

問題3. お菓子の交換

種類の異なる n 個のお菓子（チョコ、飴、クッキー、大福、どら焼き、…）があり、生徒 n 人にくじ引きで 1 つずつ配りました。生徒は各自、お菓子の好みについて同点のない順位付けをしているとします。また、他の生徒をうらやんだり、ねたんだりしないとしましょう。

お菓子の好みは人それぞれなので、再配分すると、初めの配分と比べて誰も順位を落とさずに、何人かは順位を高められるような配り方になるかもしれません。次の方法を考えてみましょう。

0. それぞれの生徒は「好みの順位」を公表する。
1. 公表した順位に従い、各自 1 番好きなお菓子を持っている人を指差す。自分の持っているお菓子が 1 番なら、自分自身を指差す。
2. 以下のような「循環」ができていたら、循環を作る生徒の中で、各自が指差した相手からお菓子をもらい、指差された人にお菓子を渡し、退場する。全員退場なら終了。残った生徒がいれば 3.へ。
循環とは：指差す方向を→で表す。 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ （ A が B 、 B が C 、 C が A をそれぞれ指差す）のような、ひと回りする指差しの連鎖を循環とよぶ。 $A \rightarrow A$ も 1 つの循環と考える。
3. 残った生徒は各自、好みの順位のリストから、退場した生徒のお菓子を削除し、残ったお菓子・生徒について、1. からのプロセスを繰り返す（つまり、残った中から一番好きなお菓子を持っている人を指差す）。

問 1：このプロセスは必ず終了することを示してください。

問 2：ステップ 0 で好みの順位を公表する際に、嘘をつくとどうなるでしょう。正直な場合と比べて、好みの順位が高いお菓子を決して得られないことを示してください。

問 3：ステップ 0 で好みの順位を公表した直後に、グループ（1 人でもよい）を作って上のプロセスから抜け、グループ内でそのメンバーのお菓子を交換できるとします。どんなグループを作っても、また、その中でどのように工夫して交換してもよいとします。しかし、全員が参加する交換プロセスによる結果と比べて、グループメンバーの誰も得しないか、あるいは誰かは必ず損するかのいずれかであることを示してください。

問 4：お菓子がいくつかあまり、ある生徒に初めから 2 つ配りました。2 つ配られた生徒は、2 つお菓子を食べることになるので、その組み合わせに順位をつけなければなりません（全部でチョコ、クッキー、飴、大福の 4 種類の場合、例えば「チョコとクッキー」1 位、「チョコと飴」2 位、「クッキーと飴」3 位、「チョコと大福」4 位、「クッキーと大福」5 位、「飴と大福」6 位、など）。

上のプロセスを修正し、問 1～3 のような性質を満たす再配分が実現できるでしょうか。あるいは、どんな困難があるでしょうか。2 つお菓子を持つ生徒が指差す方法や、また循環ができた時の交換・再配分方法について、いろいろな想定を試し、工夫してください。