

問題 2 : サイクリングロードの数理設計

風に吹かれてサイクリングするのは気持ちのいいものです。ここでは、サイクリングロードを数学的に設計することにしましょう。問題を簡単にするために、サイクリングロードを曲線で表し、起伏を考えないものとします。また、サイクリングロードをゆっくりした一定の速度で走るものとします。このような条件下で、**図 1** のように直進時における自転車のハンドルの位置から左に θ だけ回したまま一定に保つことによって、自転車は一定速度で円周上を走行することが知られています。**図 2** は車軸間距離を $\ell = 1$ として、後輪がこの距離を進むごとに後輪の中心位置を A_1, A_2, \dots とプロットしたものです。回転角は半時計まわりを正とします。

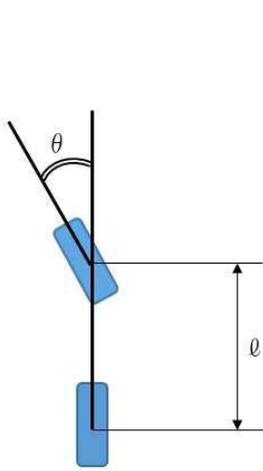


図 1

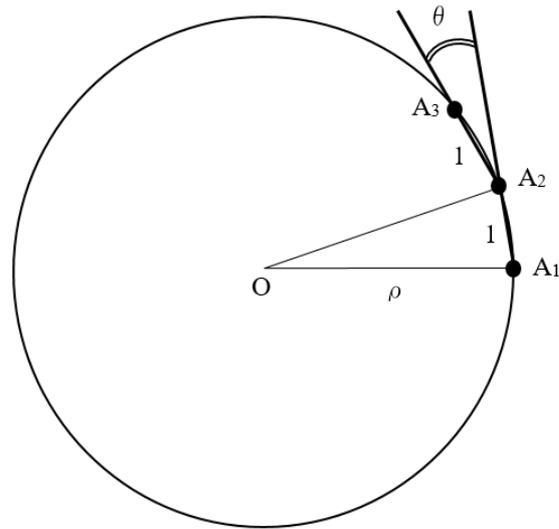


図 2

- (1) まず手ならしに、**図 2** において円の中心を O として、 $\angle A_1OA_2$ はどのような大きさになるかを考えてください。このとき、円 O の半径 ρ と θ との関係はどのようになるかを答えてください。
- (2) 次に、**図 3** のような進行方向を 90° 回転するモデルケースを考えてみましょう。この経路は線分 OP 、 QB と円弧 PQ をつなぎ合わせてできています。直進時における自転車のハンドルの位置からの回転角 θ は、道のり s に沿ってどのように変化するかを**図 4** に図示してください。

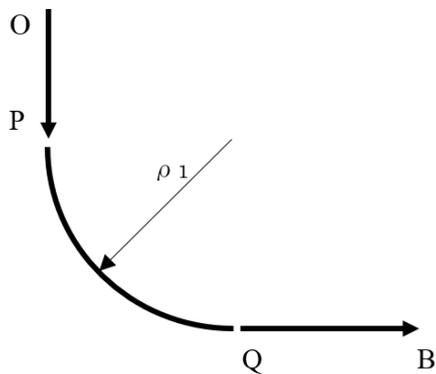


図3 サイクリングロードのモデル

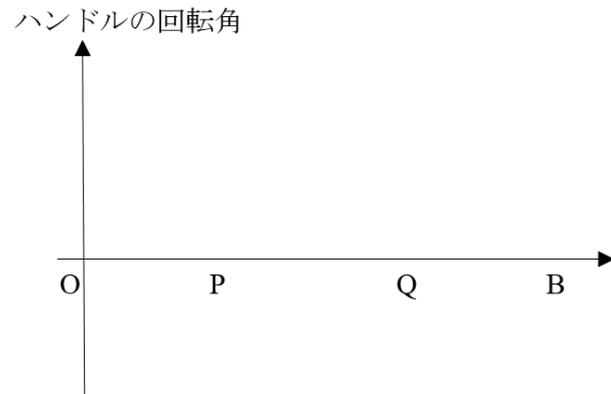


図4 ハンドルの回転角

- (3) 一方、曲線の「曲がり具合」を表す量に曲率があります。各点の「曲がり具合」を円で近似すると、円の半径 ρ が大きいほど「曲がり具合」は小さくなります。そこで、曲がり具合 κ を ρ の逆数で表すことにします。図3のような円弧PQに進入する場合、曲がり具合 κ は道のり s に沿ってどのように変化するかを図4にならって答えてください。
- (4) (3)よりなめらかに曲がり具合が変化するようなサイクリングロードを提案してください。曲がり具合 κ と道のり s の関係、実際のサイクリングロードを表す曲線を描いて論述してください。
- (5) 以上の数理設計が社会のどのようなところに応用できるのかを論じてください。