

# シニア問題 1

## 映画館の設計

ここでは映画館の設計を考えてみましょう。簡単のため、一辺の長さを  $L$  とする正方形の平坦なスクリーンを用意し、地面に対して鉛直な  $yz$  平面上に固定します(図 1 参照)。まずは、このスクリーンを見込む角  $\theta$  の大きさを評価しましょう。ほとんどの場合、この  $\theta$  の大きさは見る位置によって変化してしまい、均質な視聴環境が提供できていないのが実情です。

**準備:** 図 1 のように野原に大スクリーンを置いて鑑賞するとき、どの位置から見ると  $\theta$  が最も大きく、映画を楽しむことができるといえるのでしょうか。ここでは、前のお客さんの頭に隠れて見えないことがあるといけないので、スクリーンはお客さんたちの身長  $h$  より高いところに置くことにします。

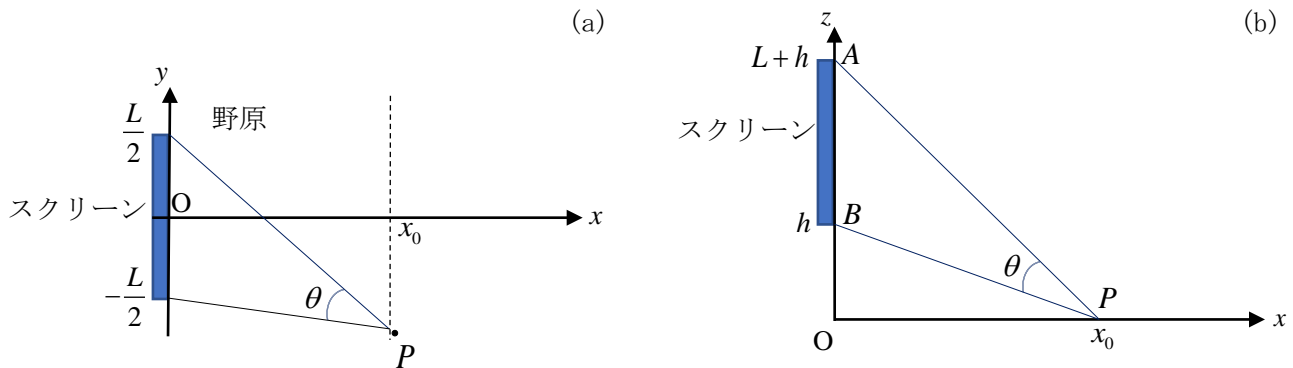


図 1.スクリーンの設定.

- (a) 野原の地面を  $xy$  平面にとります。右半平面  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  にいるお客さんを対象とします。まず、点  $P(x_0, y)$  からスクリーンを見込む角  $\theta$  の大きさを比較してみましょう。  $y=0$  の位置で  $\theta$  の値が最大となることを確認してください。
- (b) 簡単のため寝そべっているお客さんのスクリーンを見込む角  $\theta$  を図に入れました。  $\angle APB$  が鋭角のとき、  $\sin \theta$  は単調に増加するので、正弦定理を用いれば、3点  $A, B, P$  を通る円の半径  $R$  が最小のとき  $\theta$  の最大値を得ることを示すことができます。図 2 のように、3点  $A, B, P$  を通る円が点  $P$  において  $x$  軸と接するとき、  $R$  が最小になることを確認してください。

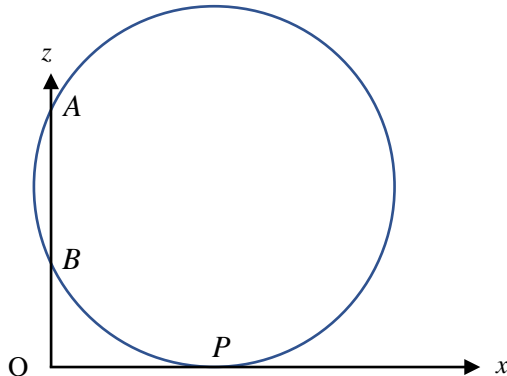


図 2. 3点  $A, B, P$  を通る円の半径  $R$  が最小になる場合

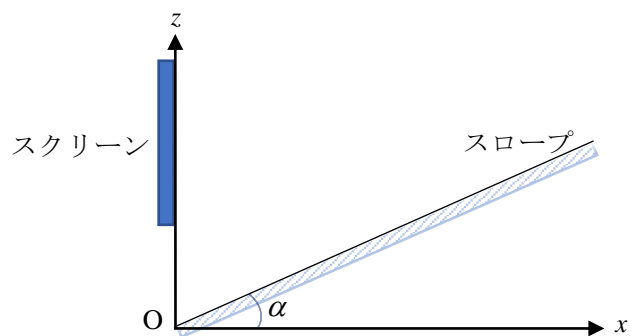


図 3 スロープとスクリーンの位置関係

ここからは、まず、 $zx$  平面における議論をしましょう。可能であれば  $zx$  平面に限らず自由に論じてください。

- (1) 一定な傾斜角をもつスロープ上で映画を鑑賞するとき、どの位置から見ると  $\theta$  が最も大きく、映画を楽しむことができるといえるのでしょうか。ここでも、前のお客さんの頭に隠れて見えないことがあるといけないので、スロープとスクリーンは交点を持たないように、スクリーンを図 3 のように置くことにします。
- (2) 映画館の座席を置く面(曲線)の設計をしましょう。リクライニングする座席の背もたれを接線とする曲線  $C$  を求めてください。姿勢の快適さから  $C$  の法線は、つねに正方形スクリーンの対角線の交点を通るようにします。このとき、どの位置から見ると  $\theta$  が最も大きく、映画を楽しむことができるといえるのでしょうか。どの位置から見ても  $\theta$  の大きさを等しくするようなことはできるのでしょうか。
- (3) 正方形  $DEFG$  をスクリーンに投影します。スクリーンを間近から見上げると歪んで見えます。(2)をふまえて、どの位置から見ると映画を最も楽しむことができるといえるのでしょうか。以上で述べていない評価尺度があれば、各自で定義して自由に議論してください。