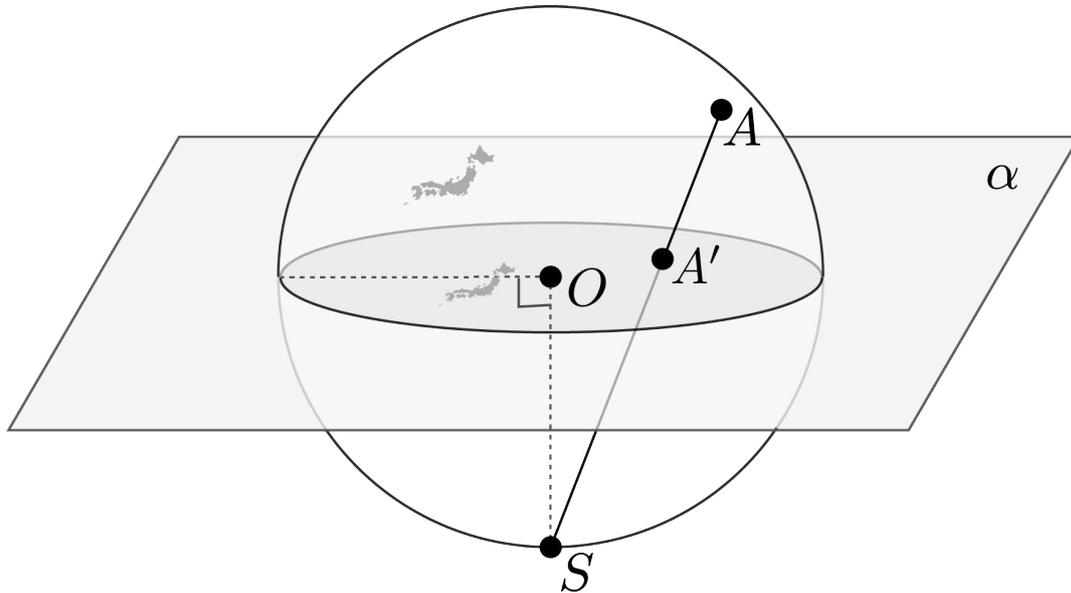


問題 3 : ステレオ図法



地球儀の南極を S 、赤道を含む平面を α とします。北半球の点 A に対し、直線 AS と α との交点 A' を対応させることによって、北半球の地図が平面 α 上に描かれます。このような地図の描き方はステレオ図法または平射方位図法とよばれています。この図法は、正角（すなわち北半球における角度と、対応する α 上の地図における角度は常に等しい^注）であり、円は円として描かれる（すなわち北半球上の円に対応する α 上の図形は、やはり円である）ことが知られています。とくに後者の性質から全てのクレーターが円形に描けるため、月面の地形図にも利用されます。

地球儀は歪みのない完全な球体であるとして、以下の小問に答えてください（順番に解答する必要はありませんし、循環論法にならない限り別の小問の主張を仮定して解答することを認めます）。

(1) 北半球上で 2 点 A, B を結ぶ曲線のうち最も短いものは大円（地球儀の中心 O を中心とする球面上の円）の弧であることが知られています。この大円の弧 \widehat{AB} に対応して、地図上で A' と B' を結ぶ曲線を描く方法を与えてください。

(2) 北半球上の 2 点 A, B の距離（弦 AB の長さ）は地図上の A' と B' から次の式で計算できることを示してください：

$$AB = \frac{2OS^2}{\sqrt{OS^2 + (OA')^2} \sqrt{OS^2 + (OB')^2}} \times A'B'.$$

(3) 問題文の中で述べた図法の二つの性質（正角性と、円が円に対応すること）を数学的に証明してください。

(4) あなたは地図作成会社の営業部であるとして、この図法の利点をできるだけアピールしてください。この図法の新しい数学的性質を見つけること（そして証明すること）は、もちろん大変有利になります。

注) 一般に 1 点で交わる 2 本の曲線のなす角度は、それぞれの曲線の交点での接線同士がなす角度のこととします。