問題４：$\sqrt{2}$ をめぐって

古代社会の人々は，その土地の有力者（王や領主）の手や足の長さを単位にして，ものの長さを測っていました（その名残はフィートやインチといった単位として現在でも見ることができます）．当然，異なる地域では単位も異なるため，時として単位同士の関係を把握して数値を換算する必要が生じます．いま二つの地方における１単位の長さを, それぞれ A, B（ただし $A \neq B$）として次のような操作を考えます.

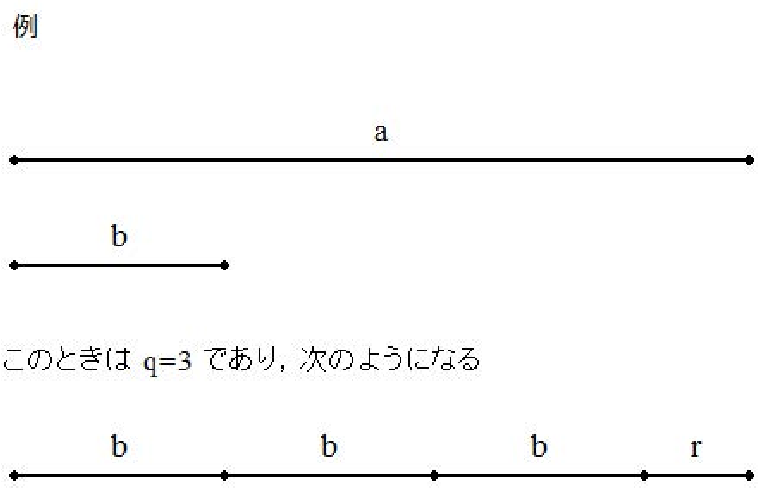
（ア）A, B のうち大きい方を a, 小さい方を b とする.

（イ）a が b の整数倍であれば，$C = b$ として終了.

（ウ）a と b の整数倍との差 r が b より小さくなるようにする．つまり $a - qb = r$ かつ $0 < r < b$ となるような整数 q と正数 r をとる（下図の例を参照）.

（エ）a, b にそれぞれ b, r を代入して（イ）にもどる.

この操作によって得られた長さ C によって, もともと与えられた A, B は $A = nC,\ B = mC$ （n, m は整数) と表されます．これにより A, B という長さを単位にして測った数値を， C という第三の単位で測った数値に換算することは容易にできる（それぞれ n 倍, m 倍すればよい）ので，何かと便利なわけです.



(1) １フィートは 30.48 cm, １メートルは 100 cm であることを踏まえて, $A = 30.48$, $B = 100$ とします．（ア）～（エ）の操作を実行して C を求めてください.

(2) 下線部を数学的に証明してください．さらに C は, A と B を整数倍として表すもののなかで最大であることも証明してください.

(3) A と B の比の値が無理数ならば,（ア）～（エ）の操作は止まらない（よって C が求まらない）ことを示してください.

(4) たとえば $A = \sqrt{2}$, $B = 1$ のときに，操作は止まらないのですが，敢えて途中で打ち切ることによって $\sqrt{2}$ の近似値を求めることができます．その方法を考えて，実際に近似値を求めて下さい．次の式（連分数展開）が参考になるかもしれません：

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

古代メソポタミアでは，(4) とは別の発想で $\sqrt{2}$ の近似値を求めました．すなわち，正数 a を一つとって,

（あ）a と $\frac{2}{a}$ の平均を b とする.

（い）a に b を代入して（あ）にもどる.

という操作をします．一般に，この操作はいつまでも繰り返されますが，<u>操作の途中に現れる数は $\sqrt{2}$ にどんどん近づいていきます</u>.

(5) 下線部を数学的に説明してください.

(6) (4) と (5) の二つの方法の優劣を比較してください.

(7) $\sqrt{2}$ 以外の無理数を，同様の方法で求めることはできるでしょうか.