斜面の花畑

一定の傾きを持った斜面に一定の面積の長方形の花畑を作りたいと思います。そのまわりを歩いて一周する時間をなるべく短くしたいと思ったとき、どんな形が最適でしょうか。ただし、長方形の四つの辺のうち二辺は水平な道で、そこを歩く速さに比べて上り坂を歩く速さは 0.8 倍、下り坂を歩く速さは 1.1 倍としたときの答を求めてください。

（解説）この問題は「最大・最小の問題」とよばれるもので、微分法、変分法といった手法の芽の一つとなった古くからあるタイプの問題です。

　面積が与えられて、そのまわりを歩いて一周する時間をなるべく短くするような長方形を求めるのですが、斜面の上においてあるのがミソです。斜面ではなく、水平におかれていたら、正方形になることは皆さんもご存知だと思います。

　一つの解法は、代数によるものです。水平な辺の長さを a, もう一つの辺の長さを b, 水平な辺を歩く速さを v とし、面積を c とすれば、

(1)　$ab=c$ の時に、

(2)　$2(a/v)+1.9(b/v)$ を最小にせよ、という問題になります。

ここで、$A=2(a/v)$, $B=1.9(b/v)$ とおけば、

(1)　$AB=3.8(ab/v^2)=3.8c/v^2$ が一定の時に、

(2)　$A+B$ の最小値を求めよ、という問題になります。

　ここで、面積が一定の長方形で周の長さが最小になるのは正方形であることを用いると、$A=B$ のとき、すなわち $a=0.95b$ のときに一周する時間が最小になることがわかります。

　この部分をより厳密に言う場合には、次のような方法があります。

代数的な方法を用いる場合は、

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2\geq 0$$

$$\frac{A^2+B^2}{2}\geq AB$$

とし、和が最小になるのは、$A=B$ となるときに限ることを使います。

　より幾何的な方法としては、グラフを用いる方法があります。

$AB=C\geq 0$ としたとき、$(A/\sqrt{C})(B/\sqrt{C})=1$ となりますので、$x=A/\sqrt{C}$, $y=B/\sqrt{C}$ とおけば、

（１）$xy=1$, すなわち $y=1/x$ のときに、

（２）$x+y$ の最小値を求める問題となります。

$x+y=c$ は右下がりの直線となります。x 軸、y 軸との交わりは c です。

C をさまざまに変化させたグラフを描くと、その直線がちょうど

$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと接するときに c が最小になることがわかります。x と y が異なれば、x と y を入れ替えたものも交点となりますので、接しないことがわかります。つまり、接点は y=x と y=1/x の二つのグラフの交点となることがわかります。