問題2. 二進数のような十進数

最高位と一の位を 1 として、その他の各位の数は 1 と 0 が規則的に並んでできる数の列 $\left\{A_n(m)\right\}$ を考えます。ここで、自然数 n は項数を表し、m は自然数 k の関数で 1 と 1 に挟まれる 0 の個数を表すとします。例えば $m(k)=k$ のときは、1 と 1 に「はさまれる」0 の個数は項数 k が増えるに従って 1 個ずつ増えるので、

$$A_1(m)=1,\quad A_2(m)=101,\quad A_3(m)=101001,\quad A_4(m)=1010010001,\ \ldots$$

となります。言いかえると、$A_n(m)$ において $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して、最高位から数えて k 番目の 1 と $k+1$ 番目の 1 に挟まれる 0 の個数が $m(k)$ で表されています。特に $A_1(m)=1$ と定義します。

さて、0 以上の整数 c について、項数 k に依らず常に $m(k)=c$ となる関数を $\underline{c}$ と書くことにします。例えば m が $\underline{0}$ や $\underline{1}$ で与えられるとき、$\left\{A_n(m)\right\}$ は以下のようになります。

$$A_1(\underline{0})=1,\quad A_2(\underline{0})=11,\quad A_3(\underline{0})=111,\quad A_4(\underline{0})=1111,\ \ldots$$
$$A_1(\underline{1})=1,\quad A_2(\underline{1})=101,\quad A_3(\underline{1})=10101,\quad A_4(\underline{1})=1010101,\ \ldots$$

このとき、以下の問いに答えてください。

(1) $A_n(\underline{0})$, $A_n(\underline{1})$, $A_n(\underline{2})$ を n の式で表してください。

(2) 一般に $m(k)$ がどんな k の式であっても、$A_3(m)$ や $A_9(m)$ は素数とならないことを示してください。

(3) 数列 $\left\{A_n(m)\right\}$ ができるだけ多くの素数を含むような $m(k)$ を考えてください。