染者を確定させました．さて，これに関連して問題です．

問１．問題を単純化するために，検体の採取に関するコストは無視し，検査機器のコストのみ問題にします．１つの試験管に対する検査のコストを A とし，感染者の検体が 1 つでも含まれていたら検査機器は必ず陽性反応を示すとします．

（１）上記の武漢市の例では，人口 1000 万人に対して，300 人の感染者がいたことになります．この例で 20 人で 1 つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．このときの第 1 ステップの検査数と，第 2 ステップの検査数の最小値と最大値を考えなさい．

（２）上記の例で最大で x 人で 1 つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．最も検査数が多くなる場合での検査コストの和を考えなさい．

（３）被験者の数を M 人，そのうち，感染者の数を N 人とします．最大で x 人で 1 つのグループを形成する上記の集合検査法を行うとします．最も検査数が多くなる場合の検査コストの和を考えなさい．

問２．より現実的な状況を考慮するため，問 1 の条件に加え，１つの検体の採取に関するコストを B とします．最も検査数が多くなる場合の検査コストの和を考えなさい．

問３．$\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{C}{x}}\right)^2 \geqq 0$ に注意して，不等式 $x+\frac{C}{x} \geqq 2\sqrt{C}$ を示しなさい．そして，その等号が成立するための条件を導きなさい．

問４．問 1 及び問 2 の設定において，それぞれのコストを最小化する x の値を求めなさい．

解説（ジュニア）

【集合検査法】

現在，日本でも新型コロナウイルスの流行が続いています．その感染の有無を調べる手段として PCR 検査が知られています．最近は，日本でもその検査費用が安くなりましたが，当初は高額でした．例えば，日本国全体で（もしくは，１地方全体で）新型コロナウイルスの患者数ゼロを目指すのであれば，１つの方法として，全国民（全住民）に対して PCR 検査を実施し，新型コロナウイルスの感染者を隔離する方法が考えられます．もちろんこのような大規模な検査では，現在の PCR 検査の費用でもその検査費用は大きな負担になります．したがって，少しでもその検査費用を抑える必要があります．その検査費用は抑え，効率的に PCR 検査を行う方法が集合検査法 (Group testing) です．集合検査法は 1941 年に数学的に定式化され，様々な分野で利用されてきました．例えば遺伝子解析を効率的に行うために利用されました．

集合検査法の新型コロナウイルスの PCR 検査法に適用は，2020 年 5 月末に中国の武漢で実施されました．武漢は世界で最初に新型コロナウイルスが爆発的に流行した都市として有名で，その人口はおおよそ１０００万人です．2020 年 4 月の時点で，かなり武漢の新規患者数は減っていましたが，無症状の感染者が後を絶たない状況でした．そのため，全ての無症状感染者を特定するため，武漢の全市民に PCR 検査法を実施することになりました．ただ，普通に PCR 検査を行うと費用が大変なことになるので，この問題を解決するために，集合検査法が用いられました．どれだけの数の検体をまとめて 1 つの検査に掛けたかについてはよくわかりません．日本の新聞でも 5 月末に武漢で集合検査法を用いた PCR 検査法が実施されたことが報道されましたが，報道機関によって，そこで説明されている 1 つの検査にかけた検体の数が異なるからです．また，今回の問題のように最適化を考えて，第 1 ステップでまとめて検査を行う検体数を決めたわけでないようです．それでも，普通に検査する場合と比べて著しくコストを抑えることができたと考えられます．

問題文では，集合検査法を用いると，検査コストを節約でき，１つの検体の採取コストは変わらないと書きましたが，実際には，集合検査法を用いると 1 つの検体の採取コストも少し節約できます．武漢での検査では 1 つの容器に直接複数の採取した検体を入れました．このような大規模な検査の場合，検体を保管する容器の蓋を開けて，そこに検体を入れる手間を無視できません．この作業を複数の検体でまとめて行えれば，検体を採取して容器に入れる 1 つの検体当たりの手間は少し節約できます．事実，武漢での検査では検体の採取を担当した看護師の方の負担は相当だったようで，まとめて，検体を 1 つの容器に入れることで少しは手間が省けたのかもしれません．これらの検査で無症状感染者が特定でき，現在では武漢では新型コロナウイルスの感染リスクは大幅に小さくなっています．

なお，集合検査法を新型コロナウイルスの PCR 検査法に適用する場合，最適な手法は，対象となる集団の中の陽性者の比率に依存します．一般には，事前に陽性者の比率を完全に同定することは不可能ですが，事前に一定数のサンプルに対して検査を行うことで，陽性者の比率を推定することができます．したがって，現実に集合検査法を新型コロナウイルスの PCR 検査法に適用する場合，その推定値を用いることになります．

また，現実の検査装置の場合，あまりにたくさんの被験者の検体をまとめて検査すると，１つでも陽性の検体があった場合に正しく陽性の検体の存在を検出できるとは限りません．検査機器の性能から，同時に検査できる検体の数に上限があると考えられますが，今回の問題では，理想的な場合を考え，その上限は存在しないと仮定しました．以下，簡単に問題の解答例を記載します．

解答例

問１.（１）第１ステップ 1000 万/20=50 万．50 万件の検査

第２ステップ

300/20=15 なので最小の検査数は１５グループに２０人ずつ感染者がいるときに実現される。すなわち，300 件の検査数である．

最大の検査数は 300 グループに１人ずつ感染者がいるときに実現される。すなわち，300 × 20=6000 件の検査数である．

（２）$300 > 10^7/x$，すなわち，$x \geqq 33334$ とする．最大のコストは全てのグループから感染者が出た場合に実現される．このときのコストは $A(\lceil 10^7/x \rceil + 10^7)$ である．なお，$\lceil x \rceil$ は x を超えない最大の整数である．

$300 \leqq 10^7/x$，すなわち，$x \leqq 33333$ とする．最大のコストは 300 グループから感染者が出た場合に実現される．このときのコストは $A(\lceil 10^7/x \rceil + 300x)$ である．

（３）$M/x \geqq N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．最悪の場合を考えると,陽性となるグループの数は N である．2 回目の検査数は xN である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + xN$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + xN)$ である．

$M/x < N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．最悪の場合を考えると全てのグループで陽性となる．2 回目の検査数は M である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + M$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + M)$ である．$M/x + xN = N((M/N)/x + x)$ を最小にする x は，$\sqrt{M/N}$ である．そのときの値は $A(M/\sqrt{M/N} + N\sqrt{M/N}) = 2A\sqrt{MN}$ である．

問２．$M/x \geq N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．検体の数は M である．最悪の場合を考えると，陽性となるグループの数は N である．2 回目の検査数は xN である．検体の数も xN である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + xN$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + xN) + B(M + xN)$ である．$M/x < N$ のとき，1 回目の検査数は $\lceil M/x \rceil$ である．検体の数は M である．最悪の場合を考えると全てのグループで陽性となる。2 回目の検査数は M である．検体の数は M である．よって，全検査数は $\lceil M/x \rceil + M$ である．そのコストは $A(\lceil M/x \rceil + M) + 2BM$ である．

問３．$\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{C}{x}}\right)^2 = x + \frac{C}{x} - 2\sqrt{C} \geqq 0$ を得る．よって不等式 $x + \frac{C}{x} \geqq 2\sqrt{C}$ を得た．等号成立条件は，$\sqrt{x} - \sqrt{\frac{C}{x}} = 0$ のときである．すなわち，$x = \sqrt{C}$ のとき，等号が成立する．

問 4．問 2 の設定の場合のみ考える．

$$F(x) = A(M/x + xN) + B(M + xN) = BM + AM/x + (A+B)Nx$$

の最小化を考える．$x = \sqrt{AM/(A+B)N}$ のとき，上記の値は最小値を取る．最小値は $BM + 2\sqrt{AM(A+B)N}$ である．

問１の設定の場合の最適化は $B = 0$ を代入すると得られる．

問題

トーナメント戦の秘密

ＡＢＣＤ４人のトーナメント戦を考えよう．ただし，以下の条件（ア）（イ）を満たすとする．

（ア）Ａの強さをａ，Ｂの強さをｂ，Ｃの強さをｃ，Ｄの強さをｄとする．（ただし$0 < a < b < c < d$）
（イ）強さx の人が強さy の人に勝つ確率は $\dfrac{x}{x+y}$ とする．

このとき，４人の強さの順に，優勝する確率が大きいとは限らない．これを“優勝の逆転”ということにする．

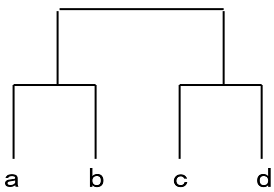
また，強さ１位の人で結果が１位から４位になる確率のうち，結果が１位になる確率が最大とは限らない．これを“１位の逆転”ということにする．強さ２位の人で結果が１位から４位になる確率のうち，結果が２位になる確率が最大とは限らない．これを“２位の逆転”ということにする．以下同様に，“３位の逆転”“４位の逆転”を決める．

（１）下図の対称配列で，ａ＝１，ｂ＝２，ｃ＝３とする．ｄがいくつのときに“優勝の逆転”が起こるか．
また，ａ＝１，ｂ＝２，ｄ＝ｃ＋１とするときはどうか．これらが何を意味するか論じよ．

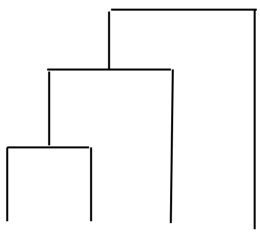
（２）下図の非対称配列で，ａ＝１，ｂ＝２，ｃ＝３，ｄ＝４のときに，４人の組合せをどうすればこの“優勝の逆転”が起こるか．また，強さを変えて何が言えるのか論じよ．

（３）“１位の逆転”，“２位の逆転”，“３位の逆転”，“４位の逆転”についても，対称配列や非対称配列で強さを（非対称では組合せも）変えて何が言えるか論じよ．

対称配列



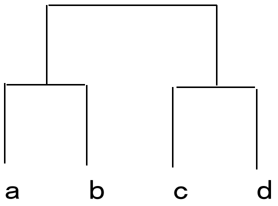
非対称配列



解説

４チームのトーナメント戦の逆転現象について

（１）優勝の逆転（強さの順に優勝する確率が大きいとは限らない）について　まず対称形で考える。



ここで実力aのチームが, 実力ｂのチームに勝つ確率＝$\frac{a}{a+b}$なので

実力ａのチームが優勝する確率$\mathrm{P(a)}$は

$$\frac{a}{a+b}\left(\frac{c}{c+d}\frac{a}{a+c}+\frac{d}{c+d}\frac{a}{a+d}\right)=\frac{a}{a+b}\frac{a}{c+d}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{d}{a+d}\right)$$

実力ｂのチームが優勝する確率$\mathrm{P(b)}$（a, b の対称性から）

$$\mathrm{P(b)}=\frac{b}{a+b}\frac{b}{c+d}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{d}{b+d}\right)$$

実力ｃのチームが優勝する確率$\mathrm{P(c)}$は

$$\mathrm{P(c)}=\frac{c}{c+d}\left(\frac{a}{a+b}\frac{c}{a+c}+\frac{b}{a+b}\frac{c}{b+c}\right)=\frac{c}{a+b}\frac{c}{c+d}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$

実力ｄのチームが優勝する確率$\mathrm{P(d)}$（c, d の対称性から）

$$\mathrm{P(d)}=\frac{d}{a+b}\frac{d}{c+d}\left(\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}\right)$$

さて

$$\mathrm{P(a)}>\mathrm{P(b)}\Leftrightarrow a^2\left(\frac{c}{a+c}+\frac{d}{a+d}\right)>b^2\left(\frac{c}{b+c}+\frac{d}{b+d}\right)$$

$$\mathrm{f(x)}=x^2\left(\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}\right)=c\left(x-c+\frac{c^2}{x+c}\right)+d\left(x-d+\frac{d^2}{x+d}\right)$$

$$\mathrm{f'(x)}=\mathrm{c}+\mathrm{d}-\frac{c^3}{(x+c)^2}-\frac{d^3}{(x+d)^2}=c\frac{(x+c)^2-c^2}{(x+c)^2}+d\frac{(x+d)^2-d^2}{(x+d)^2}>0\ \ (\mathrm{x}>0)$$

よって増加関数なので, **実力ａのチームと実力ｂのチームの間に逆転現象はない。**（平方完成でも出る）

同様に**実力ｃのチームと実力ｄのチームの間に逆転現象はない。**

c>b のとき

$$\mathrm{P(b)}>\mathrm{P(c)}\Leftrightarrow b^2\left(\frac{c}{b+c}+\frac{d}{b+d}\right)>c^2\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$Q(b)=b^2\left(\frac{c}{b+c}+\frac{d}{b+d}\right),Q(c)=c^2\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$

（１）前半　a=1, b=2, c=3 のときP(c) は一定で，P(b)はｄに関する増加関数で,

$$Q(2)=2^2\left(\frac{3}{2+3}+\frac{d}{2+d}\right)=4\left(\frac{3}{5}+\frac{d}{2+d}\right)=\frac{4(6+8d)}{5(2+d)},Q(3)=3^2\left(\frac{1}{1+3}+\frac{2}{2+3}\right)=9\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)=\frac{117}{20}$$

$Q(2)>Q(3)\Leftrightarrow 80(6+8d)>5\cdot117(2+d)\Leftrightarrow 16(6+8d)>117(2+d)\Leftrightarrow 96+128d>234+117d\Leftrightarrow$
$11d>138\Leftrightarrow d>\frac{138}{11}$

６利根川遼さん、２０永井駿匡さん、４３松原一斗さん、４９安田優葵さん、５８荒川純輝さん、６３西内悠さん、６６佐鳥空さん、１０７森哉翔さん、１１２野々山一颯さん、１１３富山理月さんたちが解いていました。

ｄを整数に限ってエクセルの表で見ると

A	b	c	d	Q(b)	Q(c)
1	2	3	4	5.06667	5.85
1	2	3	10	5.73333	5.85
1	2	3	11	5.78462	5.85
1	2	3	12	5.82857	5.85
1	2	3	13	5.86667	5.85

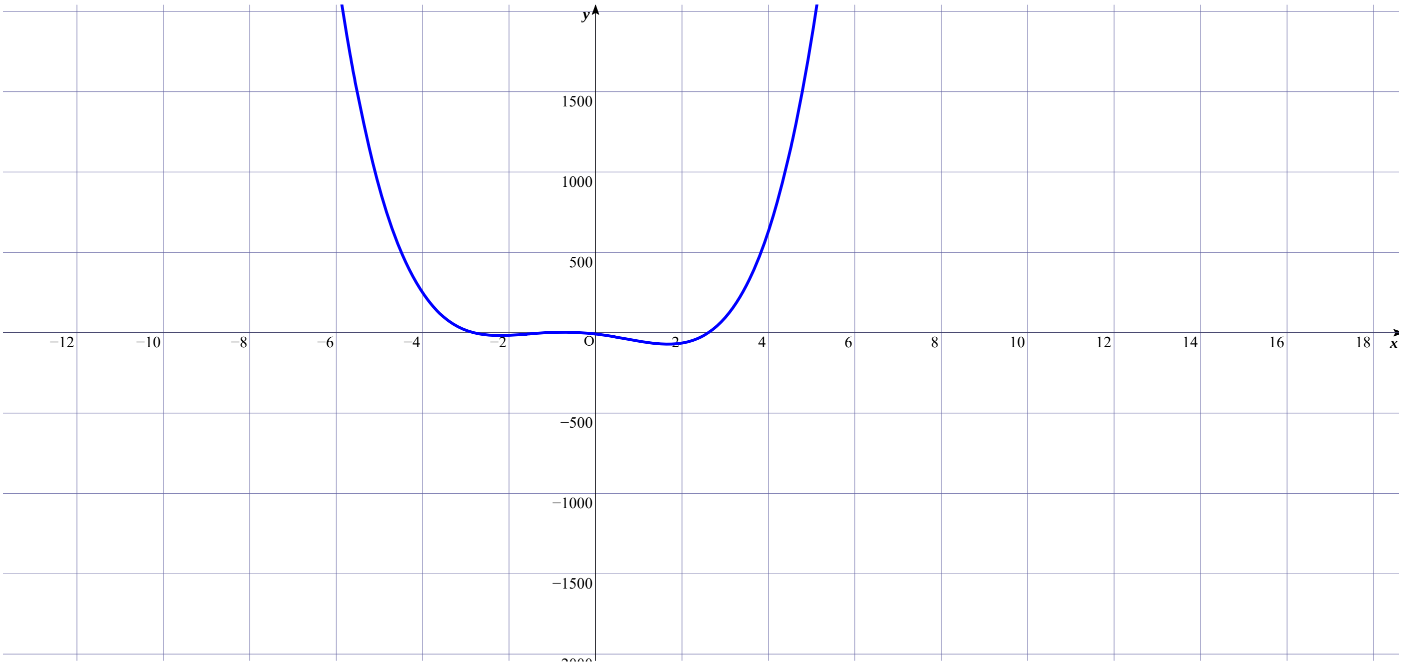
でｄ＝１３で逆転（実力３位の方が実力２位より優勝する確率が大きい）が始まることが分かります。

（１）後半　a=1, b=2, d=c+1 のとき

$$Q(2)=2^2\left(\frac{c}{2+c}+\frac{c+1}{c+3}\right)=4\frac{2c^2+6c+2}{(c+2)(c+3)}=\frac{4(2c^2+6c+2)}{(c+2)(c+3)},Q(c)=c^2\left(\frac{1}{1+c}+\frac{2}{2+c}\right)=c^2\frac{3c+4}{(c+1)(c+2)}$$

$Q(2)>Q(c)\Leftrightarrow\frac{4(2c^2+6c+2)}{(c+2)(c+3)}>c^2\frac{3c+4}{(c+1)(c+2)}\Leftrightarrow\frac{4(2c^2+6c+2)}{(c+3)}>c^2\frac{3c+4}{(c+1)}\Leftrightarrow 4(c+1)(2c^2+6c+2)>(c+3)(3c^3+4c^2)\Leftrightarrow 3c^4+13c^3+12c^2-8c^3-32c^2-32c-8<0\Leftrightarrow 3c^4+5c^3-20c^2-32c-8<0$

この４次関数のグラフをグラフ作成ソフトで書かせてみると以下のようになります。



計算では、$f(c)=3c^4+5c^3-20c^2-32c-8$とおくと

$$f'(c)=12c^3+15c^2-40c-32=12(c-2)^3+39(c-2)^2+38(c-2)+44>0(c\geqq 2)$$

$c\geqq 2$で$f(c)$は増加関数で、$f(2)=-64,f(3)=94$　なので整数に限ると逆転現象は起こらない。

整数に限らなければ、２の近い部分で逆転は起きる。

この４次関数を３９中田匠海さん、１０８長谷川莉久さんが出していました。

７７南奎佑さんは同等の式処理が出来ており、近似値を出していました。

ただし、$\frac{d}{b+d}\to 1(d\to\infty)$なので増加だが、有限確定値なので、超えない場合がある。

（例）a=1, b=2, c=7 のとき

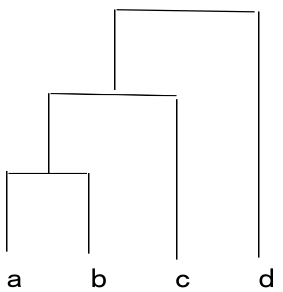
a	B	c	D	Q(b)	Q(c)
1	2	7	8	6.311111	17.01389
1	2	7	100	7.03268	17.01389
1	2	7	1000	7.103127	17.01389

1	2	7	10000	7.110311	17.01389
1	2	7	100000	7.111031	17.01389
1	2	7	1000000	7.111103	17.01389
1	2	7	10000000	7.11111	17.01389

で超えない。

つまり、実力の上がいても、それがさらに上の相手と初戦で戦うことによって、逆転できるが、そのためには自分とすぐ上の差が、上２人の差より相対的に小さいことが必要であることになります。

（２）非対称形　まず以下のように配置した場合の優勝の確率を比較しよう。



実力 a のチームが優勝する確率$P(a)$は

$$\frac{a}{a+b}\frac{a}{a+c}\frac{a}{a+d}=\frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$

実力 b のチームが優勝する確率$P(b)$（a, b の対称性から）

$$P(b)=\frac{b}{b+a}\frac{b}{b+c}\frac{b}{b+d}=\frac{b^3}{(b+a)(b+c)(b+d)}$$

実力 c のチームが優勝する確率$P(c)$は

$$P(c)=\left(\frac{a}{a+b}\frac{c}{a+c}+\frac{b}{a+b}\frac{c}{b+c}\right)\frac{c}{c+d}=\frac{c^2}{(a+b)(c+d)}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$

実力 d のチームが優勝する確率$P(d)$

$$P(d)=\frac{a}{a+b}\frac{c}{a+c}\frac{d}{c+d}+\frac{a}{a+b}\frac{a}{a+c}\frac{d}{a+d}+\frac{b}{a+b}\frac{c}{b+c}\frac{d}{c+d}+\frac{b}{a+b}\frac{b}{b+c}\frac{d}{b+d}$$

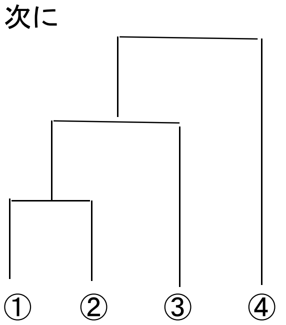
$$=\frac{d}{a+b}\left\{\frac{ac}{(a+c)(c+d)}+\frac{a^2}{(a+c)(a+d)}+\frac{bc}{(b+c)(c+d)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+d)}\right\}$$

$P(a), P(b)$については同様に, 対応する関数が

$$\frac{x^3}{(x+c)(x+d)}=x-(c+d)+\frac{(c^2+cd+d^2)x+(c+d)cd}{(x+c)(x+d)}=x-(c+d)+\frac{c^3}{(c-d)(x+c)}+\frac{d^3}{(d-c)(x+d)}$$

が$x>0$で増加関数になり逆転しない。

次に



として１，２，３，４を入れかえてエクセル表で様子を見てみよう。

a	b	c	d	P(a)	P(b)	P(c)	P(d)	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(2)-P(1)	P(3)-P(2)	P(4)-P(3)	優勝の逆転	優勝最大
1	2	3	4	0.016667	0.088889	0.278571	0.615873	0.016667	0.088889	0.278571	0.615873	0.072222	0.189683	0.337302	なし	4
1	2	4	3	0.016667	0.088889	0.406349	0.488095	0.016667	0.088889	0.488095	0.406349	0.072222	0.399206	-0.08175	34	3
1	3	2	4	0.016667	0.192857	0.155556	0.634921	0.016667	0.155556	0.192857	0.634921	0.138889	0.037302	0.442063	なし	4
1	3	4	2	0.016667	0.192857	0.419048	0.371429	0.016667	0.371429	0.192857	0.419048	0.354762	-0.17857	0.22619	23	4
1	4	2	3	0.016667	0.304762	0.16	0.518571	0.016667	0.16	0.518571	0.304762	0.143333	0.358571	-0.21381	34	3
1	4	3	2	0.016667	0.304762	0.295714	0.382857	0.016667	0.382857	0.295714	0.304762	0.36619	-0.08714	0.009048	23	2
2	1	3	4	0.088889	0.016667	0.278571	0.615873	0.016667	0.088889	0.278571	0.615873	0.072222	0.189683	0.337302	なし	4
2	1	4	3	0.088889	0.016667	0.406349	0.488095	0.016667	0.088889	0.488095	0.406349	0.072222	0.399206	-0.08175	34	3
2	3	1	4	0.088889	0.192857	0.056667	0.661587	0.056667	0.088889	0.192857	0.661587	0.032222	0.103968	0.46873	なし	4
2	3	4	1	0.088889	0.192857	0.487619	0.230635	0.230635	0.088889	0.192857	0.487619	-0.14175	0.103968	0.294762	12	4
2	4	1	3	0.088889	0.304762	0.061111	0.545238	0.061111	0.088889	0.545238	0.304762	0.027778	0.456349	-0.24048	34	3
2	4	3	1	0.088889	0.304762	0.364286	0.242063	0.242063	0.088889	0.364286	0.304762	-0.15317	0.275397	-0.05952	12:34	3
3	1	2	4	0.192857	0.016667	0.155556	0.634921	0.016667	0.155556	0.192857	0.634921	0.138889	0.037302	0.442063	なし	4
3	1	4	2	0.192857	0.016667	0.419048	0.371429	0.016667	0.371429	0.192857	0.419048	0.354762	-0.17857	0.22619	23	4
3	2	1	4	0.192857	0.088889	0.056667	0.661587	0.056667	0.088889	0.192857	0.661587	0.032222	0.103968	0.46873	なし	4
3	2	4	1	0.192857	0.088889	0.487619	0.230635	0.230635	0.088889	0.192857	0.487619	-0.14175	0.103968	0.294762	12	4
3	4	1	2	0.192857	0.304762	0.07381	0.428571	0.07381	0.428571	0.192857	0.304762	0.354762	-0.23571	0.111905	23	2
3	4	2	1	0.192857	0.304762	0.24127	0.261111	0.261111	0.24127	0.192857	0.304762	-0.01984	-0.04841	0.111905	12:23	4
4	1	2	3	0.304762	0.016667	0.16	0.518571	0.016667	0.16	0.518571	0.304762	0.143333	0.358571	-0.21381	34	3
4	1	3	2	0.304762	0.016667	0.295714	0.382857	0.016667	0.382857	0.295714	0.304762	0.36619	-0.08714	0.009048	23	2
4	2	1	3	0.304762	0.088889	0.061111	0.545238	0.061111	0.088889	0.545238	0.304762	0.027778	0.456349	-0.24048	34	3
4	2	3	1	0.304762	0.088889	0.364286	0.242063	0.242063	0.088889	0.364286	0.304762	-0.15317	0.275397	-0.05952	12:34	3
4	3	1	2	0.304762	0.192857	0.07381	0.428571	0.07381	0.428571	0.192857	0.304762	0.354762	-0.23571	0.111905	23	2
4	3	2	1	0.304762	0.192857	0.24127	0.261111	0.261111	0.24127	0.192857	0.304762	-0.01984	-0.04841	0.111905	12:23	4
			平均	0.150794	0.150794	0.25	0.448413	0.08545	0.189418	0.303968	0.421164	0.103968	0.11455	0.117196		

（色の説明）黄色＝強さ１のチームが優勝する確率　　強さの順に並び変え　　その差の逆転が桃色

緑色＝強さ２のチームが優勝する確率

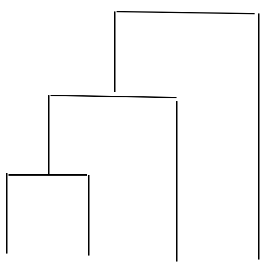
青色＝強さ３のチームが優勝する確率

白色＝強さ４のチームが優勝する確率

かなりの頻度で逆転が起こる。２か所で逆転が起こる場合もあり、２位のチームによる大逆転もある。

平均すると、場所的な有利さが見えてくる。１回戦で戦うａとｂは対等（約０．１５）だが、２回戦登場は０．２５、３回戦登場は約０．４５と跳ね上がる。これはシード校の有利さを示している。

強さを変えてｃ（３）、ｄ（ｘ）、ｂ（２）、ａ（１）で考えた（７７番：南奎佑さん）を紹介する。



c　x　2　1

3　d　b　a

$$P(a)=\frac{3}{3+x}\left(\frac{3}{3+2}\times\frac{1}{3+1}+\frac{2}{3+2}\times\frac{1}{2+1}\right)+\frac{x}{3+x}\left(\frac{x}{x+2}\times\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\times\frac{1}{2+1}\right)$$

$$=\frac{3}{3+x}\frac{17}{60}+\frac{x}{(3+x)}\frac{3x+2x+2}{3(x+2)(x+1)}=\frac{51(x^2+3x+2)+20(5x^2+2x)}{60(x+1)(x+2)(x+3)}$$

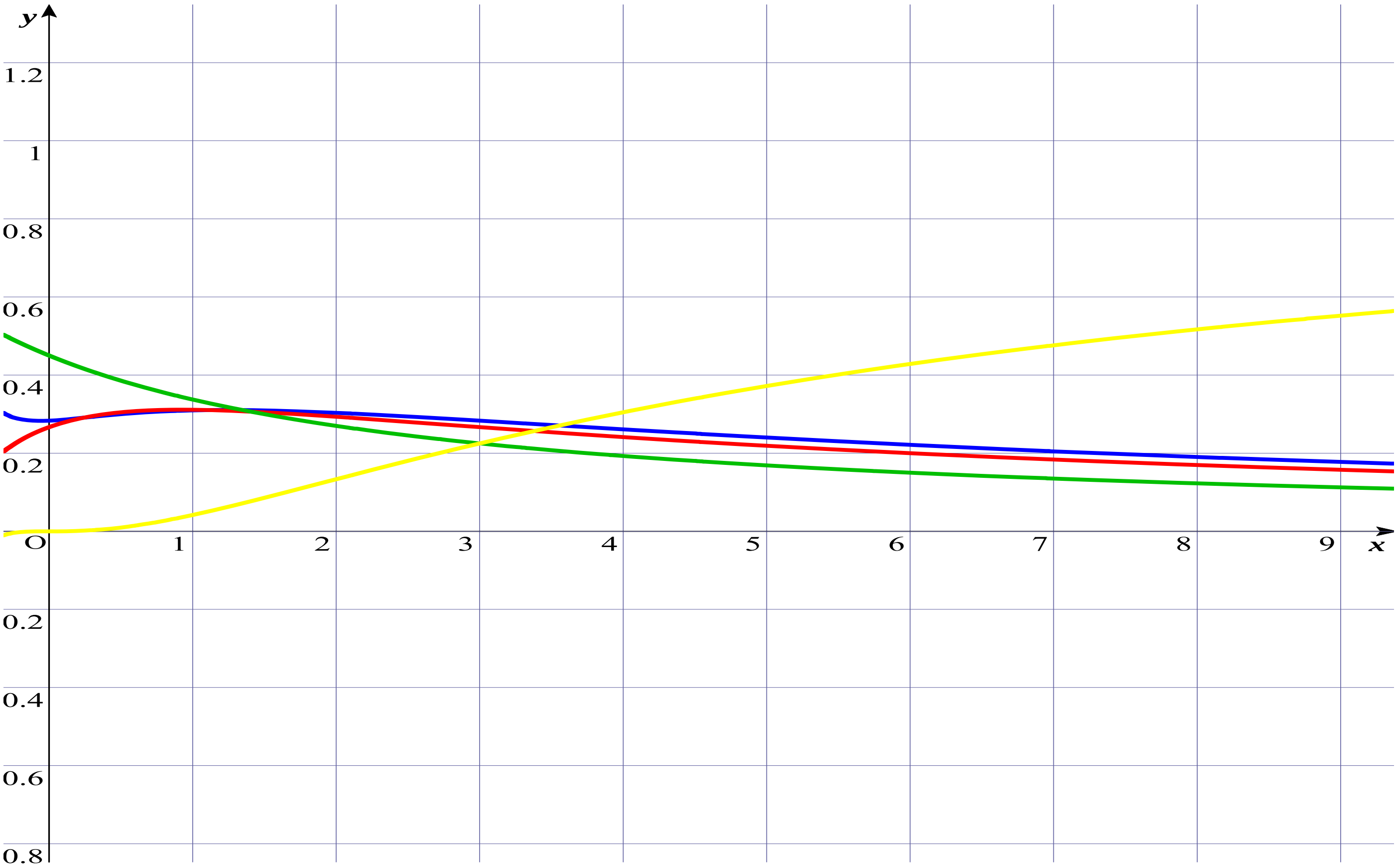
$$=\frac{151x^2+193x+102}{60(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$P(b)=\frac{3}{3+x}\left(\frac{2}{3+2}\right)\frac{2}{2+1}+\frac{x}{3+x}\left(\frac{2}{x+2}\right)\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3(3+x)}\left(\frac{6}{5}+\frac{2x}{x+2}\right)=\frac{2(6x+12+10x)}{15(x+2)(x+3)}=\frac{8(4x+3)}{15(x+2)(x+3)}$$

$$P(c)=\frac{3}{3+x}\left(\frac{3}{3+2}\right)\frac{3}{3+1}=\frac{27}{20(x+3)}$$

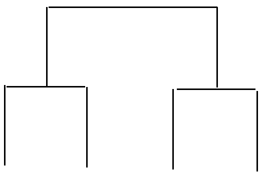
$$P(d)=\frac{x}{3+x}\left(\frac{x}{2+x}\right)\frac{x}{1+x}=\frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

これをグラフ作成ソフトで書かせてみると以下のようになる。



x＞4では$P(d)>P(a)>P(b)>P(c)$についての考察が出来ていました。

（3） 3位の逆転について（1）対称形



a　b　c　d

実力bのチームについて考える。

1位になる確率P(1) は，1回戦，2回戦ともに勝つ確率で

$$\mathrm{P}(1)=\mathrm{P}(\mathrm{b})=\frac{b}{a+b}\left(\frac{c}{c+d}\frac{b}{c+b}+\frac{d}{c+d}\frac{b}{b+d}\right)=\frac{b}{a+b}\frac{b}{c+d}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{d}{b+d}\right)$$

2位になる確率P(2) は，1回戦で勝ち，2回戦で負ける確率で

$$\mathrm{P}(2)=\frac{b}{a+b}\left(\frac{c}{c+d}\frac{c}{c+b}+\frac{d}{c+d}\frac{d}{b+d}\right)=\frac{b}{a+b}\frac{1}{c+d}\left(\frac{c^2}{b+c}+\frac{d^2}{b+d}\right)$$

3位になる確率P(3) は，1回戦で負け，3位決定戦で勝つ確率で

$$\mathrm{P}(3)=\frac{a}{a+b}\left(\frac{d}{c+d}\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}\frac{b}{b+d}\right)$$

4位になる確率P(4) は，1回戦で負け，3位決定戦で負ける確率で

$$\mathrm{P}(4)=\frac{a}{a+b}\left(\frac{d}{c+d}\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+d}\frac{d}{b+d}\right)$$

配列の変更では、１２３４配列のみ３位になる確率が４番めで、１３２４や１４２３配列では３位になる確率は３番めである。

a	b	c	d	b １位	b ２位	b ３位	b ４位	３位の順位
1	2	3	4	0.24127	0.425396825	0.12381	0.209524	4
1	3	2	4	0.364286	0.385714286	0.135714	0.114286	3
1	4	2	3	0.487619	0.312380952	0.125714	0.074286	3

これについての時間の関係か解答はありませんでした。
なお、｢ゆらぎ｣と｢遅れ｣不確実さの数理　大平徹（新潮選書）先生によると、１６人トーナメントの計算結果では、最も強いプレーヤーのみならず、２番手から５番手に強いプレーヤーも１位になる確率が、下位の順位になる確率より高いことも分かっている。

問題

[速決じゃんけん]

※解答作成時に参考にした文献, web サイト等がある場合には参考文献として文献名, URL 等を明記してください.

n 人のプレイヤー $A_1, \cdots, A_n$ で "速決じゃんけん" と "通常じゃんけん" をおこなうことを考えます. ただし, 2 つの "じゃんけん" の定義は以下の通りとします.

"速決じゃんけん"

(S-I) 各プレイヤーは指 0 本, 指 1 本, 指 2 本の手のいずれか選んで出す.

(S-II) 出た指の数の総和を 3 で割ったあまりの数の本数を出した人を勝ち (勝者) とし, 残りの人は負け (敗者) とする.

(S-III) 全員が勝ち, または負けの場合あいことする.

"通常じゃんけん"

(T-I) 各プレイヤーはグー, チョキ, パーの手のいずれかを選んで出す.

(T-II) 出された手が 2 種類の場合,

(グー, チョキ) のときグーの手を出した人を勝ち (勝者), チョキの手を出した人を負け (敗者),
(チョキ, パー) のときチョキの手を出した人を勝ち (勝者), パーの手を出した人を負け (敗者),
(パー, グー) のときチョキの手を出した人を勝ち (勝者), パーの手を出した人を負け (敗者)
とする.

(T-III) 出された手が 1 種類, または 3 種類の場合はあいことする.

以下 "じゃんけん" において 1 度手を出すことを "じゃんけん" 1 回と数えるものとします.

(1) $n = 2$ のときを考えます. プレイヤー A_1, A_2 がそれぞれ唯一の勝者になることを目標としているとき " 速決じゃんけん" ではあいことなることを示してください.

(2) $n = 3$ のとき, 次のようにして唯一の勝者 (優勝者) を決めるものとします.

(a) 3 人プレイヤーがいる時は "速決じゃんけん" を行う.

(b) 敗者になっていないプレーヤーが 2 人いる場合は "通常じゃんけん" を行う.

(c) (a) または (b) の結果 1 人の勝者が出た場合, その 1 人が優勝者である.

(d) (a), (b) の結果優勝者が決まっていない場合は, 敗者になっていない人数に応じて, 再び (a), (b) を行う.

ただし各プレイヤーはそれぞれの手を確率 $\frac{1}{3}$ で出すものとします.

(i) "速決じゃんけん" を用いることで "通常じゃんけん" のみを用いる ((a) で "速決じゃんけん" を "通常じゃんけん" で置き換えたもの) よりも優勝者が早く決まる, ということの数学的な定義を考えてください.

(ii) (i) で与えた定義に従って, "速決じゃんけん" は "通常じゃんけん" よりも優勝者が早く決まることを示してください.

(3) $n \geqq 4$ の場合にも "速決じゃんけん" は "通常じゃんけん" よりも優勝者が早く決まることを示してください.

(4) $n = 3$ の場合に, 新しい "じゃんけん" を色々考えて, "速決じゃんけん", "通常じゃんけん" と比べて優勝者が早く決まるかどうか調べてください.

解説

[速決じゃんけん]

解説. 2 人でじゃんけんするのと, 3 人でじゃんけんして優勝者を決めるのでは 3 人の方が優勝者が決まるまでに時間がかかりそうなことは直感的に想像できます.

しかしこれを数学的に説明するのは少し難しいです. 優勝者が決まるまでにかかるじゃんけんの回数というものを比較することを考えてみましょう. 単純に (A_1, A_2) の出した手と (A_1, A_2, A_3) の出した手で勝敗を比較してみましょう.

	A_1	A_2	A_3	結果 (A_1, A_2)	結果 (A_1, A_2, A_3)
1	グー	グー	グー	あいこ	あいこ
2	グー	グー	チョキ	あいこ	2 人勝ち
3	グー	グー	パー	あいこ	1 人勝ち
4	グー	パー	グー	1 人勝ち	1 人勝ち
5	グー	パー	パー	1 人勝ち	2 人勝ち
6	グー	パー	チョキ	1 人勝ち	あいこ
7	グー	チョキ	グー	1 人勝ち	2 人勝ち
8	グー	チョキ	パー	1 人勝ち	あいこ
9	グー	チョキ	チョキ	1 人勝ち	1 人勝ち
10	パー	グー	グー	1 人勝ち	1 人勝ち
11	パー	グー	チョキ	1 人勝ち	あいこ
12	パー	グー	パー	1 人勝ち	2 人勝ち
13	パー	パー	グー	あいこ	2 人勝ち
14	パー	パー	パー	あいこ	あいこ
15	パー	パー	チョキ	あいこ	1 人勝ち
16	パー	チョキ	グー	1 人勝ち	あいこ
17	パー	チョキ	パー	1 人勝ち	1 人勝ち
18	パー	チョキ	チョキ	1 人勝ち	2 人勝ち
19	チョキ	グー	グー	1 人勝ち	2 人勝ち
20	チョキ	グー	チョキ	1 人勝ち	1 人勝ち
21	チョキ	グー	パー	1 人勝ち	あいこ
22	チョキ	パー	グー	1 人勝ち	あいこ
23	チョキ	パー	パー	1 人勝ち	1 人勝ち
24	チョキ	パー	チョキ	1 人勝ち	2 人勝ち
25	チョキ	チョキ	グー	あいこ	2 人勝ち
26	チョキ	チョキ	パー	あいこ	1 人勝ち
27	チョキ	チョキ	チョキ	あいこ	あいこ

2 人の結果ではあいこになるが, 3 人のじゃんけんでは勝負が決まるようなことがあります (2,3,13,15,25,26 の 6 通り). このように出した手と決着するまでの回数を単純に比較してもわかりません. 一方で 3 人より 2 人の方が先に 1 人の勝者が決まることもあります (18 通り). そこで 1 回のじゃんけんでの勝者の人数を比較すると 1 人 (18 通り, 9 通り), 2 人以下 (18 通り, 18 通り) となり, 常に 2 人の方が先に勝者が決まるような組

み合わせが存在します.

もう少し正確には手の出し方を入れ替えると, 1 回のじゃんけんの結果で残る人数が常に

$$2\text{ 人じゃんけん} \leqq 3\text{ 人じゃんけん}$$

とすることができます. これはじゃんけんの回数ごとの参加人数のグラフを描くと, 必ず 2 人じゃんけんのグラフが 3 人じゃんけんの下にあるようにできるということを言っています. 優勝者が決まるということは参加者が 1 人になるということですから, このような組み合わせ (カップリング) を行うことで, 2 人じゃんけんの方が 3 人じゃんけんよりも先に優勝者が決まることが言えます.

しかしこのカップリングの方法は強力ですが, じゃんけんの早さの比較としては調べるものが多すぎのように思えます. もう少し簡単な比較としては決着するまでにかかるじゃんけんの回数の確率がよいと思えます. 抽象的な確率論を用いると

$$P(\text{通常じゃんけんで } k \text{ 回目までに優勝者が決まる}) \leqq P(\text{速攻じゃんけんで } k \text{ 回目までに優勝者が決まる})$$

ということが言えると「抽象的な確率空間」で (途中のじゃんけんのカップリングは無視して) カップリングが存在することが言えます.

解答. 以下速攻じゃんけんのルールを S ルール, 通常じゃんけんのルールを T ルールと呼ぶことにします.

(1) A_1, A_2 の出す手の本数の組みを (i, j) で表すことにする.

$$(0,0) \Rightarrow \text{あいこ}$$
$$(0,1),(0,2) \Rightarrow A_2\text{の勝ち}$$

となり, A_1 は 0 本の手を出した場合は勝つことができないため, 1 本か 2 本を出さなければいけない. これは A_2 も同様なので A_1, A_2 は共に $1, 2$ のいずれかとなる.

$$(1,1),(1,2),(2,1),(2,2) \Rightarrow \text{あいこ}$$

であるので, 決着がつかないことになる.

(2) (i) k 回目の "じゃんけん"で優勝者が決まる確率をそれぞれ S_k, T_k としたときに任意の $k \geqq 1$ に対して

$$S_1 + \cdots + S_k \geqq T_1 + \cdots + T_k$$

が成り立つときに "優勝者が早く決まる"と定義する.

(ii) 3 人の手の出し方を書き出すと, 1 回の速攻じゃんけんで

- 1 人の勝者が決まる確率 $= \frac{12}{27}$
- 2 人の勝者が決まる確率 $= \frac{6}{27}$
- あいことなる確率 $= \frac{9}{27}$

となることがわかる. 同様に通常じゃんけんでは

- 1 人の勝者が決まる確率 $= \frac{9}{27}$
- 2 人の勝者が決まる確率 $= \frac{9}{27}$
- あいことなる確率 $= \frac{9}{27}$

となる. また 2 人の通常じゃんけんでは

- 1 人の勝者が決まる確率 $= \frac{6}{9} = \frac{18}{27}$.
- あいことなる確率 $= \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$.

である.

ここで 2 人のじゃんけんを考える時も 3 人目のじゃんけんの手も考慮に入れておくことで組み合わせの数を合わせることにしておきます. このとき S ルールで 3 人からじゃんけんして 1 人になる組み合わせは 18 通り, 2 人以下になるのは 18 通り, T ルールで 3 人からじゃんけんして 1 人になる組み合わせは 9 通りであり, 2 人以下になるのは 18 通りなので, 3 人いるときは S ルールの方が T ルールよりもじゃんけんの結果で常に少ない人数になるカップリングが作られる.

また S ルールで 2 人残っているとする. T ルールで 3 人いるときは組み合わせの数で比較すると T ルールで人数が減るとき S ルールで人数が減るカップリングが存在する.

よって常に「S ルールで勝ち残る人数」$\leqq$「T ルールで勝ち残る人数」が成り立つので速攻じゃんけんの方が早く優勝者が決まることがわかる.

(3) n 人でそれぞれのじゃんけんをして k 人の勝者が出る確率 $p^S_{n,k}$, $p^T_{n,k}$ を考える. 任意の $m \leqq n$, $k \leqq m$ に対して $p^S_{m,1} + \cdots + p^S_{m,k} \geqq p^T_{n,1} + \cdots + p^T_{n,k}$ が成り立てば S ルールの人数の方が T ルールより常に人数が少なくなるようにカップリングができる.

T ルール $(n \to k)$ k 人の選び方が ${}_nC_k$ 通りあり, 勝つ手の出し方が 3 通りあるので確率は $\frac{3{}_nC_k}{3^n}$

S ルール $(n \to k)$ 次のような $n \geqq 4$ の場合に考える.

$k = 1$ のとき 1 人勝つプレイヤーの選び方は n 通りある. A_1 が勝つとし, A_1 が出した手で場合わけする.

以下自然数 n と $i = 0, 1, 2$ に対して

$$n \equiv i \pmod 3$$

と書いて n を 3 で割った余りが i となることを表すことにする.

(1-i) A_1 が 0 の手を出して勝つのは, 敗者の $n-1$ 人のうち ℓ 人が 1, $n-1-\ell$ 人が 2 を出したときである. ただし

$$\ell + 2(n-1-\ell) = 2n - \ell - 2 \equiv 0 \pmod 3$$

である.

$$\ell \equiv \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ 0 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

(1-ii) A_1 が 1 の手を出して勝つのは, 敗者の $n-1$ 人のうち ℓ 人が 2, $n-1-\ell$ 人が 0 を出したときである. ただし

$$1 + 2\ell \equiv 1 \pmod 3$$

である. よって n に依らず

$$\ell \equiv 0 \pmod 3$$

である.

(1-iii) A_1 が 2 の手を出して勝つのは, 敗者の $n-1$ 人のうち ℓ 人が 1, $n-1-\ell$ 人が 0 を出したときである．ただし

$$2+\ell \equiv 2 \pmod 3$$

である．よって n に依らず

$$\ell \equiv 0 \pmod 3$$

である．

これらをまとめると $n \geqq 4$ のとき $4n$ 通り以上の手の出し方があることがわかる．($n=5$ のときも $\ell=2$ 人の選び方が 6 通りあることに注意しておく.) これにより $p^S_{n,1} \geqq p^T_{n,1}$ が成り立つことがわかる．

(k) k 人 $(2 \leq k \leq n-1)$ が勝ち残る場合を考える． 勝ち残るプレーヤーの選び方は ${}_nC_k$ 通りある．以下 $A_1, \cdots, A_k$ が勝つとして考える．

(k-i) $A_1, \cdots, A_k$ が 0 を出して勝つのは, 敗者のうち ℓ 人が 1, $n-k-\ell$ 人が 2 を出した場合である．ただし

$$\ell + 2(n-k-\ell) = 2n - l - 2k \equiv 0 \pmod 3$$

(k-i-a) $k \equiv 0 \pmod 3$ の場合,

$$\ell \equiv \begin{cases} 0 & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 1 & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

(k-i-b) $k \equiv 1 \pmod 3$ の場合,

$$\ell \equiv \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ 0 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 2 & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

(k-i-c) $k \equiv 2 \pmod 3$ の場合,

$$\ell \equiv \begin{cases} 2 & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ 1 & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ 0 & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

(k-ii) $A_1, \cdots, A_k$ が 1 を出して勝つのは, 敗者のうち ℓ 人が 2, $n-k-\ell$ 人が 0 を出した場合である．ただし

$$k + 2\ell \equiv 1 \pmod 3$$

(k-ii-a) $k \equiv 0 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 2 \pmod 3$$

(k-ii-b) $k \equiv 1 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 0 \pmod 3$$

(k-ii-c) $k \equiv 2 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 1 \pmod 3$$

である.

(k-iii) $A_1, \cdots, A_k$ が 2 を出して勝つのは, 敗者のうち ℓ 人が 1, $n-k-\ell$ 人が 0 を出した場合である. ただし

$$2k + \ell \equiv 2 \pmod 3$$

(k-iii-a) $k \equiv 0 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 2 \pmod 3$$

(k-ii-b) $k \equiv 1 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 0 \pmod 3$$

(k-ii-c) $k \equiv 2 \pmod 3$ の場合, n に依らず

$$\ell \equiv 1 \pmod 3$$

である.

これを一覧にすると次のようになる.

n 人中 k 人の勝者の選び方は ${}_nC_k$ 通りある. 残りの敗者の選び方をみる.

- 1,2,3: 敗者の選び方は 8 通り以上ある.
- 4,5,6: 敗者の選び方は 4 通り以上ある.
- 7,8,9: $n-k \geqq 4$ の場合, 14 通り以上ある. $n-k=1$ のとき, 敗者の選び方は 2 通りである.
- 10,11,12: $n-k \geqq 4$ の場合, 敗者の選び方は 18 通り以上ある. $n-k=1$ のとき, 敗者の選び方は存在しない.
- 13,14,15: 敗者の選び方は 6 通り以上ある.
- 16,17,18: 敗者の選び方は 6 通り以上ある.
- 19,20,21: 敗者の選び方は 5 通り以上ある.
- 22,23,24: $n-k \geqq 4$ の場合, 敗者の選び方は 14 通り以上ある. $n-k=1$ のとき, 敗者の選び方は 2 通りである.
- 25,26,27: 敗者の選び方は 8 通り以上ある.

ここで 1,2,3,4,5,6,13,14,15,16,17,18,25,26,27 の場合は

$$p^S_{n,k} \geqq p^T_{n,k}$$

となることがわかる.

また 7,8,9,10,11,12,22,23,24 の場合, $n-k \geq 4$ の場合は

$$p^S_{n,k} \geqq p^T_{n,k}$$

となっている. また $k=n-1$ のとき,

- $n \equiv 0 \pmod 3$ のときは

$$p^S_{n,1} + p^S_{n,n-1} \geqq p^T_{n,1} + p^T_{n,n-1}$$

となる.

番号	勝ち手	$n \pmod 3$	$k \pmod 3$	$\ell \pmod 3$	$n-k-\ell \pmod 3$	$n-k \geqq 1$ の最小
1	0	0	0	0	0	3
2	1	0	0	2	1	3
3	2	0	0	1	2	3
4	0	0	1	1	1	2
5	1	0	1	0	2	2
6	2	0	1	0	2	2
7	0	0	2	2	2	4
8	1	0	2	1	0	1
9	2	0	2	1	0	1
10	0	1	0	2	2	4
11	1	1	0	2	2	4
12	2	1	0	2	2	4
13	0	1	1	0	0	3
14	1	1	1	0	0	3
15	2	1	1	0	0	3
16	0	1	2	1	1	2
17	1	1	2	1	1	2
18	2	1	2	1	1	2
19	0	2	0	1	1	2
20	1	2	0	2	0	2
21	2	2	0	1	1	2
22	0	2	1	2	2	4
23	1	2	1	0	1	1
24	2	2	1	0	1	1
25	0	2	2	0	0	3
26	1	2	2	1	2	3
27	2	2	2	1	2	3

- $n \equiv 1 \pmod 3$ のときは

$$p^S_{n,1} + p^S_{n,n-1} \geqq p^T_{n,1} + p^T_{n,n-1}$$

となる.

- $n \equiv 1 \pmod 3$ のときは

$$p^S_{n,1} + p^S_{n,n-1} \geqq p^T_{n,1} + p^T_{n,n-1}$$

となる.

これにより任意の $n \geq 3,\ k \leqq n-1$ に対して

$$p^S_{n,1} + \cdots + p^S_{n,k} \geqq p^T_{n,1} + \cdots + p^T_{n,k}$$

がわかる.

次に任意の $n \geqq m \geq 2,\ 1 \leq k \leq m-1$ に対して

$$p^T_{m,1} + \cdots + p^T_{m,k} \geqq p^T_{n,1} + \cdots + p^T_{n,k}$$

となることを示す.

$m = n-1$ の場合に示せば十分.

$$\begin{aligned} 3\left({}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_k\right) &\geqq {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_k \\ &= 1 + 2\left({}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{k-1}\right) + {}_{n-1}C_k \end{aligned}$$

から示された.

(別定義) (2) k 人でじゃんけんをして優勝者が決まるまでにかかる回数の期待値をそれぞれ $E^{(k)}_S,\ E^{(k)}_T$ と表すことにし,

$$E^{(k)}_S \leqq E^{(k)}_T$$

がなりたつときに "優勝者が早く決まる" と定義する.

(3)(i)

$$\begin{aligned} E^{(2)}_S &= 1 \times p^S_{2,1} + E^{(2)}_S \times p^S_{2,2} \\ E^{(3)}_S &= 1 \times p^S_{3,1} + E^{(3)}_S \times p^S_{3,2} + E^{(3)}_S \times p^S_{3,3} \end{aligned}$$

これを解くと $E^{(2)}_S = \frac{3}{2}$. $E^{(3)}_S = 2$. 同様に $E^{(2)}_T = \frac{3}{2},\ E^{(3)}_T = \frac{9}{4}$.

(ii) (i) と同様に議論すればよい. 計算には上の解説で求めた $p^S_{n,k},\ p^T_{n,k}$ を用いる.

(4) 例: 3 人でグーかパーを出し, 手の数が少ないものを勝者とする "少数決じゃんけん" を考えると優勝者は早く決まる.

問題（シニア）

企画列車のスタンプラリー

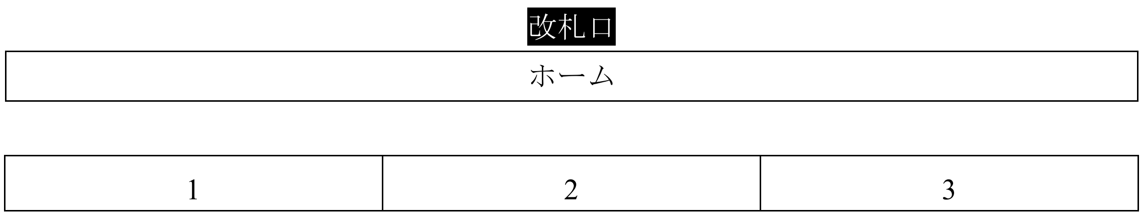
ある企画列車があり，乗客には行き先は知らされていない．乗客は途中のすべての停車駅において，改札口に設置された記念スタンプを集めて旅行をする．この企画列車では，コロナ感染症拡大防止のため，最初に座った席から席の変更をすることはできない．また，この企画列車の各車両には，両側の中央 1 カ所にドアがあり，乗客は乗車している車両のドアから必ず降りる．乗客は以下の**[戦略 1]**をとるものとして，(1)～(5)の問題に答えなさい．

[戦略 1]　途中の停車駅のホームにおいて，降りるドアから改札口までの（車両と平行な）距離の期待値をできるだけ短くするように，どの車両に乗るかを選択する．

ただし，1 車両の長さを a とし，m 両編成の列車の k 両目に乗ることを想定して，降りるドアから改札口までの距離を $d(k)$ と表す $(k=1,2,3,\cdots,m)$．ここでは，各車両にあるドア前以外に改札口は設置されていないものとし，すべての停車駅のうち k 両目ドア前に改札口がある割合を p_k とする．

準備　**始点と終点の駅のホームにおける移動は考えない．** まず，$m=3$ のときを考える．簡単のため，**準備**および(1)～(4)の問題では停車駅には改札口が 1 つしかないものとする．

i) 最初に停車する駅で，下図のように 2 両目ドア前に改札口があると，各車両を降りてから改札口までの距離はそれぞれ，$d(1)=d(3)=a, d(2)=0$ となる．



ii) **表 1 の Case 1** の場合，すべての停車駅で 2 両目ドア前に改札口があることを意味する．このとき，k 両目ドアを降りてから 2 両目ドア前にある改札口までの距離を，添え字を使って $d_2(k)$ と書けば，一般に，$d_j(k)=|j-k|a$ である $(j=1,2,3,\cdots,m)$．よって，k 両目ドアを降りてから改札口までの距離の**期待値**はそれぞれ，

$$E[d(1)]=E[d(3)]=\sum_{j=1}^{3} d_j(3)\times p_j = d_1(3)\times 0 + d_2(3)\times 1 + d_3(3)\times 0 = 2a\times 0 + a\times 1 + 0\times 0 = a\,,$$

$$E[d(2)]=\sum_{j=1}^{3} d_j(2)\times p_j = d_1(2)\times 0 + d_2(2)\times 1 + d_3(2)\times 0 = a\times 0 + 0\times 1 + a\times 0 = 0,$$

となる．これらの大小関係は，$E[d(2)]<E[d(1)]=E[d(3)]$ となっているから，乗客の**[戦略 1]**にもとづくと，2 両目に乗ると良いことが分かる．

iii) **表 1 の Case 2** の場合，「1 両目ドア前に改札口がある駅の割合」と「3 両目ドア前に改札口がある駅の割合」が等しいことを意味する．このとき，各車両を降りてから改札口までの距離の**期待値**はそれぞれ，

$$E[d(1)] = E[d(3)] = \sum_{j=1}^{3} d_j(1) \times p_j = 0 \times \frac{1}{2} + a \times 0 + 2a \times \frac{1}{2} = a,$$

$$E[d(2)] = \sum_{j=1}^{3} d_j(1) \times p_j = a \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + a \times \frac{1}{2} = a,$$

となる．これらはすべて相等しく，[**戦略 1**]にもとづくと，どの車両に乗っても良いことが分かる．

iv) iii)のとき，乗客は特定の車両に偏って乗車しないと考えられる．一方，鉄道会社は，

[**戦略 2**]　乗客が特定の車両で密になるのを避けて，快適な旅を提供する．

に従って，駅の改札口を配置するものとする．従って，$E[d(1)] = E[d(2)] = E[d(3)] =$ 一定となるように，改札口を配置する．つまり，[**戦略 2**]にもとづくと，**表 1** の Case 2 のような割合で改札口を配置させれば良い．

表 1　途中の停車駅における改札口の位置とその割合(分布)

改札口の位置	1 両目ドア前	2 両目ドア前	3 両目ドア前
Case 1	0	1	0
Case 2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Case 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

改札口の位置	1 両目ドア前	2 両目ドア前	$\cdots$	m 両目ドア前
Case 3’	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{1}{m}$

(1) **表 1** の Case 3 の場合，$E[d(1)], E[d(2)], E[d(3)]$ を求めなさい．このとき，乗客の[**戦略 1**]にもとづくと，どの車両に乗ると良いかを答えなさい．

(2) **表 1** の Case 3’ の場合, どの車両のドア前にも改札口が等しい割合で配置されている. 車両数が $m = 4, 5, \cdots$ のとき，$E[d(1)], E[d(2)], \cdots, E[d(m)]$ を求め，どの車両に乗ると良いかを[**戦略 1**]にもとづいて答えなさい．

(3) 車両数が $m = 4, 5, \cdots$ のとき，$E[d(1)] = E[d(2)] = \cdots = E[d(m)] =$ 一定となるような改札口の位置とその割合(分布)はあるかを調べなさい. このとき, [**戦略 1**]にもとづくと, どの車両に乗ると良いかも答えなさい.

(4) 車両数が $m = 4, 5, \cdots$ のとき, 鉄道会社の[**戦略 2**]にもとづくと, どのように改札口の位置とその割合(分布)を与えると良いかを答えなさい.

(5) 改札口が 2 つある場合を考える．[**戦略 2**]にもとづくと，どのように改札口の位置とその割合(分布)を与えると良いかを答えなさい．

(6) 以上を参考にして，一般の路線で，改札口をどのように配置すれば，車両間の乗客数が偏らずに一定になると考えられるかを論じなさい．

問題（ジュニア）

企画列車のスタンプラリー

ある企画列車があり，乗客には行き先は知らされていない．乗客は，N 個の停車駅ごとに改札口に設置された記念スタンプを集めて旅行をする．この企画列車では，コロナ感染症拡大防止のため，最初に座った席から席の変更をすることはできない．また，この企画列車の各車両には，両側の中央 1 カ所にドアがあり，乗客は乗車している車両のドアから必ず降りる．乗客は以下の**[戦略 1]**をとるものとして，(1)～(5)の問題に答えなさい．

[戦略 1]　途中の停車駅のホームにおいて，降りるドアから改札口までの（車両と平行な）距離の総和（以降，距離の総和と記載）をできるだけ短くするように，どの車両に乗るかを選択する．

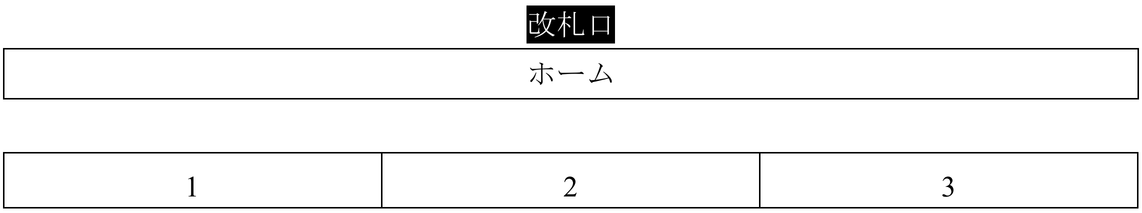
ここでは，1 車両の長さを a とし，m 両編成の列車の k 両目に乗ることを想定して，終点までの距離の総和を $d(k)$ と表す. 例えば, 2 番目の停車駅で k 両目のドアから改札口までの距離を $d_2(k)$ と書くことにすると，

$$d(k) = d_1(k) + d_2(k) + \cdots + d_N(k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

と表される．簡単のため，駅には改札口が 1 つしかないものとしてよい．ただし，各車両にあるドア前以外に改札口は設置されていないものとする．

準備　始点と終点の駅のホームにおける移動は考えない． まず，$m = 3$ のときを考える．

i)　最初に停車する駅で，下図のように 2 両目ドア前に改札口があると，各車両を降りてから改札口までの距離はそれぞれ，$d_1(1) = a, d_1(2) = 0, d_1(3) = a$ となる．



ii)　**表 1** の **Case 1** の場合，$N = 53$ のすべての停車駅で 2 両目ドア前に改札口があることを意味する．このとき，1 両目の乗客はすべての停車駅で，距離 a だけ離れている「隣の 2 両目ドア前の改札口」に向かう．一方，2 両目の乗客はすべての停車駅で降りるドア前の改札口に向かうことになり，車両と平行な移動はない．3 両目の乗客は，1 両目の乗客と同様にすべての停車駅で，距離 a だけ離れている「隣の 2 両目ドア前の改札口」に向かう．従って各車両を降りてから改札口までの距離の総和はそれぞれ，

$$d(1) = d_1(1) + d_2(1) + \cdots + d_{53}(1) = a + a + \cdots + a = 53a$$
$$d(2) = d_1(2) + d_2(2) + \cdots + d_{53}(2) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$
$$d(3) = d_1(3) + d_2(3) + \cdots + d_{53}(3) = a + a + \cdots + a = 53a$$

となる．$d_1(2) < d_1(1) = d_1(3)$ だから，乗客の**[戦略 1]**にもとづくと，2 両目に乗ると良いことが分かる．

iii)　**表 1** の **Case 2** の場合，「1 両目ドア前に改札口がある停車駅の数」と「3 両目ドア前に改札口がある停車駅の数」が同数 n であることを意味し，停車駅の総数は，$N = n + n = 2n$ である．このとき，1 両目の

乗客は n 個の停車駅では降りる1両目ドア前の改札口に向かうことになり，車両と平行な移動はない．他の n 個の停車駅では，距離 $2a$ だけ離れている「3 両目ドア前の改札口」に向かう．一方，2 両目の乗客はすべての停車駅で，距離 a だけ離れている「降りる隣の車両のドア前にある改札口」に向かう．3 両目の乗客は，1 両目の乗客と同様に，n 個の停車駅では降りる 3 両目ドア前の改札口に向かうことになり，車両と平行な移動はない．他の n 個の停車駅では，距離 $2a$ だけ離れている「1 両目ドア前の改札口」に向かう．よって，各車両を降りてから改札口までの距離の総和は，それぞれ，

$$d(1) = n\times 0 + 0\times a + n\times 2a = 2na$$
$$d(2) = n\times a + 0\times 0 + n\times a = 2na$$
$$d(3) = n\times 2a + 0\times a + n\times 0 = 2na$$

となり，すべて相等しい．乗客の[**戦略 1**]にもとづくと，どの車両に乗っても良いことが分かる．

iv) iii)のとき，乗客は特定の車両に偏って乗車しないと考えられる．一方，鉄道会社は，

[**戦略 2**]　乗客が特定の車両で密になるのを避けて，快適な旅を提供する．

に従って，駅の改札口を配置するものとする．従って，$d(1) = d(2) = d(3) =$ 一定となるように，改札口を配置する．つまり，[**戦略 2**]にもとづくと，以下の**表 1** の **Case 2** のように改札口を配置させれば良い．

表 1　途中の停車駅における改札口の位置とその個数

改札口の位置	1 両目ドア前	2 両目ドア前	3 両目ドア前	停車駅の総数 N
Case 1	0	53	0	53
Case 2	n	0	n	$2n$
Case 3	n	n	n	$3n$

改札口の位置	1 両目ドア前	2 両目ドア前	$\cdots$	m 両目ドア前	停車駅の総数 N
Case 3’	n	n	$\cdots$	n	mn

(1) **表 1** の Case 3 の場合，$d(1), d(2), d(3)$ を求めなさい．このとき，乗客の[**戦略 1**]にもとづくと，どの車両に乗ると良いかを答えなさい．

(2) **表 1** の Case 3’ の場合，途中の $N = mn$ 個の停車駅において，どの車両のドア前にも改札口が等しく n 個ずつある．車両数が $m = 4,5,\cdots$ のとき，$d(1), d(2), \cdots, d(m)$ を求め，どの車両に乗ると良いかを[**戦略 1**]にもとづいて答えなさい．

(3) 車両数が $m = 4,5,\cdots$ のとき，$d(1) = d(2) = \cdots = d(m) =$ 一定となるような改札口の配置はあるかを調べなさい．このとき，[**戦略 1**]にもとづくと，どの車両に乗ると良いかも答えなさい．

(4) 車両数が $m = 4,5,\cdots$ のとき，鉄道会社の[**戦略 2**]にもとづくと，どのような改札口の配置をさせると良いかを答えなさい．

(5) 以上を参考にして，一般の路線で，改札口をどのように配置すれば，車両間の乗客数が偏らずに一定になると考えられるかを論じなさい．

解説（シニア・ジュニア）

企画列車のスタンプラリーの解説

2020 年はコロナ禍がなければオリンピックイヤーだったはずで、多くの外国人のお客さんを東京にお迎えして、楽しい夏になるはずだったのですが、大変な年になってしまいました。外国人のお客さんは、都内を移動する際に地下鉄に乗るわけですが、ほとんどの場合は降りる駅の改札口は未知であるので、どうやったら地下鉄の特定の車両が込み合うこともなく、快適に過ごしてもらえるかを考えてもらおうと思った出題でした。数学の問題として定式化して解いてもらえるように設定されたのが、「企画列車のスタンプラリー」です。まずは、改札口を 1 つ設置する場合の議論を行います。

ジュニアの問題では、多くの参加者に問題を解いてもらうために、「期待値」を導入せずに、距離の和そのものを求めてもらいました。従って、ジュニアとシニアの問題の違いは、終点までの停車駅における改札口の数の与え方が以下のように異なるだけで、本質的には同じことを問うています。

ジュニア；企画列車が停車する駅の数 N を与えて、m 両編成の列車の k' 両目ドア前に改札口がある駅の数を**表**に記載しました $(k'=1,2,\cdots,m)$。「企画列車のスタンプラリー」の問題では、終点までの停車駅において、乗車している k 両目ドア前から改札口までの（車両と平行な）移動距離を足し合わせて、距離の総和

$$d(k)=d_1(k)+d_2(k)+\cdots+d_N(k)$$

を算出することを求めています $(k=1,2,\cdots,m)$。そこでは、結局、乗車している車両ドアから改札口までの距離 $|k-k'|a$ と k' 両目ドア前に改札口がある駅の数を掛け合わすことによって得られます。

シニア；m 両編成の列車の k' 両目ドア前に改札口がある駅の割合（確率）を**表**に記載しました。ここでは、乗車している k 両目ドア前から改札口までの（車両と平行な）移動距離の期待値を算出することを求めています。k' 両目ドア前に改札口がある駅の数を企画列車が停車する駅の数 N で除すことによって、k' 両目ドア前に改札口がある駅の割合が得られるため、ジュニアの問題で得られた距離の総和から容易に、移動距離の期待値が求められます。

従って、ジュニアの問題(1),(2),(3),(4)は、それぞれシニアの問題の(1),(2),(3),(4)に対応しており、上述の題意をくみ取って、まとめの論述を最後の小問で記述してもらいました。ここでは、シニアの問題に焦点をあてて解説することにします。(以降、数学的な記述になりますので、文体が変化します。)

解答例：

（１） $E[d(1)]=E[d(3)]=\frac{1}{3}(2a+a+0)=a, E[d(2)]=\frac{1}{3}(a+0+a)=\frac{2}{3}a$.

（２） m が奇数のとき、$k=\frac{m+1}{2}$ 両目、

m が偶数のとき、$k=\frac{m+1}{2}\pm\frac{1}{2}$ 両目で期待値が最小値をとるため、**[戦略 1]**にもとづくと、これらの車両に乗ることを選択すれば良い。

この問題の論述および正答を入賞の必須条件とした。以下で、解説を与える。

一般に、奇数両のとき、中央の車両が唯一つ特定することができる。そこで、以下の図のような

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n$$

1	…	n-1	n	n+1	n+2	…	2n-1	2n	2n+1

n　　　　　　　　1

$m=2n+1$ 両の列車について考えてみる。i 両目に乗っている人が j 両目中央の改札口まで到達する距離は、

$$d_j(i)=|j-i|a$$

である。ここで、$a=1$ として一般性を失われない。改札口が 1/(2n+1)の等確率で存在するから、

$$\begin{aligned}
E[d(1)]&=E[d(2n+1)]\\
&=\sum_{j=1}^{2n+1}d_j(1)\times p_j=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}|j-1|=\frac{1}{2n+1}\{0+1+\cdots+2n\}=\frac{1}{2n+1}\frac{(2n+1)(0+2n)}{2}=n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[d(2)]&=E[d(2n)]\\
&=d_1(2)\times p_1+\sum_{j=2}^{2n+1}d_j(2)\times p_j=\frac{1}{2n+1}\left\{1+\sum_{j=2}^{2n+1}|j-2|\right\}=\frac{1}{2n+1}\left\{1+\frac{2n(0+2n-1)}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2n+1}\{1+n(2n-1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[d(3)]&=E[d(2n-1)]\\
&=d_1(3)\times p_1+d_2(3)\times p_2+\sum_{j=3}^{2n+1}d_j(2)\times p_j=\frac{1}{2n+1}\left\{2+1+\sum_{j=3}^{2n+1}|j-3|\right\}\\
&=\frac{1}{2n+1}\left\{3+\frac{(2n-1)(0+2n-2)}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2n+1}\{3+(2n-1)(n-1)\}
\end{aligned}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}
E[d(j)]&=E[d(2n+2-j)]\\
&=\frac{1}{2n+1}\left\{2\sum_{j=1}^{n-1}|j-i|+(n+1-j)(2n+1)\right\}\\
&=\frac{(j-1)j}{2n+1}+(n+1-j)
\end{aligned}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}
E[d(n-1)]&=E[d(n+3)]\\
&=2\sum_{j=1}^{n-2}d_j(n-1)\times p_j+(n-1)\times p_{2n-2}+n\times p_{2n-11}+(n+1)\times p_{2n}+(n+2)\times p_{2n+1}\\
&=\frac{1}{2n+1}\left\{2\sum_{j=1}^{n-1}|n-1-j|+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)\right\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2(n-2)(0+n-1)}{2}+4n+2\right\}$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)}{2n+1}+2$$

$$E[d(n)]=E[d(n+2)]$$

$$=2\sum_{j=1}^{n-1}d_j(n)\times p_j+n\times p_{2n}+(n+1)\times p_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\left\{2\sum_{j=1}^{n-1}\left|n-j\right|+n+(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2(n-1)(1+n-1)}{2}+(2n+1)\right\}=\frac{n(n-1)}{2n+1}+1$$

$$E[d(n+1)]=2\sum_{j=1}^{n}d_j(n+1)\times p_j+0=\frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\left|n+1-j\right|=\frac{2}{2n+1}\{1+\cdots+n\}=\frac{2}{2n+1}\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n(1+n)}{2n+1}$$

最後の計算は、中央の $n+1$ 両目の車両を降りてからの移動距離の期待値 $E[\mathrm{d}(n+1)]$を表しており、対称性を用いている。これらにもとづき、

$$E[d(1)]-E[d(2)]=n-\frac{1}{2n+1}\{1+n(2n-1)\}=\frac{n(2n+1)-1-n(2n-1)}{2n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}$$

$$E[d(2)]-E[d(3)]=\frac{1}{2n+1}\{1+n(2n-1)\}-\frac{1}{2n+1}\{3+(2n-1)(n-1)\}$$

$$=\frac{-2-n+2n+n-1}{2n+1}=\frac{2n-3}{2n+1}$$

$$E[d(3)]-E[d(4)]=\frac{2n-5}{2n+1}$$

$$\cdots$$

$$E[d(n-1)]-E[d(n)]=\frac{3}{2n+1}$$

$$E[d(n)]-E[d(n+1)]=\frac{1}{2n+1}$$

を得る。これらはいずれも正値であり、$E[d(1)]>E[d(2)]>E[d(3)]>\cdots>E[d(n)]>E[d(n+1)]$ なる単調性を得るから、最小値は $E[d(n+1)]$ となる。

尚、別解として期待値 $E[d(k)]$ を以下のように k の二次関数として計算し、平方完成することによって解くこともできる。

$$E[d(k)]=\sum_{j=1}^{m}d_j(k)\times p_j=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|k-j\right|$$

$$=\frac{1}{m}\{\left|k-1\right|+\left|k-2\right|+\cdots+1+0+1+\cdots+\left|m-k\right|\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{(k-1)k}{2}+\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{k^2-(m+1)k+\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$

以下略■

（3）$E[d(1)]=E[d(2)]=\cdots=E[d(m)]=$ 一定となるような改札口の位置とその割合(分布)はある。両端

端に改札口を均等な割合で配置する場合で、それ以外にない。**[戦略 1]**にもとづくと、乗客はどの車両を選択しても良いことになる。以下にその説明を加える。

奇数両($m=2n+1$)のとき、車両 k から降りた乗客が、j 両目ドア前の改札口まで移動する距離 $\left\{d_j(k)\right\}_{j=1}^{2n+1}$ は、

$$\begin{aligned}
&\left\{d_j(1)\right\}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots 2n-2,2n-1,2n\}\\
&\left\{d_j(2)\right\}=\{1,0,1,\cdots,n-1,\cdots 2n-3,2n-2,2n-1\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\
&\left\{d_j(3)\right\}=\{2,1,0,\cdots,n-2,\cdots 2n-4,2n-3,2n-2\}\\
&\cdots\\
&\qquad\uparrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow\\
&\qquad d_1(k)\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d_{2n+1}(k)
\end{aligned}$$

となる。一方、偶数両($m=2n$)のとき、車両 k から降りた乗客が j 両目ドア前の改札口まで移動する距離 $\left\{d_j(k)\right\}_{j=1}^{2n}$ は、

$$\begin{aligned}
&\left\{d_j(1)\right\}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots 2n-2,2n-1\}\\
&\left\{d_j(2)\right\}=\{1,0,1,\cdots,n-1,\cdots 2n-3,2n-2\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\\
&\left\{d_j(3)\right\}=\{2,1,0,\cdots,n-2,\cdots 2n-4,2n-3\}\\
&\cdots\\
&\qquad\uparrow\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow\\
&\qquad d_1(k)\qquad\qquad\qquad\quad d_{2n}(k)
\end{aligned}$$

である。

一般に、分布 $\left\{p_j\right\}$ のもとに車両 k から降りた乗客のホームにおける移動距離の期待値は、

$$E[d(k)]=\sum_{j=1}^{m}d_j(k)\times p_j\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

で与えられる。簡単に、解答の前半を確認することができる。

命題 1［十分性］ 両端に改札口を均等な割合で配置すると、$E[d(1)]=E[d(2)]=\cdots=E[d(m)]=$ 一定となる。

[証明]題意より、両端のみ確率を持つ場合を仮定する。すなわち、

$$\left\{p_j\right\}=\left\{\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right\}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$m=2n+1$ のとき、式①より $d_1(k)=k-1,d_{2n+1}(k)=2n+1-k$ だから、式③の右辺の和の両端のみ残って、

$$E[d(k)]=\sum_{j=1}^{2n+1}d_j(k)\times p_j=\frac{1}{2}\left\{d_1(k)+d_{2n+1}(k)\right\}=\frac{1}{2}\left\{(k-1)+(2n+1-k)\right\}=n=const.$$

を得る。また、$m=2n$のとき、式②より$d_1(k)=k-1, d_{2n}(k)=2n-k$だから、ここでも、式③の右辺の和の両端のみ残って、

$$E[d(k)]=\sum_{j=1}^{2n} d_j(k)\times p_j=\frac{1}{2}\left\{d_1(k)+d_{2n+1}(k)\right\}=\frac{1}{2}\left\{(k-1)+(2n-k)\right\}=n-\frac{1}{2}=const.$$

を得る。■

求める問題は、$E[d(k)]=const.$となる分布$\left\{p_j\right\}$の与え方である。ここで、この分布に以下のような対称性を入れる。

$$\left\{p_j \middle| p_{j(s)}=p_{2n+2-j(s)}=p=\frac{1}{2(\#s)}\right\}_{j=1}^{2n+1} \cdots\cdots ⑤$$

つまり式⑤の条件を入れないと、ある$d(k)$に対して式③の右辺の和に偏りが生じて、$E[d(k)]=const.$が期待できないからである。ここで、$\#s$は0でない等確率pのペアの数を表す。奇数両($m=2n+1$)のとき、$j(s)=2n+2-j(s)$、すなわち、$j(s)=n+1$を含む場合、ペアの数に1/2を足した値を$\#s$とする。例えば、**命題1**のとき、$\#s=1$である。ここで、以下のような興味深い性質を紹介する。

命題2 式⑤を満たす④以外の分布に対して、$E[d(1)]=n$.

[証明] $p_{j(s)}=p_{2n+2-j(s)}=\dfrac{1}{2(\#s)}$なる対称性から、

$$\begin{aligned}E[d(1)]&=\sum_{j=1}^{m} d_j(1)\times p_j=\frac{1}{2(\#s)}\sum_s\left\{d_{j(s)}(1)+d_{2n+2-j(s)}(1)\right\}\\&=\frac{1}{2(\#s)}\sum_s\left\{(j(s)-1)+(2n+2-j(s)-1)\right\}\\&=\frac{1}{2(\#s)}2n\sum_s 1=\frac{1}{2(\#s)}2n(\#s)=n.■\end{aligned}$$

同様な計算で、以下の大小関係を確かめることができる。

系1 式⑤を満たす④以外の分布に対して、$n=E[d(1)]>E[d(2)]$.

これらから、⑤を仮定すると、

$$E[d(1)]=E[d(m)]>E[d(2)]=E[d(m-1)] \cdots\cdots ⑥$$

なる大小関係が存在することが分かる。この仮定をはずして、

$$E[d(1)]=E[d(2)]=\cdots=E[d(m)] \cdots\cdots ⑦$$

を前提に、不等式⑥の「左辺にある期待値の平均」と「右辺にある期待値の平均」が等しくなるときを解析すると、以下のような定理が導かれる。

定理 1 $E[d(1)]+E[d(m)]=E[d(2)]+E[d(m-1)]$ をみたす必要条件は $p_1=p_m=\dfrac{1}{2}$ である。

[証明]③式より、等式の左辺は、$E[d(1)]+E[d(m)]=\sum_{j=1}^{m}(d_j(1)+d_j(m))p_j=\sum_{j=1}^{m}(|j-1|+|j-m|)p_j$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{j=1}^{m}\left\{(j-1)p_j+(m-j)p_j\right\}\\
&=0\cdot p_1+1\cdot p_2+2\cdot p_3+\cdots+(m-1)\cdot p_m\\
&+(m-1)\cdot p_1+(m-2)\cdot p_2+(m-3)\cdot p_3+\cdots+1\cdot p_m\\
&=(m-1)\sum_j p_j\\
&=m-1
\end{aligned}
$$

となる。一方、等式の右辺は、

$$
\begin{aligned}
E[d(2)]+E[d(m-1)]&=\sum_{j=1}^{m}(d_j(2)+d_j(m-1))p_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}\left\{|j-2|+|j-(m-1)|\right\}p_j\\
&=\sum_{j=1}^{m}(|j-2|+|m-j-1|)p_j\\
&=1\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3+\cdots+(m-4)\cdot p_{m-2}+(m-3)\cdot p_{m-1}+(m-2)\cdot p_m\\
&\quad+(m-2)\cdot p_1+(m-3)\cdot p_2+(m-4)\cdot p_3+\cdots+1\cdot p_{m-2}+0\cdot p_{m-1}+1\cdot p_m\\
&=(m-1)\cdot p_1+(m-3)\sum_{j=2}^{m-1}p_j+(m-1)\cdot p_m\\
&=(m-1)(p_1+p_m)+(m-3)(1-p_1-p_m)\\
&=m-3+2(p_1+p_m)
\end{aligned}
$$

となる。よって、等式の右辺は、$p_1+p_m=1$ を得る。このとき、$p_2=\cdots=p_m=0$ であり、再び③式より、

$$
\begin{aligned}
E[d(1)]&=0+(m-1)p_m=(m-1)p_m\\
E[d(m)]&=(m-1)p_1+0=(m-1)p_1
\end{aligned}
$$

⑦式より、$p_1=p_m=\dfrac{1}{2}$ を得る。これは④の確率分布であり、逆に、**命題 1** からこのとき確かに⑦式をみたすことが示される。■

以上より、$E[d(1)]=E[d(2)]=\cdots=E[d(m)]=$ 一定となる必要十分条件が $p_1=p_m=\dfrac{1}{2}$ であることが理解できる。

ジュニアでは尼丁祥伍君(灘中学 2 年)、妻鹿洸佑君(筑波大学附属駒場中学 2 年)が、シニアでは石堀朝陽君(筑波大学附属駒場高等学校 2 年)が、**定理 1** の存在に気づいて、その証明に挑戦しており、高く評価したい。尚、（3）の考察から以下の結論を得る。

（4）**[戦略 2]** にもとづくと、④のように両端に改札口を均等な割合で配置すれば良い。

（5）ここからはシニアのみに出題された問題になる。改札口を 2 つ設置する場合の議論である。ここでは、変量が多いため、（3）のような演繹的な議論は行わず、帰納的な議論を行う。2 つの車両前に設置する改札口の位置パターンごとに実現確率を与えていくことになるが、パターン間で改札口の位置が重複すると、乗車する車両間で移動距離に偏りが生じると考えられる。そのため、改札口の位置を重複させない背反的なパターンを挙げるのが定石であるが、この方法では奇数両のときの解を構成できない。森山和君(富山中部高等学校 2 年)は、少数両の観察から、定石を見事に打ち破った解を構成できていた。

まず、偶数両($m=2n$)のときを考える。$m=4$ では、以下の**表** 1 の改札口の位置パターンが挙げられる。$P[A_2]+P[B_2]=1$ で、それぞれの車両を降りてから改札口までの距離の期待値は、

$$E[d(1)]=0\cdot P[A_2]+1\cdot P[B_2]=\frac{1}{2}$$

$$E[d(2)]=1\cdot P[A_2]+0\cdot P[B_2]=\frac{1}{2}$$

となる。**表** 1 の配置パターンより、$E[d(1)]=E[d(3)], E[d(2)]=E[d(4)]$ が成立しており、距離の期待値は乗車車両に依存せずに一定であることが確認できる。この場合は、**表** 2 の別解もある。さらに、$m=2n$ のとき、**表** 1 の配置パターンをもとに**表** 3 の配置パターンを構成でき、実際、

$$E[d(1)]=0\cdot P[A_n]+(n-1)\cdot P[B_n]=\frac{n-1}{2}$$

$$E[d(2)]=1\cdot P[A_n]+(n-2)\cdot P[B_n]=\frac{n-1}{2}$$

$$\cdots$$

$$E[d(n-1)]=(n-2)\cdot P[A_n]+1\cdot P[B_n]=\frac{n-1}{2}$$

$$E[d(n)]=(n-1)\cdot P[A_n]+0\cdot P[B_n]=\frac{n-1}{2}$$

表 1. 2 つの改札口に関する背反的な位置パターンの一例（$m=4$）

パターン	1 両目	2 両目	3 両目	4 両目	実現確率 P
A_2	○		○		1/2
B_2		○		○	1/2

表 2. 2 つの改札口に関する背反的な位置パターンの別例（$m=4$）

パターン	1 両目	2 両目	3 両目	4 両目	実現確率 P
A'_2	○			○	1/2
B'_2		○	○		1/2

表 3. 2 つの改札口に関する背反的な位置パターンの一例（$m=2n$）

パターン	1 両目	…	n 両目	n+1 両目	…	2n 両目	P
A_n	○			○			1/2
B_n			○			○	1/2

と計算できる。これは、1 両目から n 両目までの間は式④と同様な改札口の配置となっているため、改札口を 1 つ設置する小問（3）および（4）の議論をそのまま用いることができることに注意する。また、**表 3** の配置パターンより、$E[d(1)]=E[d(n+1)],E[d(2)]=E[d(n+2)],\cdots,E[d(2n)]=E[d(n)]$ が成立しており、距離の期待値は乗車車両に依存せずに一定であることが確認できる。

次に、奇数両($m=2n+1$)のときを考える。$m=3$ では、以下の**表 4** の改札口の位置パターンが挙げられる。特に、偶数両の場合の配置パターンに加えて、パターン W を加えることに留意する。それぞれの車両を降りてから改札口までの距離の期待値は、

$$E[d(1)]=0\cdot P[U_1]+0\cdot P[V_1]+1\cdot P[W_1]=\frac{1}{3}$$

$$E[d(2)]=0\cdot P[U_1]+1\cdot P[V_1]+0\cdot P[W_1]=\frac{1}{3}$$

$$E[d(3)]=1\cdot P[U_1]+0\cdot P[V_1]+0\cdot P[W_1]=\frac{1}{3}$$

となる。$m=5$ では、以下の**表 5** の改札口の位置パターンが挙げられる。特に、$m=3$ の配置パターン X を付け加える。それぞれの車両を降りてから改札口までの距離の期待値は、

$$E[d(1)]=0\cdot(P[U_2]+P[V_2])+1\cdot P[X_2]+2\cdot P[W_2]=\frac{3}{4}$$

$$E[d(2)]=1\cdot(P[U_2]+P[V_2])+0\cdot P[X_2]+1\cdot P[W_2]=\frac{3}{4}$$

表 4. 2 つの改札口に関する位置パターン（$m=3$）

パターン	1 両目	2 両目	3 両目	実現確率 P
U_1	○	○		1/3
V_1	○		○	1/3
W_1		○	○	**1/3**

表 5. 2 つの改札口に関する位置パターン（$m=5$）

パターン	1 両目	2 両目	3 両目	4 両目	5 両目	実現確率 P
U_2	○		○			1/4
V_2	○				○	1/4
W_2			○		○	1/4
X_2		○		○		**1/4**

表 6. 2 つの改札口に関する位置パターン（$m=4n+1$）

車両	1	…	n+1	…	2n+1	…	3n+1	…	4n+1
U_{4n+1}	○				○				
V_{4n+1}	○								○
W_{4n+1}					○				○
X_{4n+1}			○				○		

$$E[d(3)] = 0\cdot(P[U_2]+P[W_2]) + 1\cdot P[X_2] + 2\cdot P[V_2] = \frac{3}{4}$$

となる。**表 5** の配置パターンより、$E[d(1)] = E[d(5)], E[d(2)] = E[d(4)]$ が成立しており、距離の期待値は乗車車両に依存せずに一定であることが確認できる。これをもとに、$m = 4n+1$ のとき、**表 6** の改札口の位置パターンを構成できる。スペースの関係で、実現確率が記載できていないが、**表 5** と同様に、$P[U_{4n+1}] = P[V_{4n+1}] = P[W_{4n+1}] = P[X_{4n+1}], P[U_{4n+1}] + P[V_{4n+1}] + P[W_{4n+1}] + P[X_{4n+1}] = 1$ である。実際、

$$E[d(2n+1)] = 0\cdot(P[U_{4n+1}]+P[W_{4n+1}]) + 2n\cdot P[V_{4n+1}] + n\cdot P[X_{4n+1}] = \frac{3n}{4}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned} E[d(n+2)] &= (n-1)\cdot(P[U_{4n+1}]+P[W_{4n+1}]) + (n+1)\cdot P[V_{4n+1}] + 1\cdot P[X_{4n+1}] \\ &= \{2(n-1)+(n+1)+1\}\frac{1}{4} \\ &= \{3n-2\cdot 1+1+1\}\frac{1}{4} \\ &= \{3n-2(1-1)\}\frac{1}{4} = \frac{3n}{4} \end{aligned}$$

$$E[d(n+1)] = n\cdot(P[U_{4n+1}]+P[V_{4n+1}]) + n\cdot P[W_{4n+1}] + 0\cdot P[X_{4n+1}] = \frac{3n}{4}$$

$$E[d(n)] = (n-1)\cdot(P[U_{4n+1}]+P[V_{4n+1}]) + (n+1)\cdot P[W_{4n+1}] + 1\cdot P[X_{4n+1}] = \frac{3n}{4}$$

$$\begin{aligned} E[d(n-1)] &= (n-2)\cdot(P[U_{4n+1}]+P[V_{4n+1}]) + (n+2)\cdot P[W_{4n+1}] + 2\cdot P[X_{4n+1}] \\ &= \{2(n-2)+(n+2)+2\}\frac{1}{4} \\ &= \{3n-2\cdot 2+2+2\}\frac{1}{4} \\ &= \{3n-2(2-2)\}\frac{1}{4} = \frac{3n}{4} \end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$E[d(1)] = 0\cdot(P[U_{4n+1}]+P[V_{4n+1}]) + 2n\cdot P[W_{4n+1}] + n\cdot P[X_{4n+1}] = \frac{3n}{4}$$

となる。**表 6** の配置パターンは繰り返し構造を有しており、$E[d(2)] = E[d(2n+2)], \cdots, E[d(2n+1)] = E[d(4n+1)]$ が成立している。従って、距離の期待値は乗車車両に依存せずに一定であることが

表 7. 2 つの改札口に関する位置パターン（$m = 4n+3$）

車両	1	n+1	n+2	2n+2	3n+2	3n+3	4n+3	P
U_{4n+3}	○			○				1/4
V_{4n+3}	○						○	1/4
W_{4n+3}				○			○	1/4
X_{4n+3}		○				○		1/8
Y_{4n+3}			○		○			1/8

確認できる。最後に、$m=4n+3$のとき、**表 7** の改札口の位置パターンを構成できる。特に、$m=4n+1$の配置パターン Y を付け加える。実際、

$$E[d(2n+2)]=0\cdot(P[U_{4n+3}]+P[W_{4n+3}])+(2n+1)\cdot P[V_{4n+3}]+(n+1)\cdot P[X_{4n+3}]+n\cdot P[Y_{4n+3}]=\frac{3(2n+1)}{8}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}E[d(n+2+k)]&=(n-k)\cdot(P[U_{4n+3}]+P[W_{4n+3}])+(n+1+k)\cdot P[V_{4n+3}]+k\cdot P[X_{4n+3}]+(k-1)\cdot P[Y_{4n+3}]\\&=\left\{4(n-k)+2(n+1+k)+(1+k)+k\right\}\frac{1}{8}=\frac{3(2n+1)}{8}\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}E[d(n+2)]&=n\cdot(P[U_{4n+3}]+P[W_{4n+3}])+(n+1)\cdot P[V_{4n+3}]+1\cdot P[X_{4n+3}]+0\cdot P[Y_{4n+3}]\\&=\left\{4n+2(n+1)+1+0\right\}\frac{1}{8}=\frac{3(2n+1)}{8}\end{aligned}$$

$$E[d(n+1)]=n\cdot(P[U_{4n+3}]+P[V_{4n+3}])+(n+1)\cdot P[W_{4n+3}]+0\cdot P[X_{4n+3}]+1\cdot P[Y_{4n+3}]=\frac{3(2n+1)}{8}$$

$$\begin{aligned}E[d(n)]&=(n-1)\cdot(P[U_{4n+3}]+P[V_{4n+3}])+(n+2)\cdot P[W_{4n+3}]+1\cdot P[X_{4n+3}]+2\cdot P[Y_{4n+3}]\\&=\frac{4(n-1)+2(n+2)+1+2}{8}=\frac{3(2n+1)}{8}\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$E[d(n+1-k)]=\frac{6n-4k+2\cdot(k+1)+k+(k+1)}{8}=\frac{3(2n+1)}{8}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}E[d(1)]&=0\cdot(P[U_{4n+3}]+P[V_{4n+3}])+(2n+1)\cdot P[W_{4n+3}]+n\cdot P[X_{4n+3}]+(n+1)\cdot P[Y_{4n+3}]\\&=\frac{2(2n+1)+n+(n+1)}{8}=\frac{6n+3}{8}=\frac{3(2n+1)}{8}\end{aligned}$$

となる。**表 7** の配置パターンも繰り返し構造を有しており、$E[d(2)]=E[d(2n+2)],\cdots,E[d(2n+1)]=E[d(4n+3)]$が成立している。ここでも、距離の期待値は乗車車両に依存せずに一定であることが確認できる。

以上より、改札口が 2 つある場合、**[戦略 2]** にもとづくと、**表 3** および**表 6-7** に示すように改札口の位置とその割合（確率分布）を与えると良い。

文体を再び戻して、

（6）小問（1）～（5）では、数学的に定式化して解いてもらえるように、「企画列車のスタンプラリー」の問題として設定しました。以上の数学的な知見を、現実の「改札口の配置問題」（都市設計）に応用してもらいたいというのが趣旨です。実際に、筆者らも降車する駅の改札口の位置を考えて、地下鉄の車両に乗り込んでいます。コロナ禍になる前から、先頭と最後尾の車両に乗客が疎らなのをみながら、物思いに耽ったものです。均質な乗降客が見込める大都市の地下鉄や環状線では、同様な理論展開が期待できて、車両間の乗客数が偏らずに一定になると考えられます。こうした詩的な数学の発想が、日本数学コンクールに参加していただいた皆さんの心に残って、未来の日本の情景が変わっていくことを夢見ています。非常に些細な変化ではありますが。

問題（シニア・ジュニア）

(1) 凸六角形の頂点を反時計回りの順番に $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とします．三角形 $P_2P_4P_6$ を平行移動した三角形 $Q_2Q_4Q_6$ を，六角形 $P_1Q_2P_3Q_4P_5Q_6$ が凸になるようにとります．このとき，もとの凸六角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ と新たに出来た凸六角形 $P_1Q_2P_3Q_4P_5Q_6$ の面積が等しいことを証明してください（図１）．まずは，三角形 $P_2P_4P_6$ の平行移動の方向が，線分 P_1P_3 の垂直方向の場合（図２）を考えてみるとよいかもしれません．

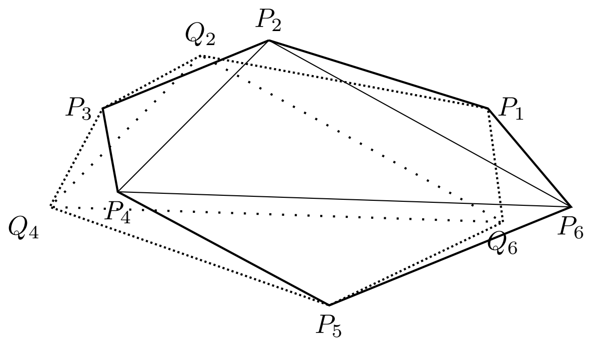


図 1:

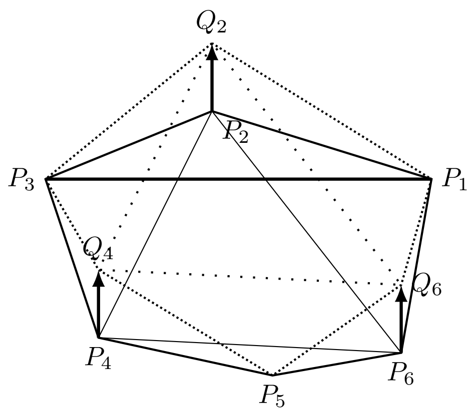


図 2:

(2) 凸八角形について，同様の事実を証明してください．すなわち頂点を反時計回りの順番に $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ とし，四角形 $P_2P_4P_6P_8$ を平行移動した四角形 $Q_2Q_4Q_6Q_8$ を，八角形 $P_1Q_2P_3Q_4P_5Q_6P_7Q_8$ が凸になるようにとります．このとき, もとの凸八角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ と新たに出来た凸八角形 $P_1Q_2P_3Q_4P_5Q_6P_7Q_8$ の面積が等しいことを証明してください（図 3）.

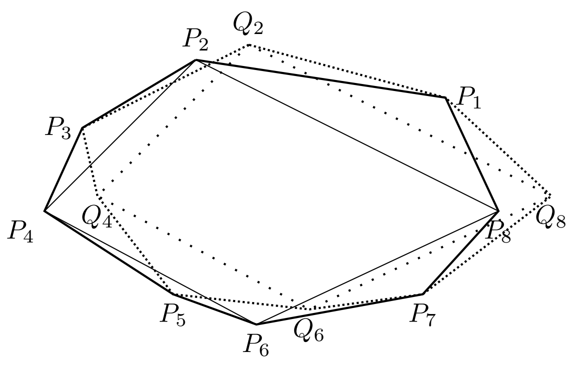


図 3:

(3) 一般に，凸 $2n$ 角形 (n は 3 以上の自然数) についてはどうでしょうか.

(4) 凸多面体について，類似の事実が成り立つかどうか，自由に考えて論じてください.

解説（シニア・ジュニア）

問題作成委員会委員 伊師英之 （大阪市立大学）

上記の問題はジュニア部門に出題したもので，シニアでは図 2 のような提案はなく，小問 (2) を飛ばして一般の $2n$ 角形の場合を証明する小問が出題されました.

図 2 を考える利点は面積の増減（収支というべきかもしれません）がわかりやすいことにあります．すなわち三角形 $P_2P_4P_6$ が三角形 $Q_2Q_4Q_6$ に移動する際に増加する面積を青，減少する面積を赤く塗ると図 4 のようになり（図は最後にまとめてあります），証明するべきは青の面積と赤の面積が等しいことだとはっきりします.

平行移動の距離，すなわち $P_2Q_2 = P_4Q_4 = P_6Q_6$ を h としましょう．うまく等積変形をすると，青の面積も赤の面積も $\frac{1}{2}h \times (P_1P_3)$ であることがわかります．実際，三角形 $P_1P_2Q_2$ の面積は，P_2Q_2 の半分と P_1P_2 を辺とするような平行四辺形の面積と等しく，同様にして青と赤の三角形を全て平行四辺形に置き換えると，図 5 のようになります．これらが両方とも緑の長方形に等しいことはすぐわかりますが，物理的な考え方で次のようにも説明できます．すなわち平行移動の方向に速さが $h/2$（一定）の水の流れがあると考えます．すると単位時間あたりに凸六角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ に流入する水の量が赤い面積を，流出する水の量が青い面積を表すので，それらは必然的に等しくなるわけです.

上記の「物理的」議論は，平行移動の方向が対角線 P_1P_3 と垂直でなくても，そして一般の凸 $2n$ 角形についても成り立ちます（図 6–9）.

別証明として，座標を利用する考え方があります．一般に頂点 $A_1(a_1,b_1)$, $A_2(a_2,b_2)$, $A_3(a_3,b_3)$ が反時計回りに並んでいるような三角形の面積は $\frac{(a_2-a_1)(b_3-b_1)-(b_2-b_1)(a_3-a_1)}{2}$ で与えられます．頂点が時計回りのときは，面積に負号がついた値となることに注意してください．

さて，$k=1,2,\ldots,2n$ について頂点 P_k の座標を (x_k,y_k) とし，さらに k が偶数のとき頂点 Q_k の座標を (x'_k,y'_k) とします．仮定により x'_k-x_k と y'_k-y_k は一定の値なので，それらをそれぞれ a と b とします．

$$
\begin{aligned}
&(\text{凸多角形 } P_1P_2\cdots P_{2n}\text{の面積})\\
&=(\text{凸多角形 } P_1P_3\cdots P_{2n-1}\text{の面積})+\sum_{j=1}^{n-1}(\text{三角形 } P_{2j-1}P_{2j}P_{2j+1}\text{の面積})+(\text{三角形 } P_{2n-1}P_{2n}P_1\text{の面積})\\
&=(\text{凸多角形 } P_1P_3\cdots P_{2n-}\text{の面積})+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(x_{2j}-x_{2j-1})(y_{2j+1}-y_{2j-1})-(y_{2j}-y_{2j-1})(x_{2j+1}-x_{2j-1})}{2}\\
&\quad+\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})(y_1-y_{2n-1})-(y_{2n}-y_{2n-1})(x_1-x_{2n-1})}{2}.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&(\text{凸多角形 } P_1Q_2\cdots P_{2n-1}Q_{2n}\text{の面積})\\
&=(\text{凸多角形 } P_1P_3\cdots P_{2n-1}\text{の面積})+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(x'_{2j}-x_{2j-1})(y_{2j+1}-y_{2j-1})-(y'_{2j}-y_{2j-1})(x_{2j+1}-x_{2j-1})}{2}\\
&\quad+\frac{(x'_{2n}-x_{2n-1})(y_1-y_{2n-1})-(y'_{2n}-y_{2n-1})(x_1-x_{2n-1})}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&(\text{凸多角形 } P_1Q_2\cdots P_{2n-1}Q_{2n}\text{の面積})-(\text{凸多角形 } P_1P_2\cdots P_{2n}\text{の面積})\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a(y_{2j+1}-y_{2j-1})-b(x_{2j+1}-x_{2j-1})}{2}+\frac{a(y_1-y_{2n-1})-b(x_1-x_{2n-1})}{2}\\
&\quad=\frac{a(y_{2n-1}-y_1-b(x_{2n-1}-x_1)}{2}+\frac{a(y_1-y_{2n-1})-b(x_1-x_{2n-1})}{2}=0.
\end{aligned}
$$

この計算は綺麗ですが，３次元に拡張するにあたっては，前述の物理的発想のほうが見通しが良いといえます．結論を述べると，任意の凸 N 面体 A に対して，その面を $F_1,F_2,\ldots,F_N$ とします．多面体 A の外の点 P_1, $P_2,\ldots,P_N$ を, 各 P_k と面 F_k を結んでできる角錐を A にくっつけてできた立体 B が凸多面体になるようにとります．このとき $P_1,\ldots,P_N$ は固定し，立体 A だけを平行移動して生じる立体 B' が凸多面体ならば，B' の体積は B の体積と等しくなることが証明できます．角錐の体積が，同じ高さの角柱の体積の 1/3 になっているところがポイントです．

凸多面体の場合について論じた人はあまりいませんでしたが，凸 $2n$ 角形については色々な考え方の答案がありました．東大寺学園高校２年の吉田智紀君は，$P_2P_4P_6$ の１辺の方向に平行移動する場合に限って考えれば十分であることに注意して，明晰な議論を展開しました．多面体の場合についての洞察を加えたことも評価されました．一宮高校２年の緒方麻明知君は，n についての帰納法で丁寧な証明を与えました．筑波大学附属駒場高校２年の石堀朝陽君は，四角形の面積が対角線の長さと対角線のなす角から定まること（これは $n=2$ の場合に相当する）を利用して，大変鮮やかな証明を与えました．同じく筑波大学附属駒場高校１年の菊地朝陽君は，本稿で説明したアイディアで問題を論じました．

灘中学校２年の中洋貴君は，平行移動の方向が対角線に垂直の場合を証明すれば十分なことに注意して，すっきりとした証明を与えました．多面体の説明において立体 A が四面体の場合に考察したことも評価されました．東海中学校３年の酒井悠真君も同様の発想で証明を与え，立体 A が立方体の場合を論じました．甲陽学院中学２年の斎藤綾人君，灘中学校３年の小出慶介君は，ほぼ本稿で説明した方向で簡潔かつわかりやすい証明を与えました．市川中学校２年の斎藤輝君はそれぞれの図について丁寧な議論を展開しました．東海中学校２年の山本叡明君は独特の発想によって (1), (2) の証明を与えました．

滝高校３年の北川陽斗君は感想戦において，ベクトルの外積を用いて凸 $2n$ 角形の場合の簡潔な証明を与えました．３次元の場合にも一般的な命題を定式化し，証明の方向性も大筋正しいものでした．ベクトルという概念の強力さを浮かび上がらせる議論は素晴らしいものです．

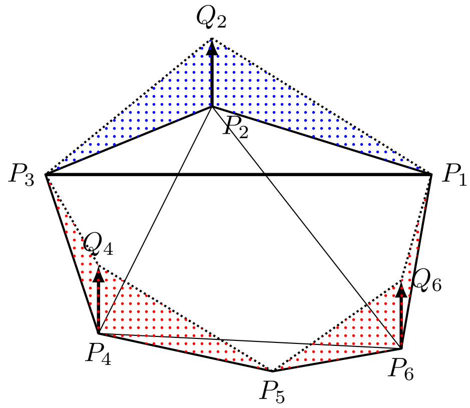


図 4:

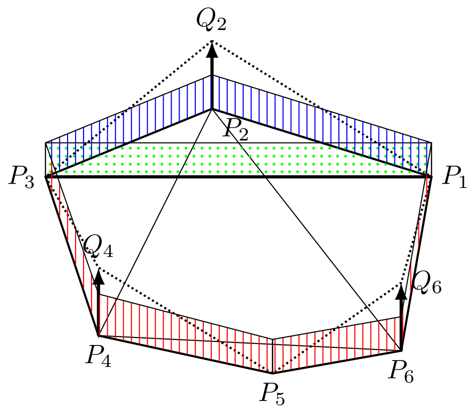
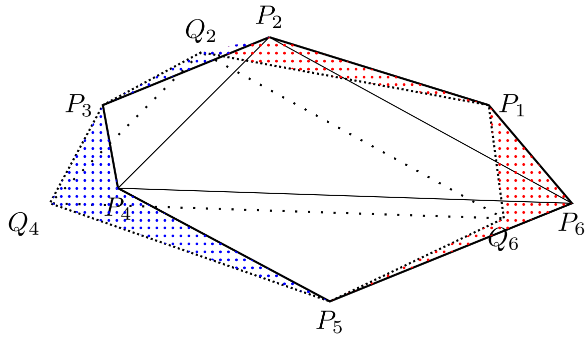
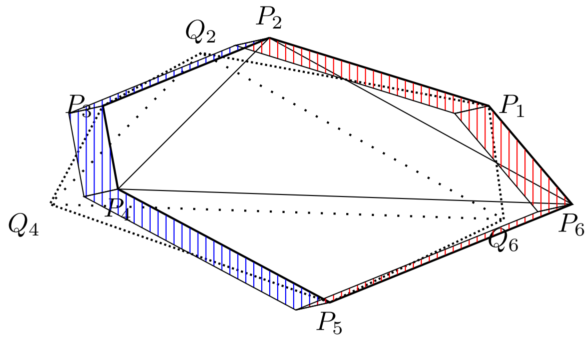


図 5:



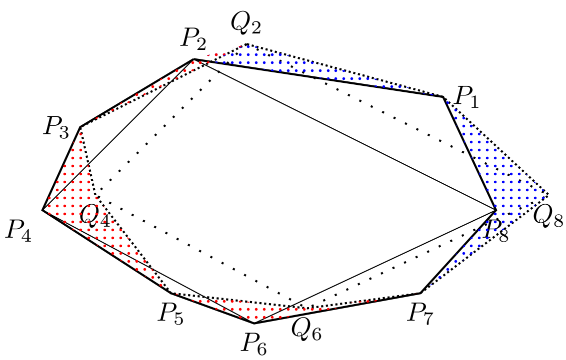
Q_2
P_2
P_3
P_1
Q_4
P_4
Q_6
P_6
P_5

図 6:



Q_2
P_2
P_3
P_1
Q_4
P_4
Q_6
P_6
P_5

図 7:



Q_2
P_2
P_3
P_1
P_4
Q_4
P_8
Q_8
P_5
P_6
Q_6
P_7

図 8:

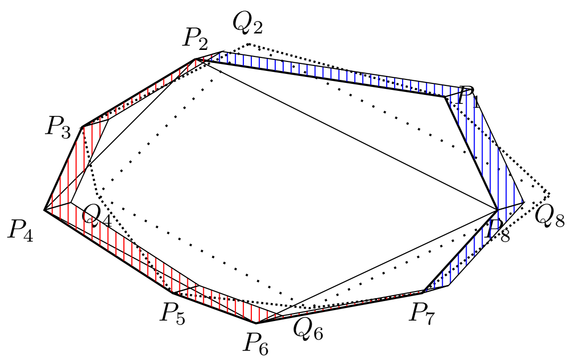


図 9:

問題（シニア・ジュニア）

植物の成長を数式であらわすと？

植物の数学的な記述はどのようにして行ったら良いのでしょうか？　中学校で学習する内容では花を咲かせる種子植物，その中の被子植物といったように続きます．ここではちょっと違ったやり方で考えていきましょう．一般に生き物は細胞からなっていて，その細胞が分裂していくことで成長していきます．ここではいろいろな種類の細胞をアルファベットで表し，それらの細胞がどのように分裂していくか，「書き換え規則」として表現することとします．

考えをはっきりさせるために簡単な例で説明いたします．

$$a \to ab \tag{1}$$

$$b \to a \tag{2}$$

これを実際に適用してみましょう．

$$a \to ab$$

となります．これは文字 a にルール（１）を適用したものです．また，文字列 aba にルールを適用すると，

$$aba \to abaab = abaab$$

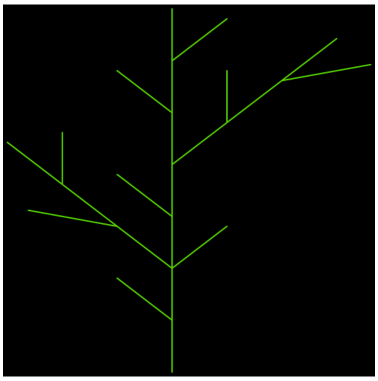
となります．これは a, b, a に同時にルール $a \to ab, b \to a, a \to ab$ を適用した結果です．

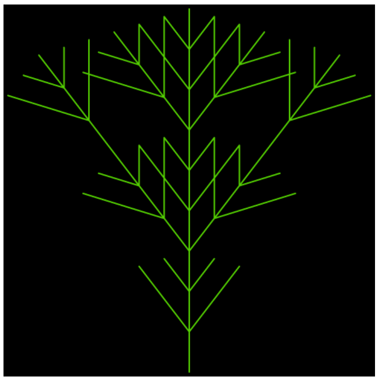
1. いま説明したルールについて，
   (a) a から出発してそれぞれ10回, 15 回この操作を繰り返したら，語の長さはいくつになるでしょうか？
2. 次には，木の成長を考えてみましょう．簡単のため平面の上の「木」を考えます．枝分かれは右左におこるとします．次の書き換え規則で [] は右への枝分かれ，() は左への枝分かれとします．
   (a) $a \to c[b]d$
   (b) $b \to a$
   (c) $c \to c$
   (d) $d \to c(e)a$
   (e) $e \to d$
   この操作を $n = 1, 2$ 回を繰り返すと次のようになります．

```
          |   /
          d  b
          |/
 |        |
 a  ->    c
 |        |
```

もっと繰り返すとどのような形になりますか？　また，　身近にある木の枝分かれをスケッチして比較してください．

3. 次の「植物」を表す書き換え規則を求めてみてください．





4. 最初に考えた書き換え規則に戻ります．

(1) $a \to ab$

(2) $b \to a$

(a)　どのような文字から出発しても次の文字列から始まるただ一つの無限列にどんどん近くなることを示してください．また，この無限列は周期性を持つでしょうか？すなわちあるところから先は，有限列の繰り返しになるでしょうか？

$$W = abaababaabaab \quad \cdots$$

(b) $a \to a'b'$，$b \to a'$ の書き換えを上の無限列 W に対して適用すれば，どのような列がでてきますか？

(c) b の前には必ず a がでてくるので，ab を A に置き換え, 残りの文字を B と置き換えれば、どのような列がでてきますか？

解説（シニア・ジュニア）

問題解説：植物の成長を数式であらわすと？

植物の生長を記述するためにハンガリーの植物生理学者リンデンマイヤーが 1968 年に発表した L-system と呼ばれるものを元に問題をつくりました．

通常植物の分類は，花が咲くか，咲かないか，葉の形状などによってなされますが，リンデンマイヤー氏はこのような記述では不十分であるとして，生長過程を記述することを試みました．ここで問題 1 で考察した藻 (Anabaena catenula) です．細胞が分裂していく様子を文字の書き換え規則として表したものです．多くの皆さんに取り組んでもらいました．この藻は Fibonacci 数列と関係しています．

問題 2，3 については皆さんにいろいろ楽しんでもらえたようで，こちらも答案を読ましていただいて楽しかったす．

フィボナッチ数列との関係は，問題 4 において，この藻が近づいていく無限列 $W = abaababaabaab...$ が周期性を持たないことを示す時にやくにたちます．W の n 回分裂した時の a の数を a_n,b の数を b_n とすれば，フィボナッチ数列 $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ を考えれば，

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{f_n}{f_{n-1}} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となり，無理数となります．周期性を持っていれば，有理数となるはずですので，周期性を持たないことがわかります．（東大寺学園高校の吉田君の解答です．）

問題 5，6 については，いろいろな考え方がありますが，a を長さ $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ の区間，b を長さ 1 の区間で置き換えれば，$a \to a'b', b \to a'$ は，$a' = 1, b' = 1/\phi$ に相当する．つまり，区間列を $1/\phi$ 倍する変換であり，$ab \to A$ は関係式 $\phi^2 = \phi + 1$ を用いると ϕ 倍することに相当します．従って同じような並び方になります．

この問題は，今年ノーベル物理学賞を受賞したペンローズが発見したペンローズタイリングとも関係があり，現在も発展を続けています．

L-system の理論は，実は言語学とも深い結びつきがあります．チョムスキー (Noam Chomsky) という人が起こした言語学における革命です．それまで (1953 頃) は，単にある言語のデータを集めるだけで機械的にその言語の文法を作り出すことができる，とされていたのです．

そのような考え方に対して，Chomsky は，次のような問題をたてることで言語学が考えるべき対象を一新したのです．

彼の論点は，人間の子供が驚くべきほど短い時間で母国語を獲得するのはなぜか？，そして有限個の文例しか聞いていないのに，今までに聞いたことのない文章をも含め無限個

の文章を作り出せるのはなぜか？という二つの自然な疑問に言語学は答える必要がある，というものです．そしてこの二つの問いに答えられなければ適切な理論ではない，としたのです．

子供の言語獲得をみても，最初に獲得するのは文法の基本的な法則です．たとえば，子供の英語を聞いていると，動詞の活用，複数名詞の作り方など規則的に変化させています．大人に修正されて，不規則変化という例外があることを覚えるのです．

試行錯誤で文法を形成しているにしては，形成する速度が早いこと，そして形成された文法が同じ母国語使用者の間で驚くほど類似している点に注目したチョムスキーは人間一般に備わっている「普遍文法」の存在を仮託しました．最初に提唱したのが Phrase Structure Grammar です．Chomsky の 1957 年の論文（というか本です）”Synctactic Structures”において展開されました．

テーマ１　「対称的な図形」

自分自身を重ね合わせる操作（回転移動や線対称移動，面対称移動など）の豊富さが図形の対称性を表すといえます。正多角形や正多面体については、そのような操作で各頂点を他の任意の頂点に移すことができますが、この性質をもつ図形としては、ほかにも長方形や正多角柱などがあります。同じ性質をもつ凸多角形や凸多面体をできるだけ沢山あげてください。凸多面体の特別な場合として、平面上に無限個の面が広がっている場合も考えることとします。

解説

問題作成委員会委員　**伊師 英之**　**（大阪市立大学）**

問題文に現れる「操作」とは，形を変えずに図形を動かす変換のことで，数学的には合同変換と呼びます．平面上の合同変換は回転移動，線対称移動，平行移動の合成で表され，3 次元空間での合同変換は回転移動，面対称移動，平行移動の合成で表されることが知られています．与えられた図形に対して，その図形を自身に重ね合わせる合同変換全体の集合を合同変換群とよびます．合同変換群は単なる集合ではなく，変換の合成を演算とみることで「群」という代数構造を持ちます．この群というものは現代数学の基本概念の一つであり，図形の対称性とは合同変換群そのもののことであると捉えるのが現代数学の発想です（[1, 2]）．

平面上，あるいは 3 次元空間上の合同変換からなる離散的な（直線上の点たちのように連続的ではなく，一つ一つがバラバラということ）群は完全に分類されています（[3, 4]）．そのような群 G を一つとり，基準点 P を定めて，G に属するような変換 T を P に施した点 $T(P)$ たちを全て考えて適切に結ぶことにより，問題の解が得られます．

以上が一つの方針ですが，他の考え方もあることでしょう．残念ながら本問題に取り組んだ論文は提出されなかったのですが，深く掘り下げることができる問題ですので次年度以降の挑戦をお待ちしています．

参考文献

[1] H. ヴァイル「シンメトリー」（遠山啓 訳）紀伊国屋書店, 1970.

[2] 志賀浩二「群論への３０講」朝倉書店, 1989.

[3] 岩堀長慶「初学者のための合同変換群の話—幾何学の形での群論演習」現代数学社, 2000.

[4] 川崎徹郎「文様の幾何学—文様における群作用と対称性」牧野書店, 2014.

野菜の乱切り

[問]
きゅうりやじゃがいもを乱切りにするとき，断片の体積と表面積ができるだけ揃うように切る方法について，輪切りや他の切り方とも比較して考察して下さい．

[解説]（文責: 岡﨑 建太）
自粛中はスパイスカレーばかり作っていたのですが，その中で思いついた問題です．

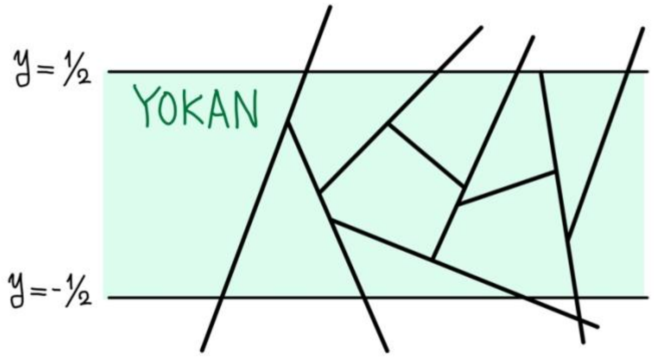
- “乱切り”って，乱（random）という言葉を使っているけれど，実際のところはすごく規則正しい切り方なんじゃないか？
- 輪切りやいちょう切り，短冊切りなどの他の切り方は断片がほぼ合同になっているけど，乱切りは必ずしも合同であることは求められていない．
- 合同性とは別の条件（例えば，今回のような体積と表面積に関する条件）を課すことで，乱切りと呼ばれる切り方の全貌が理解できるのではないか．

そんな疑問が次々に浮かんできて，それをそのまま皆さんに問うた，というわけです．ありとあらゆるところに数学のアイデアの種は落ちていると思います．残念ながら今回の応募数はゼロでしたが，今でもおもしろい問題だと思っていますので，来年以降も論文賞の自由課題として考えていただけるととても嬉しいです．

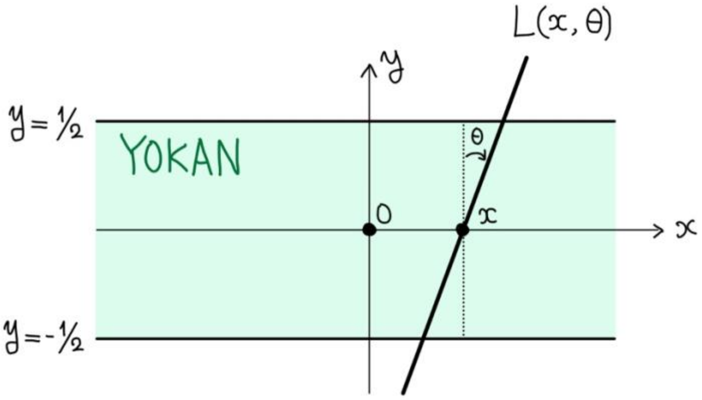
…これだけで解説を終えるのはあんまりですので，比較的単純な場合についてこの問題に取り組んでみることにします．

まず，食材としては幅 1，高さ 1 の**無限に長いヨーカン**を用意します．そして，包丁は必ず垂直に使うことにします．つまり，包丁の切り口がヨーカンの底面と必ず垂直になるように切ることにします．そうすると，2 つの断片の体積と表面積が一致することは，2 つの断片を真上から見たときに見える図形の面積と周の長さが一致することに他なりません（このことは少しの計算で示すことができるので，考えてみてください）．
ゆえに，無限ヨーカンを xy 平面の 2 直線 y=1/2, y=-1/2 に囲まれた領域（=YOKAN とおきます），包丁の切り口を xy 平面内の直線とみなして，問題を次のように設定することができます．

> 問題 (※): 『YOKAN に何本かの直線または半直線または線分（以下まとめて『切り口』と呼ぶ）を書き加えることを考える．ただし，切り口の端点は必ず他の切り口の上にあるものとする．切り口たちによって切り取られる YOKAN の断片たちの面積と周の長さが一致するような，切り口の選び方を考えよ』



今，x 軸と (x, 0) で交わり，y 軸とのなす角が θ であるような直線を L(x, θ) で表すことにします．



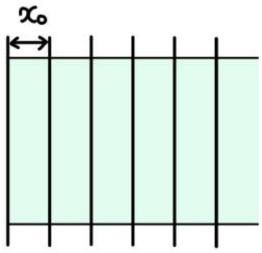
また，書き加える切り口を $L_0, L_1, L_2, L_3, \cdots$ と書くことにします．すると，以下のような解答がすぐに思いつきます．

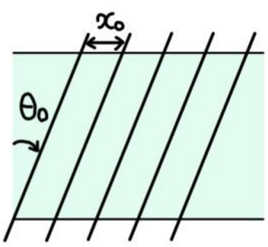
1. 輪切り:

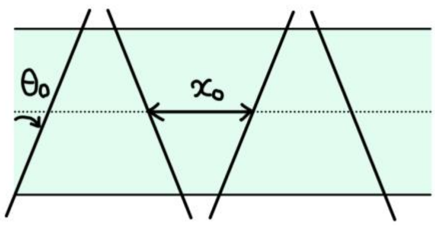
   $L_0 = L(0, 0)$， $L_1 = L(x_0, 0)$， $L_2 = L(2x_0, 0)$， $L_3 = L(3x_0, 0)$, ...
2. 斜め切り:

   $L_0 = L(0, \theta_0)$， $L_1 = L(x_0, \theta_0)$， $L_2 = L(2x_0, \theta_0)$， $L_3 = L(3x_0, \theta_0)$, ...
3. 乱切り:

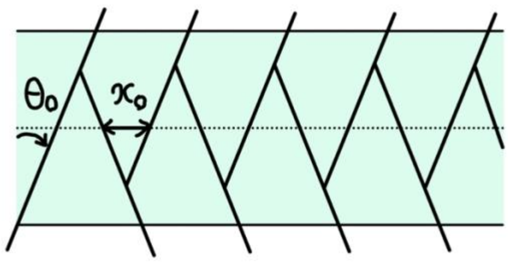
   $L_0 = L(0, \theta_0)$， $L_1 = L(x_0, -\theta_0)$， $L_2 = L(2x_0, \theta_0)$， $L_3 = L(3x_0, -\theta_0)$, ...







ただし x_0, θ_0 は定数です．1 は 2 や 3 で $\theta_0 = 0$ とした特別な場合であることにも注意してください．3 の乱切りについて上のような図（1 番右）を描きましたが，隣り合う 2 直線が YOKAN の内部で交点を持つときは少し様子が変わり，代わりに半直線を用いる必要があるので注意が必要です．



このとき，左から 1 番目の断片だけは 3 角形で他の断片と合同ではないですが，2 番目以降の断片は全て互いに合同です．このようなときも，広い意味で問題 (※) の条件を満たしているものとしましょう．
期待されるのは，この 2, 3（1 は 2 と 3 の特別な場合なので不要）で考えるべき切り方が尽くされている，ということです．

予想:
問題(※) の条件を満たす切り口の選び方は，2. 斜め切りと 3. 乱切り で全てである．

これは成り立つかもしれないし成り立たないかもしれません（進次郎構文…）．皆さんへの宿題とします．本当は，断片同士は合同でないのに周の長さと面積は一致しているような例を作りたいのですが，そのようなものは無いかもしれません．自分で問題の条件をいろいろと変えて考えていくのも楽しいと思います．

以上

自由課題応募論文 について

今回も力が入った論文の応募がありました．新型コロナのため，家でいろいろ考える時間が多くなったためでしょうか？

ジュニアの論文賞

金賞には

斎藤　輝さんの「凸四角形と対角線から生まれる特殊な四角形」

が選ばれました．

三角形の五心（重心など）を四角形に拡張する試みのなかで，実験的な事実として，高い頻度で平行四辺形が出現することに気づき，それらの状況を構図としてまとめ，四角形に五心を拡張した大変興味深い論文です．今の学問でカバーされていない未知のものの探索，そしてそれを一つの「絵」にまとめた力量と努力を評価しました．

銅賞に

鈴木　大和さんの「可換モノイドから Abel 群を構成する方法について」

が選ばれました．

これは自然数から整数，整数から有理数を構成する方法を一般化し，さまざまな現象の記述を可能にしたグロタンディエク群の構成をさらに一般化したものです．20 世紀の数学は，19 世紀の成果を「きちっとした」土台の上に記述していくことで目をみはるような進歩を遂げました．一般論と宝石のように散らばっている具体的な問題の間の緊張関係によって日々新しい数学が生まれています．

シニアの論文賞

金賞に

左藤　開己さんの「ビュフォンの針の高次元への拡張 ～ 図形を用いた確率の計算理論と幾何への応用 ～」

が選ばれました．

左藤さんの論文は，ビュフォンの問題をさまざまな形で一般化したものです．理論的な考察とシミュレーションによってさまざまな仮説を試していく様子が生き生きと記述された論文です．

銀賞に

中川　倫太郎さんの「斜線付き格子と角のパーフェクトマッチング」，

本山　拓樹さんの「新公式を用いた円周率計算の速度と精度の検証」

の二つが選ばれました.

中川さんの論文は名古屋大学の博士後期課程の行田康晃さんが一般の数学愛好者に向けた数理ウェーブでの講演からヒントを得て組合せ論的な考察を積み上げた論文です. 団代数の理論から出てくる概念ですが, 組合せ論的な問題として考察を深めていき, 興味ある関連を見出している点が評価されました.

本山さんの論文は, 定積分に円周率が現れたら被積分関数の級数展開を求め, 近似の速さを調べる, という「スジ」の良い問題をたて（この辺は高校の先輩との共同プロジェクトであるとのこと）そして新公式を発見し, 収束の速さを既知の公式と比較している点が高く評価されました.

銅賞に

浦川　知柔さんの「衝突現象と円周率」,

桐生　有喜さんの「 $2^m - 1$ が任意の奇数の倍数となる最小の自然数 m の探究 $\sim$ メルセンヌ素数とのつながり $\sim$」,

小川　純平さんの「パスカルの三角形の拡張とその性質」,

菅原　諒さんの「日射量を用いた「季節」のグラフ化」

がそれぞれ選ばれました.

浦川さんの論文は, 物理の実力テストの問題に興味を持ち, いろいろ調べたところ, Galperin の”Playing Pool with π(The number π from the billiard point of view)”を読み, その結果を理解するためにふた通りの別証明, および非弾性衝突への拡張も考察した論文です. 衝突現象はさまざま形で発展していく「大事な例」の一つであり, そこでかなり複雑な計算をしていく中で新しい証明, 拡張を見出していることが特に高く評価されました.

桐生さんの論文においては, メルセンヌ素数に興味を持って始められた, という研究で, 素数 p を法として考えたときの 2 の位数に焦点をあて, 初歩の整数論と線形代数を組み合わせることで新しい結果を出している点が評価されました.

小川さんの論文は, パスカルの三角形の多次元への拡張をシエルピンスキーのガスケットと呼ばれるフラクタル図形も視野におきながら論じたオリジナリティーの高い論文です.

菅原さんの論文は, 所々意味が取りにくい部分もあるのですが, 現象をモデル化してコンピュータを使って数値実験をしたり, 複素関数論の留数を使って積分を計算しようとしたりと, 才気が感じられた点が評価されました.

特別賞に,

本木　玲菜 さんと竹内　彩 さんの「データから見る新型コロナウイルス」が選ばれま

した.

　この論文では広く COVID-19 についての資料を集め，統計的に見やすい形にしてまとめたところが評価されました.

4. 受賞者一覧

第31回日本数学コンクール　受賞者一覧

受賞者16名/参加者191名

種別	整理番号	氏名	フリガナ	学年	性別	学校名	学校住所
大賞	S017	吉田　智紀	ヨシダ　トモキ	高2	男	東大寺学園高等学校	奈良県
2名	S141	石堀　朝陽	イシボリ　アサヒ	高2	男	筑波大学附属駒場高等学校	東京都
優秀賞	S008	森山　和	モリヤマ　イズミ	高2	男	富山県立富山中部高等学校	富山県
5名	S012	北川　陽斗	キタガワ　ハルト	高3	男	滝高等学校	愛知県
	S020	永井　駿匡	ナガイ　タカマサ	高1	男	愛知県立刈谷高等学校	愛知県
	S077	南　奎佑	ミナミ　ケイスケ	高3	男	三重県立桑名高等学校	三重県
	S103	緒方　麻明知	オガタ　マアチ	高2	男	愛知県立一宮高等学校	愛知県
優良賞	S006	利根川　遼	トネガワ　ハルカ	高1	男	筑波大学附属駒場高等学校	東京都
5名	S039	中田　匠海	ナカダ　タクミ	高1	男	愛知県立明和高等学校	愛知県
	S059	宇田　智哉	ウダ　トモヤ	高2	男	東京都立戸山高等学校	東京都
	S106	稲垣　宗矩	イナガキ　ムネノリ	高2	男	愛知県立一宮高等学校	愛知県
	S108	長谷川　莉久	ハセガワ　リク	高2	男	愛知県立一宮高等学校	愛知県
奨励賞	S001	石川　竜聖	イシカワ　リュウセイ	高3	男	東海高等学校	愛知県
4名	S007	亀谷　柊瑠	カメヤ　ノエル	高1	女	高田高等学校	三重県
	S055	菊地　朝陽	キクチ　アサヒ	高1	男	筑波大学附属駒場高等学校	東京都
	S088	椙山　翔	スギヤマ　ショウ	高2	男	千葉県立長生高等学校	千葉県

＊問題　1. 集合検査法　2. トーナメント戦の秘密　3. 企画列車のスタンプラリー
4. 凸多角形の面積　5. 植物の成長を数式であらわすと？

第24回日本ジュニア数学コンクール　受賞者一覧

受賞者18名/参加者47名

種別	整理番号	氏名	フリガナ	学年	性別	学校名	学校住所
大賞	J005	小出　慶介	コイデ　ケイスケ	中3	男	灘中学校	兵庫県
2名	J029	酒井　悠真	サカイ　ユウマ	中3	男	東海中学校	愛知県
優秀賞	J001	尼丁　祥伍	アマチョウ　ショウゴ	中2	男	灘中学校	兵庫県
5名	J010	中　洋貴	ナカ　ヒロキ	中2	男	灘中学校	兵庫県
	J011	松柳　佳奈	マツヤナギ　カナ	中2	女	ぐんま国際アカデミー	群馬県
	J013	妻鹿　洸佑	メガ　コウスケ	中2	男	筑波大学附属駒場中学校	東京都
	J033	鵜飼　真帆	ウカイ　マホ	中3	女	南山中学校女子部	愛知県
優良賞	J004	齊藤　綾人	サイトウ　アヤト	中2	男	甲陽学院中学校	兵庫県
5名	J018	山本　叡明	ヤマモト　サトアキ	中2	男	東海中学校	愛知県
	J026	齋藤　輝	サイトウ　アキラ	中2	男	市川中学校	千葉県
	J027	伊藤　晃二	イトウ　コウジ	中2	男	皇學館中学校	三重県
	J037	一宮　紘斗	イチミヤ　ヒロト	中2	男	暁中学校高等学校	三重県
奨励賞	J009	加藤　湊人	カトウ　ミナト	中2	男	灘中学校	兵庫県
6名	J015	安斎　友貴	アンザイ　トモキ	中1	男	麻布中学校	千葉県
	J017	矢野東　京花	ヤノト　キョウカ	中3	女	光塩女子学院中等科	東京都
	J019	西山　隆雪	ニシヤマ　タカユキ	中1	男	聖光学院中学校	神奈川県
	J043	中嶌　瑛太	ナカシマ　エイタ	中2	男	暁中学校高等学校	三重県
	J046	角田　茉央	カクダ　マオ	中3	女	暁中学校高等学校	三重県

＊問題　1. 集合検査法　2. 速決じゃんけん　3. 企画列車のスタンプラリー
4. 凸多角形の面積　5. 植物の成長を数式であらわすと？

第21回　日本数学コンクール論文賞受賞者一覧

受賞9件/応募21件

受賞種別	氏　名	フリガナ	所属/学校名	学年	テーマ
金賞（1名）	左藤　開己	サトウ　ハルキ	奈良女子大学附属中等教育学校	高3	ビュフォンの針の高次元への拡張 ～図形を用いた確率の計算理論と幾何への応用～
銀賞（2名）	本山　拓樹	モトヤマ　ヒロキ	桐蔭学園中等教育学校	高3	新公式を用いた円周率計算の速度と精度の検証
	中川　倫太郎	ナカガワ　リンタロウ	愛知県立旭丘高等学校	高3	斜線付き格子と角のパーフェクトマッチング
銅賞（5名）	浦川　知柔	ウラカワ　トモナリ	福岡県立修猷館高等学校	高3	衝突現象と円周率
	桐生　有喜	キリウ　ユウキ	静岡サレジオ高等学校	高2	2^m-1が任意の奇数の倍数となる最小の自然数mの探究 ～メルセンヌ素数とのつながり～
	小川　純平	オガワ　ジュンペイ	愛知県立明和高等学校	高3	パスカルの三角形の拡張とその性質
	菅原　諒	スガワラ　リョウ	北海道立北海道静内高等学校	高1	日射量を用いた「季節」のグラフ化
	北川　陽斗	キタガワ　ハルト	滝高等学校	高3	感想戦 問題3：企画列車のスタンプラリー／問題4：凸多角形の面積
特別賞（共著1組2名）	本木　玲菜	モトキ　レナ	埼玉県立浦和第一女子高等学校	高2	データから見る新型コロナウイルス
	竹内　彩	タケウチ　アヤ		高2	

第21回　日本ジュニア数学コンクール論文賞受賞者一覧

受賞2件/応募7件

受賞種別	氏　名	フリガナ	所属/学校名	学年	テーマ
金賞	齋藤　輝	サイトウ　アキラ	市川中学校	中2	凸四角形と対角線から生まれる特殊な四角形
銀賞	受賞者なし				
銅賞	鈴木　大和	スズキ　ヤマト	さいたま市立大砂土中学校	中3	可換モノイドからAbel群を構成する方法について

令和2年度参加状況

(1)日本数学コンクール（シニア）　　参加数　191

地域	学校所在地	性別	高校生						計	
			1年		2年		3年			
中部	愛知	男	24	28	17	21	4	4	45	53
		女	4		4		0		8	
	岐阜	男	7	7	6	7	0	0	13	14
		女	0		1		0		1	
	三重	男	6	10	19	23	1	1	26	34
		女	4		4		0		8	
	長野	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
	富山	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
関東	東京	男	9	11	11	12	0	0	20	23
		女	2		1		0		3	
	千葉	男	0	0	10	14	0	0	10	14
		女	0		4		0		4	
	神奈川	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
	栃木	男	5	5	8	8	0	0	13	13
		女	0		0		0		0	
	群馬	男	4	4	0	0	0	0	4	4
		女	0		0		0		0	
近畿	大阪	男	5	6	5	6	0	0	10	12
		女	1		1		0		2	
	京都	男	0	1	0	0	0	0	0	1
		女	1		0		0		1	
	奈良	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
	兵庫	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
中国	岡山	男	0	0	1	1	0	0	1	1
		女	0		0		0		0	
四国	愛媛	男	7	11	6	6	0	0	13	17
		女	4		0		0		4	
小計		男	67	83	88	103	5	5	160	191
		女	16		15		0		31	

第31回日本数学コンクール参加校一覧

学校所在都道府県	学　校　名
愛知県	愛知県立一宮高等学校
	愛知県立刈谷高等学校
	名古屋大学教育学部附属中・高等学校
	愛知県立瑞陵高等学校
	愛知県立明和高等学校
	愛知県立旭野高等学校
	東海中学校・高等学校
	椙山女学園中学校・高等学校
	滝中学校・高等学校
	名古屋市立工芸高等学校
岐阜県	岐阜県立恵那高等学校
	岐阜県立大垣北高等学校
	岐阜東中学校・高等学校
三重県	暁中学校・高等学校
	三重県立桑名高等学校
	三重県立津高等学校
	高田中・高等学校
長野県	長野県屋代高等学校・附属中学校
富山県	富山県立富山中部高等学校

学校所在都道府県	学　校　名
東京都	東京都立戸山高等学校
	開成中学校・高等学校
	桜蔭中学校・高等学校
	筑波大学附属駒場中学校・高等学校
	東京都立多摩科学技術高等学校
	東京都立清瀬高等学校
千葉県	千葉県立長生高等学校
神奈川県	神奈川県立横須賀高等学校
栃木県	栃木県立栃木高等学校
	栃木県立宇都宮高等学校
群馬県	群馬県立高崎高等学校
大阪府	羽衣学園中学校・高等学校
	近畿大学附属高等学校・中学校
	大阪府立四條畷高等学校
京都府	洛南高等学校・附属中学校
奈良県	東大寺学園中学校・高等学校
兵庫県	灘中学校・高等学校
岡山県	岡山県立倉敷青陵高等学校
愛媛県	愛媛県立松山南高等学校

（2）日本ジュニア数学コンクール（ジュニア）　　参加数　47

地域	学校所在地	性別		中学生						計	
			6年	1年		2年		3年			
中部	愛知	男	0	1	1	3	3	7	8	11	12
		女	0	0		0		1		1	
	岐阜	男	0	1	1	1	1	0	0	2	2
		女	0	0		0		0		0	
	三重	男	0	0	0	10	12	2	4	12	16
		女	0	0		2		2		4	
関東	東京	男	0	2	2	2	2	0	1	4	6
		女	1	0		0		1		2	
	千葉	男	0	1	1	1	1	0	0	2	2
		女	0	0		0		0		0	
	神奈川	男	0	1	1	0	0	0	0	1	1
		女	0	0		0		0		0	
	群馬	男	0	0	0	0	1	0	0	0	1
		女	0	0		1		0		1	
近畿	兵庫	男	0	1	1	4	4	2	2	7	7
		女	0	0		0		0		0	
小計		**男**	**0**	**7**	**7**	**21**	**24**	**11**	**15**	**39**	**47**
		女	**1**	**0**		**3**		**4**		**8**	

第24回日本ジュニア数学コンクール参加校一覧

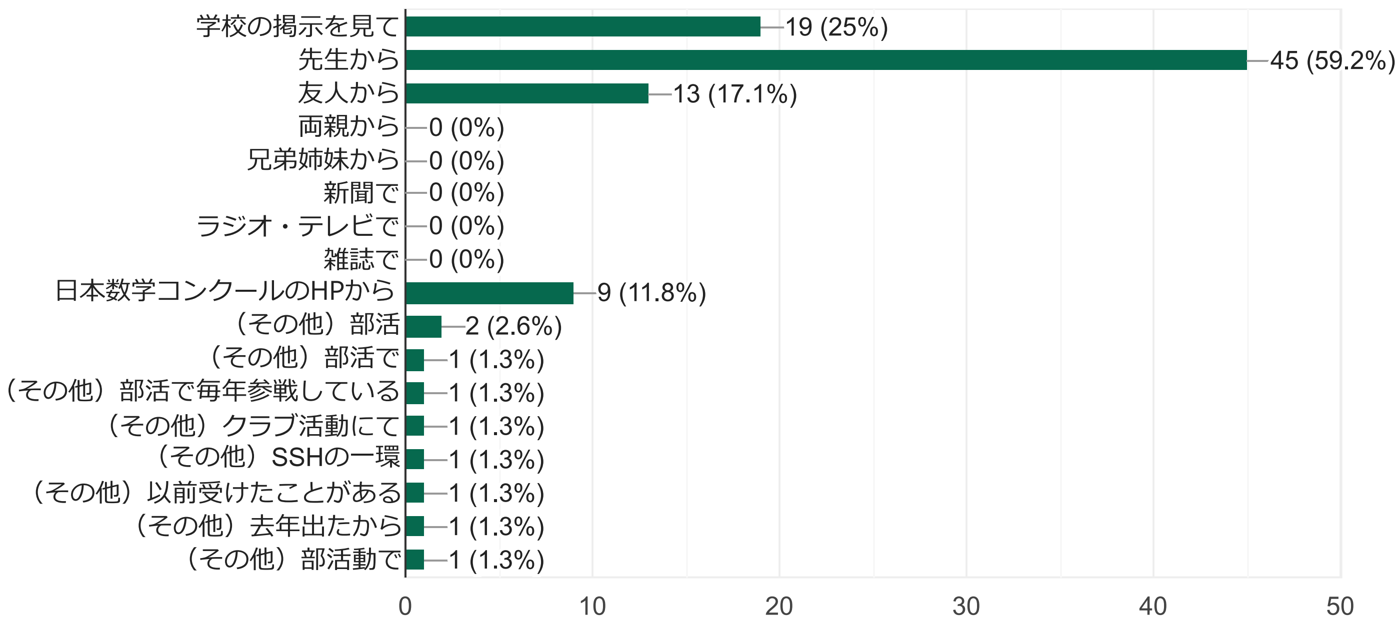
学校所在都道府県	学校名
愛知県	犬山市立犬山中学校
	星城中学校・高等学校
	東海中学校・高等学校
	滝中学校・高等学校
	南山高等・中学校 女子部
	名古屋市立志段味中学校
	愛知工業大学名電中学校・高等学校
岐阜県	羽島市立竹鼻中学校
	輪之内町立輪之内中学校
三重県	高田中・高等学校
	皇學館中学校・高等学校
	暁中学校・高等学校
	志摩市立志摩中学校

学校所在都道府県	学校名
東京都	Manai Institute of Science and Technology
	渋谷教育学園渋谷中学高等学校
	筑波大学附属駒場中学校・高等学校
	開成中学校・高等学校
	光塩女子学院 中等科／高等科
千葉県	麻布中学校・高等学校
	市川中学校・高等学校
神奈川県	聖光学院中学校高等学校
群馬県	ぐんま国際アカデミー
兵庫県	灘中学校・高等学校
	甲陽学院中学校・高等学校

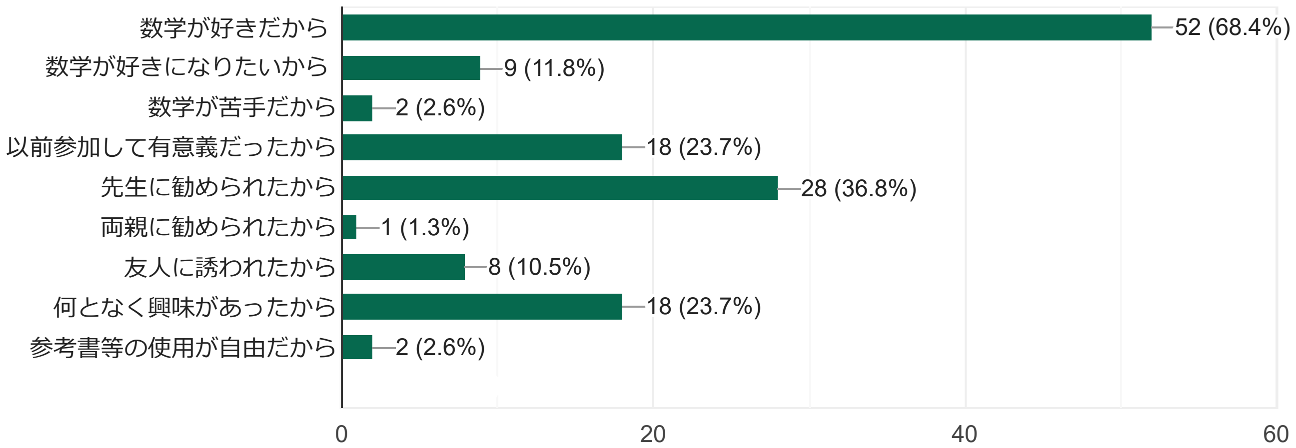
令和2年度参加者アンケート調査結果（シニア）

アンケート総数76（参加者191名）

1.今回のコンクールの開催については、どのようにして知りましたか。（複数回答可）

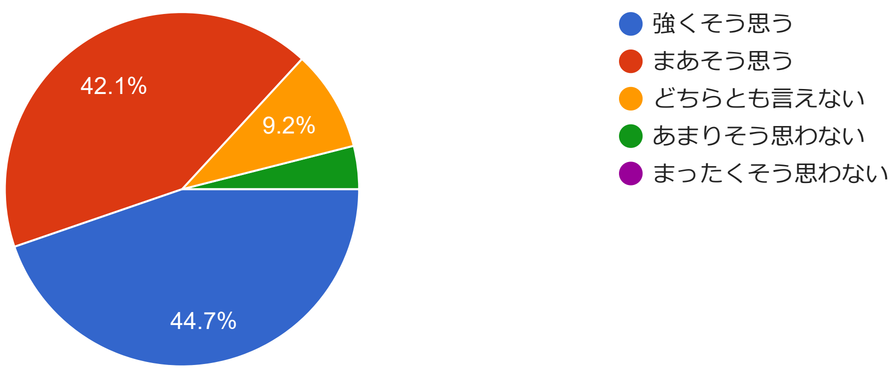


2.今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。（複数回答可）

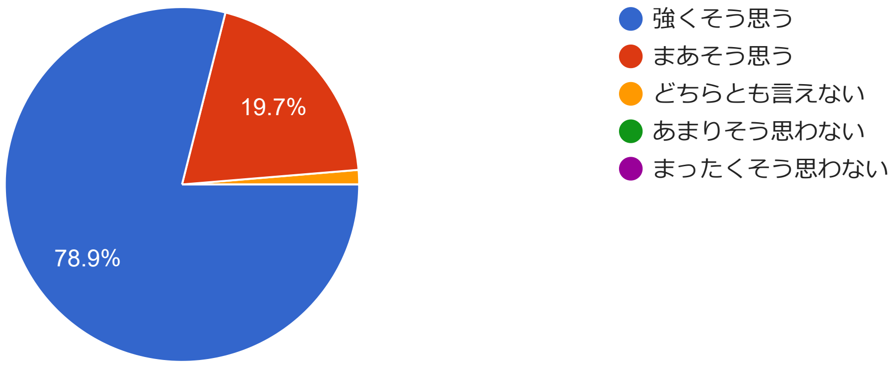


3.今回のコンクールの問題については、どのように感じましたか。

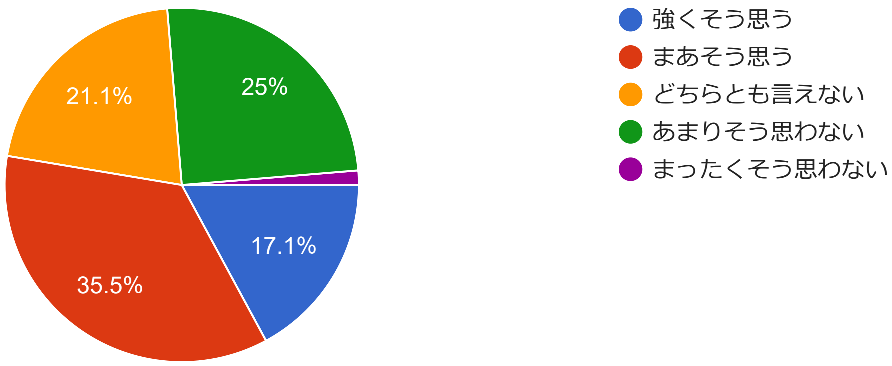
3A.解いていて楽しかった



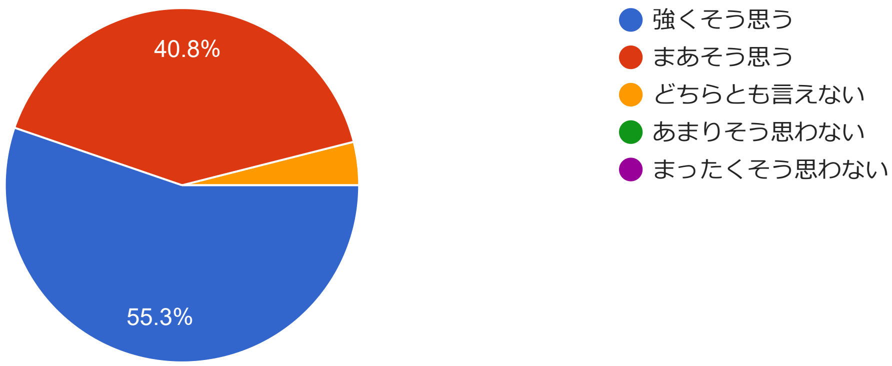
3B.難しかった



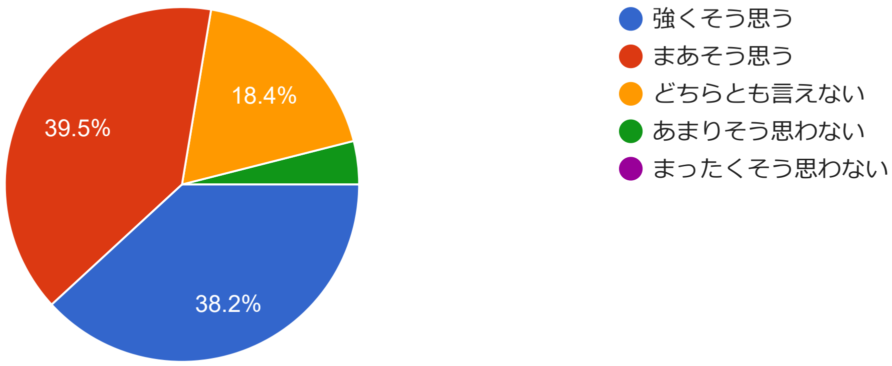
3C.問題文の意味がわかりにくかった



3D.数学の学問的広さを感じた

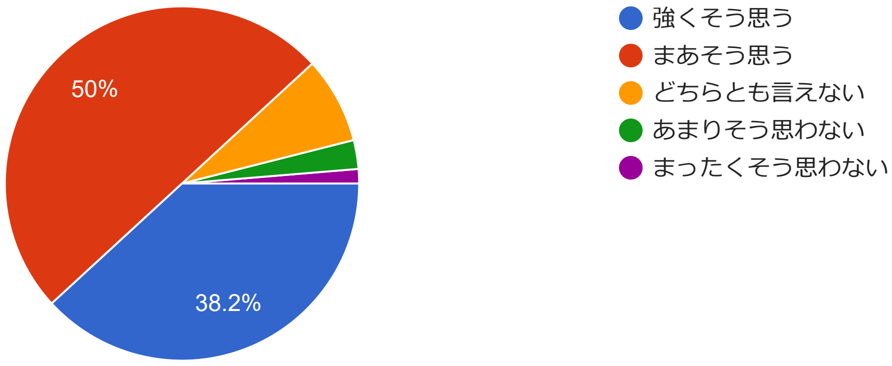


3E.数学に関するイメージが、これまでより良くなった

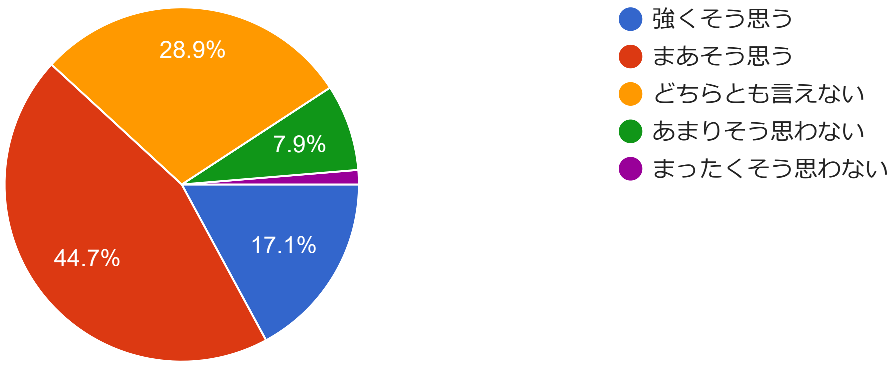


4.今回のコンクールに参加して、今後のことをどう思いますか。

4A.勉強の励みになる



4B.今後の進路を考える参考になる



5.数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。あれば、それはどんな分野ですか。　（例：物理）

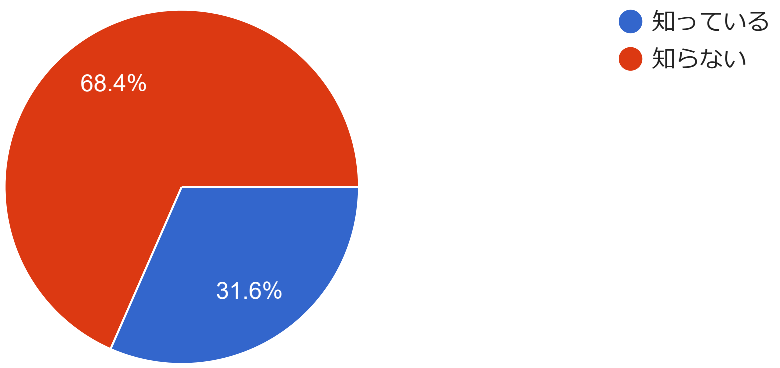
・物理
・化学
・生物
・物理、科学の全分野を使うコンクール
・英語
・天文学
・プログラミング
・プログラム（例えば、シニア問題5の木の図を生成するような問題）
・競プロ
・自然科学全般(分野融合的な問題を中心として)
・量子力学
・理論化学
・地学
・物理、経済の自由記述
・哲学について話し合って答えを出す(シュレディンガーの猫など
・言語学
・史学(文系で申し訳ないです)
・鉄道
・謎解き
・数学だからこそできると思います。
・数学の中でも発想により中学生でもかんたんに解けるような問題を解いてみたい

6.今まで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

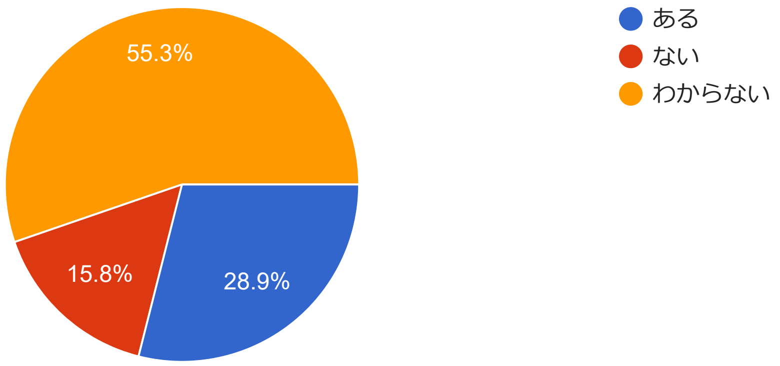
・数学ガール
・虚数の情緒
・Newton
・Newton別冊微分積分
・ニュートン
・ニュートン 微分と積分
・解析入門
・100人の数学者
・素数表150000個
・青の数学
・フェルマーの最終定理
・オイラーの最終定理
・マレー数理生物学入門
・IUT理論　宇宙と宇宙をつなぐ数学
・現代数学の考え方　（前回景品）
・古典数学の難問101
・浜松渚の計算ノート
・最速降下曲線の本(名前は忘れてしまいました)
・数の世界
・創作数学演義
・素数はめぐる
・無限論の教室
・数学屋
・知識ゼロでも楽しく読める！
・数学のしくみ
・でぃーぷな算数の教科書
・読んだら眠れなくなる微分積分の話
・博士の愛した数式
・あまり本は読まない。

7.「数理ウェーブ」について

7A.数理ウェーブが行われていることを知っていますか。



7B.これから数理ウェーブに参加する希望がありますか。



7C.これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

・超弦理論
・整数論
・名古屋大学で研究している数学
・セル・オートマトン
・整数論
・グラフ理論
・原子
・ベン図
・高次元と流体力学
・シュレーディンガーの猫
・波動関数の収束
・進数について
・数学コンクールにあったような問題
・数学の難しい話題についてであれば聞いてみたいです！
・物理

8.その他、感想があれば何でも結構ですから書いてください。

・とても楽しかったです。ありがとうございました。
・楽しかったです！！ありがとうございました！
・楽しかったです。
・楽しく解くことができました。ありがとうございます。
・とても楽しく、オンラインでも参加できてよかったです。ありがとうございました。
・とても難しかったけど楽しかったです
・とても有意義な時間でした！
・とても有意義な時間を過ごすことができました。
・とても有意義なものになりました。今日学んだことや発見したことをこれからも活かしていきたいです。ありがとうございました。
・とても難しい内容であったと感じましたが、同時に自分の未熟さやさらなる数学的な面白さを知ることが出来たのでとても有意義な時間でした。
・オンライン開催という事で本来は受験することができないが、自宅で受験することができて嬉しかったです。
・問題は難しかったが、とても考えさせられて充実した時間になった。また、もっと数学を深く学びたいと思った。
・問題は全て難しかったけど、ひとつひとつの問題は面白くてとても楽しめたし、これからの進路などに向けていい経験になったと思うので、また次回も受けたいと思いました。次回も面白い問題を作ってくださるよう、楽しみに待っています。
・初めての個人戦でしたが、一人で集中するのも楽しかったです。団体戦も来年は是非開催していただきたいです。
・身の回りのものが数学と結びついていて興味深かった。
・例年じっくりとその後1ヶ月噛んでも味がするような問題を提示されていて強く尊敬します。
・難しかったですが、いつもと違って楽しんで考えることができました。
・学校のテストなどとは全く違う問題ばかりで数学の奥深さを改めて感じました。
・今まで触れたことのないような難問に挑戦してほとんど解くことはできませんでしたが、いい経験になったと思います。
・自宅参加・全員個人戦ということで去年とは違った形でしたが、楽しむことができました。普段の数学では扱わないような問題がたくさんあって楽しかったです。時間がなくて全ての問題に取り組むことができなかったですが、時間を見つけて考えたいです。
・今回参加は３度目となります、毎回ありがとうございます！前回、前々回とグループでの参加で2回ともに奨励賞をいただきました。ですが、一人で解くのは前回までと勝手が違い問題の意図や言葉の意味を理解するのに戸惑ってしまい、全然解ききることができませんでした…。とにかく、それほどに難しい問題で、かつ学生でもわかりやすく取り組みやすい題材で、真剣に向き合える問題はほかにありません！厳しいご時世の中でもこのような企画を開催してくださり、本当にありがとうございました！！
・もともと私も、身近なことや社会で起こっていることを数学的に考えることが好きなので、今回はじめて日本数学コンクールの問題を解いてみて「楽しいな、もっと考えて解いてみたいな」と思った。しかし、やはりまだ私の数学力が足りなくて、上手く解けず、解き終わらずに中途半端な解答を送る結果となってしまった。数学コンクールの問題がもっと解けるようになりたいです。数学をもっと勉強したいと思います。
・オンラインでの参加でいつもと違う感じがしたが、やはり解いていて楽しかった
・5番が面白かったです
・難しかったです。
・文章の解読すらもうまくいかなかったです
・問題文を導入と問題でもう少し読みやすくしてくださるとありがたい。
・今回の数学コンクールの設問1の問題がわかりにくく、解くのに時間がかかってしまったのでもう少しわかりやすい文章を用意してほしいです。また、設問3は問題としてはとても面白く、いい問題だと思いましたがまだΣを習っていない高校1年生からすると急にΣを出されると対応しきれないのではないかと思いました。
・ジュニアからシニアに変わって、やはり問題が難しくなった。年齢が高くてもジュニアを受けれるようにしてほしいと思った。(受賞資格は無し等の条件付きで)
・難しくかなり時間がかかったけれど、面白かったので時間が許せば全問解きたいです。例年と違ってメー

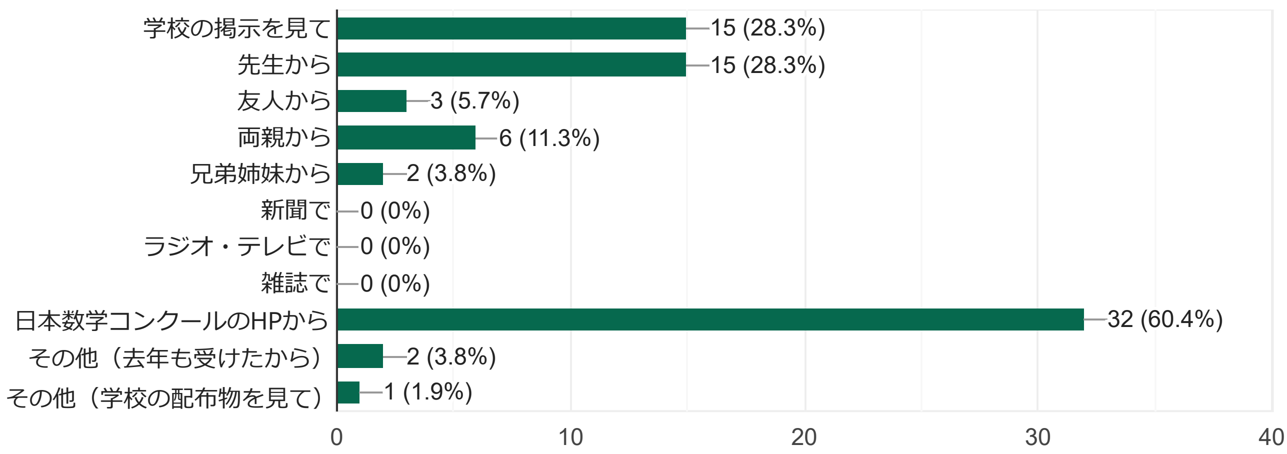
ル提出だったので、実際に解くことのできる時間は例年よりも短くなりました。できれば30分ほど制限時間を伸ばしていただけるとありがたいです。

・提出方法が煩雑だった(仕方ないことですが…)来年は会場で受けられるような状態になっていることを祈っています！ありがとうございました。
・解答の写真を上手く撮ることができず、送るのに30分程かかってしまったので、別のやり方を考えてもよいかと思った。（ただ、それは撮る人の上手さなので仕方がない気もしますが）
・メールで送信する際に、何通目というのがわかりにくかったです。
・準備し忘れて1時間半無駄にしてしまった。できれば長期期間中が良かった。
・模試の日程も考えてほしい
・オンラインではなく現場でやりたい

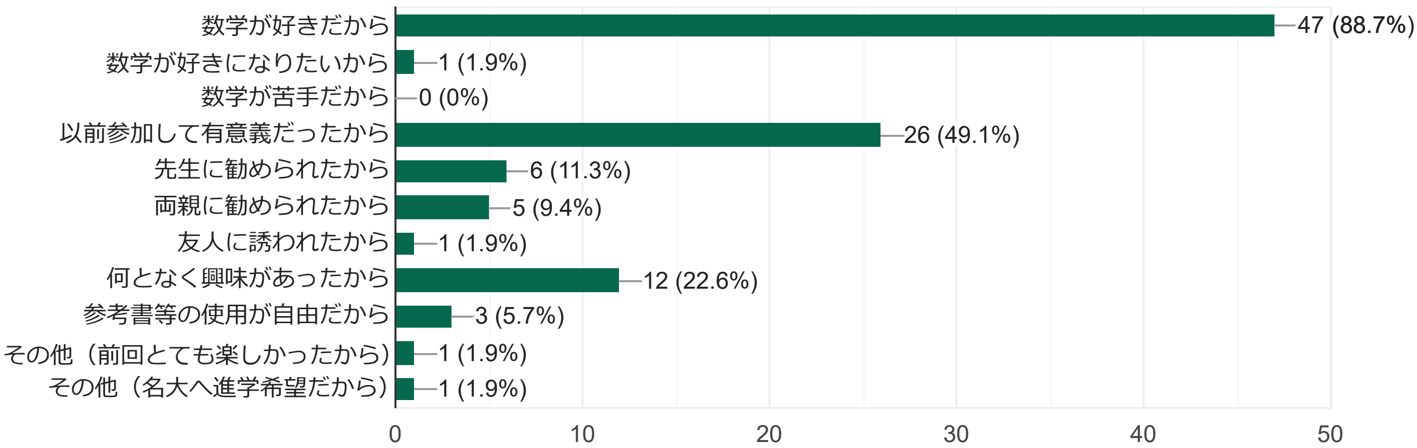
令和2年度参加者アンケート調査結果（ジュニア）

アンケート総数53（参加者47名）
※回答は1人1回までと通知していたが、重複して回答した参加者がいると思われる。

1.今回のコンクールの開催については、どのようにして知りましたか。（複数回答可）

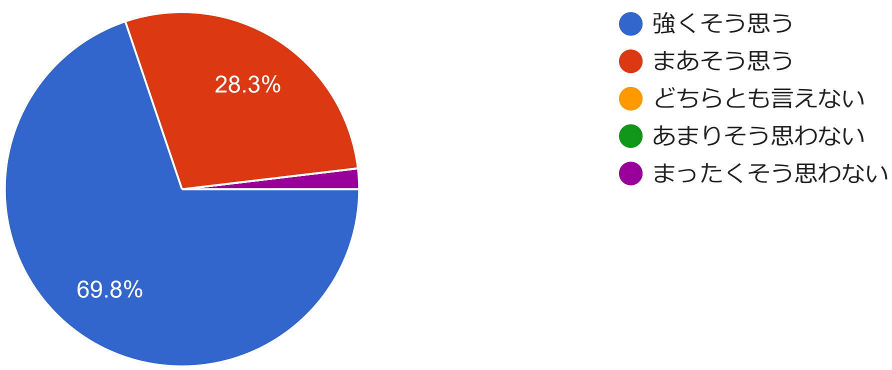


2.今回のコンクールを受けようと思ったきっかけは何ですか。（複数回答可）

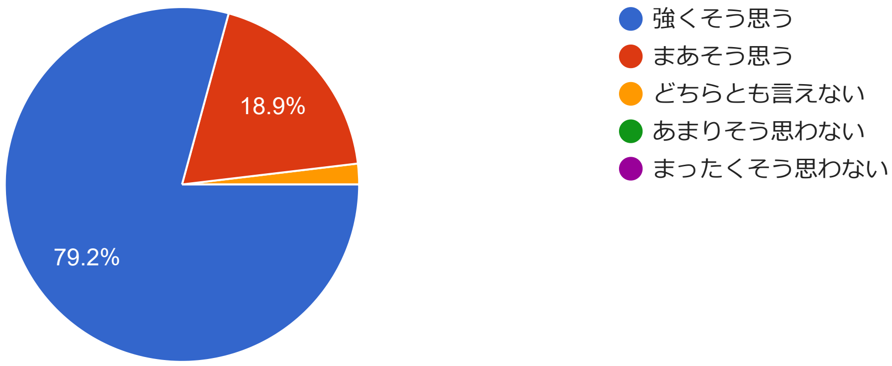


3.今回のコンクールの問題については、どのように感じましたか。

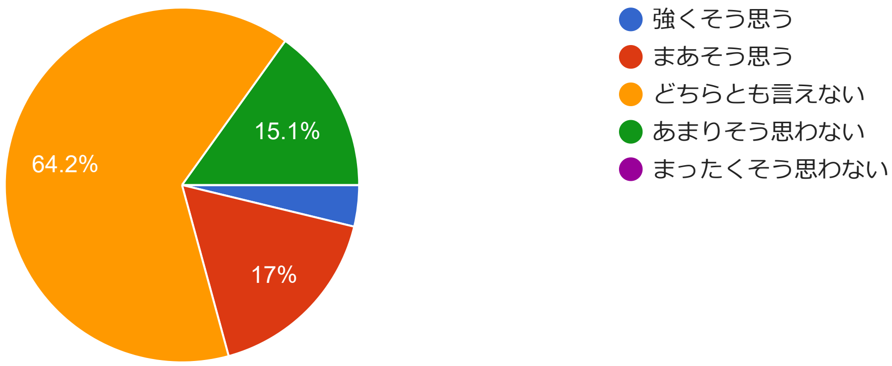
3A.解いていて楽しかった



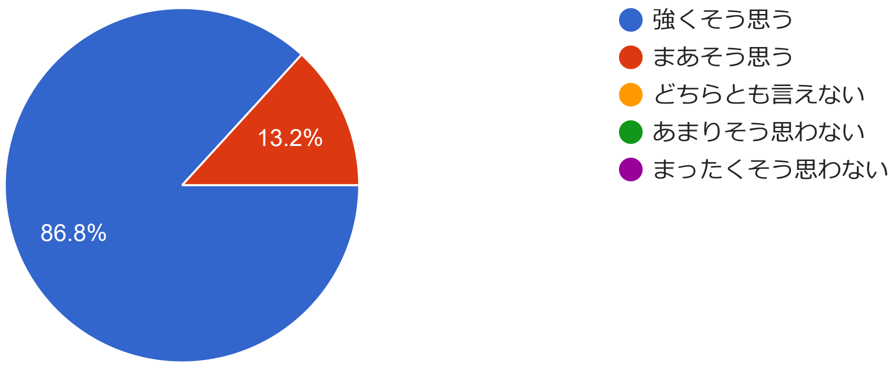
3B.難しかった



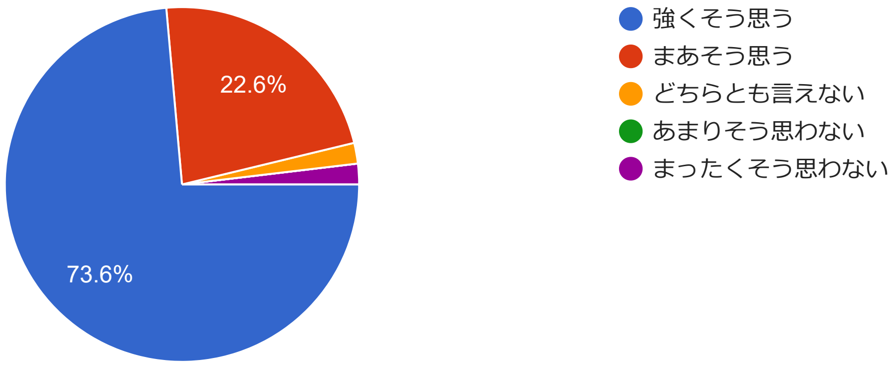
3C.問題文の意味がわかりにくかった



3D.数学の学問的広さを感じた

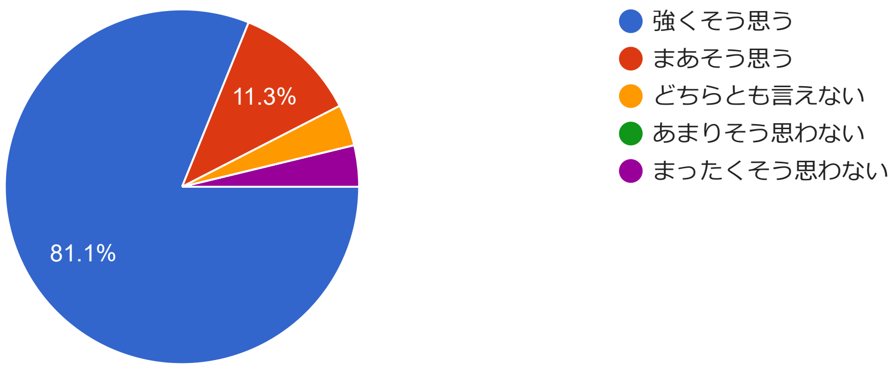


3E.数学に関するイメージが、これまでより良くなった

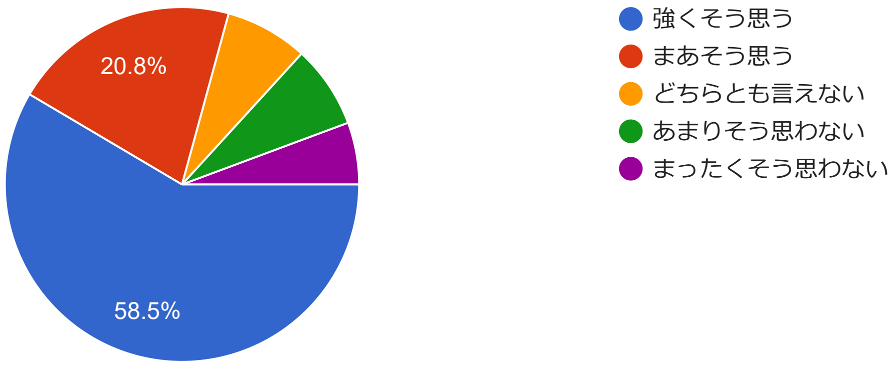


4.今回のコンクールに参加して、今後のことをどう思いますか。

4A.勉強の励みになる



4B.今後の進路を考える参考になる



5.数学以外の分野でも同じようなコンクールがあったらよいと思いますか。あれば、それはどんな分野ですか。　（例：物理）

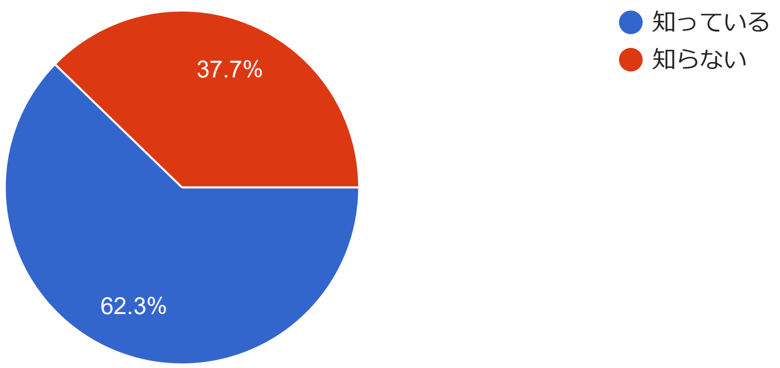
・物理、英語のスピーチコンクール
・英語
・化学
・物理
・情報
・生物、地理
・科学

6.今まで何か数学に関する本で特に興味を持って読んだものがあったら書いてください。

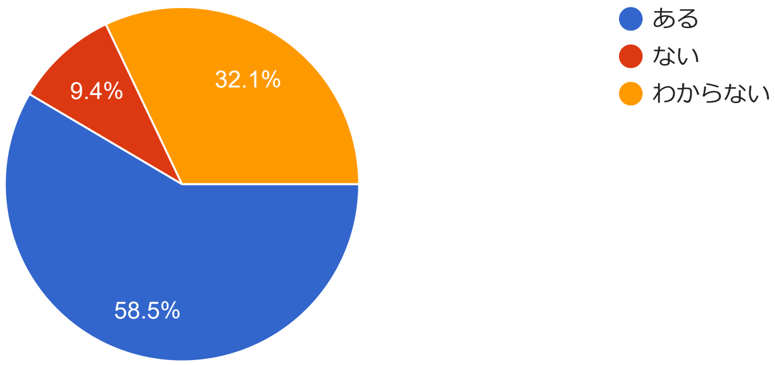
・幾何的な折りアルゴリズム
・数学ガール
・その悩み、僕らなら数学で解決できます！
・三角形の七不思議
・数学が生まれる物語
・算数おもしろ大辞典
・線形代数の基礎
・現代数学の考え方
・単位の早分かり便利帳
・はじめての数論数論
・数の悪魔
・博士の愛した数式

7.「数理ウェーブ」について

7A.数理ウェーブが行われていることを知っていますか。



7B.これから数理ウェーブに参加する希望がありますか。



7C.これから数理ウェーブで行ってほしいテーマがあったら書いてください。

・宇宙物理学
・ゲーム理論
・ガロア理論
・図形問題の着眼点など
・数学を普段の生活に使うとすると、どんな使い方ができるか？

8.その他、感想があれば何でも結構ですから書いてください。

・ありがとうございました

・とても面白かったです。ありがとうございました！

・楽しかったです

・今まで見たことが無いような面白い問題ばかりで、とても楽しく解くことができました。

・今回初めての参加ですが、来年もまた参加したいです。

・少し難しいところもありましたが、解いていてとても楽しかったです。また参加したいと思いました。

・難しかったけど、少し解けた時はうれしかったです。このような問題をつくった人はすごすぎると思いました。そんな人になってみたいです。

・難しかったけれど、数学がこんなに奥が深いという事に気付けた時間でした。

・図形問題がとても面白く、昔同じような問題を解いたような懐かしい気持ちになりました。

・全体を通じて楽しかった。しかし、問題数を少し減らしても良かったのではないかと感じた。

・疲れました

・ありがとうございました。数学的用語がならってないと、わかりにくいです

・日本語がおかしくなっている部分が多かった

・問題のフォントが揃っていなかったり、大問番号が書いていなかったりした点がわかりづらかった。

・解答がとても送りづらかった。

日本数学コンクール実行委員会委員名簿

学内委員	宇澤　達	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	古庄　英和	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	小林　亮一	（名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	中島　誠	（名古屋大学多元数理科学研究科　准教授）
	田地　宏一	（名古屋大学工学研究科　准教授）
	西村　治道	（名古屋大学情報学研究科　教授）
	松田　晃孝	（名古屋大学理学研究科　講師）
	工藤　教孝	（名古屋大学経済学研究科　教授）
	渡邉　武志	（名古屋大学教育学部附属高等学校　主幹教
	若山　晃治	（名古屋大学教育学部附属高等学校　教諭）
学外委員	伊師　英之	（大阪市立大学大学院理学研究科　教授）
	松川　和彦	（一宮研伸大学　事務局長）
	高田　宗樹	（福井大学工学部・工学研究科　教授）
	保倉　理美	（福井大学工学部・工学研究科　教授）
	服部　展之	（愛知県立明和高等学校　教諭）
	野村　昌人	（愛知県立旭丘高等学校　教諭）
	村田　英康	（愛知県立高蔵寺高等学校　教諭）
	小島　洋平	（愛知県立岡崎高等学校　教諭）
	渡辺　喜長	（愛知県立熱田高等学校　教頭）
	青木　勝人	（愛知県立旭丘高等学校　定時制　教諭）
	髙原　文規	（愛知県立愛知総合工科高等学校　教諭）
	伊藤　慎吾	（愛知県立鳴海高等学校　教諭）
	小島　彰二	（愛知県立安城南高等学校　教諭）
	奥田　真吾	（三重県立津高等学校　講師）
	岩本　隆宏	（三重高等学校　講師）
	小倉　一輝	（三重県立伊賀白鳳高等学校　教諭）
	市川　敏	（椙山女学園高等学校　教諭）
	青木　健一郎	（愛知県立刈谷高等学校　教諭）
	田邊　篤	（三重県立津高等学校　教諭）
	岡﨑　建太	（京都大学数理解析研究所　研究員）
	久世　武志	（大阪府立住吉高等学校　教諭）
	高木　由起子	（愛知県立東海商業高等学校　教諭）
	川上　祥子	（愛知県立豊田西高等学校　教諭）
顧問	大沢　健夫	（元名古屋大学多元数理科学研究科　教授）
	安本　雅洋	（元名古屋大学情報科学研究科　教授）
	丹羽　一雄	
	樋口　英次	（愛知淑徳高等学校　教諭）
	矢野　秀樹	（大同大学大同高等学校　教諭）
	田所　秀明	（元三重県立伊勢高等学校　教諭）

日本数学コンクール委員会委員名簿

委員長	杉　山　　直	（理事・副総長）
委　員	岡　田　　聡　一	（多元数理科学研究科長）
	園　田　　正	（経済学研究科長）
	枝　廣　　正　人	（情報学研究科長）
	阿波賀　邦夫	（理学研究科長）
	水　谷　　法　美	（工学研究科長）
	髙　橋　　宏　治	（運営局長）
	山　口　　茂	（研究協力部長）
	宇　澤　　達	（実行委員会委員長）

（令和2年4月1日現在）

主　　催

名 古 屋 大 学
日本数学コンクール委員会
名古屋市千種区不老町

後　　援

愛知県教育委員会	岐阜県教育委員会
三重県教育委員会	名古屋市教育委員会
大阪市教育委員会	愛知県高等学校数学研究会
和歌山県橋本市教育委員会	三重県高等学校数学教育研究会
岐阜県高等学校数学教育研究会	中日新聞社
大阪高等学校数学教育会	東海テレビ放送株式会社
テレビ愛知株式会社	

■■■ 編 集 後 記 ■■■

３０年を超える日本数学コンクールの歴史の中で，コロナ禍は最大級の危機といえます．結果的に，生徒の皆さんが自宅に居ながらにしてコンクールに参加するという状況が可能となった一つの要因は，ノートや参考書の持ち込みを自由とした伝統と，それを敷衍してインターネットの閲覧までも自由としたこの数年の出題のノウハウがあったことといえます．それでも，初めてのことばかりで手探りの運営には大きな困難が伴いました．無事に表彰式まで終えることができたのは，関係者の方々の献身的な尽力と，数学を愛する参加者たちの熱意の賜物です．
オンライン開催の経験は，日本数学コンクールの新しい可能性を拓く画期的なものでしたが，様々な点で無理を重ねていたことも事実です．持続可能な運営体制の模索という最大の問題に，今度こそ正面から取り組むことになります．