名古屋高等学校　小島　彰二
多治見北高等学校　土岐　慎一
名古屋大学附属高等学校　大羽　徹

シニア問題４
累乗和のビジュアル解法

$S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ とするとき、

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3(n)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

であることが、知られています。実際、これらの公式は次ページのようにビジュアル解法（視覚的に見れば「明らかに」分かる解法）で求めることができます。

(1)　$S_4(n)$ を求めて下さい。（上の $S_1(n)$〜$S_3(n)$ を用いて良い。）

(2)　$S_4(n)$ を**ビジュアル解法**で求めて下さい。

$S_k(n)=1^k+2^k+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n^k$とした時、$S_1(n),S_2(n),S_3(n)$のビジュアル解法

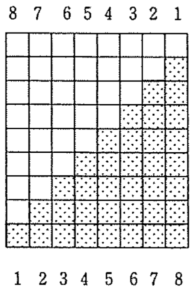
1.

$$S_1(n)=1+2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

古来、天才ガウスの少年時代の逸話として余りにも有名な公式です。
基本的には、「ひっくり返して、足して2で割る。」でした。

$n=8$の場合で説明します。

$S_1(8)=1+2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+8$を、次の図の網点部分で表します。
$S_1(8)=8+7+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+1$としたものを、その上に積み上げます。
すると、右の図のような横8、縦9の長方形が出来ます。、



$2\times S_1(8)=8\times(8+1)$

$\therefore\ S_1(8)=\frac{1}{2}\times 8\times(8+1)=36$となります。

以上を、一般化すると、

$2S_1(n)=n(n+1)$

$\therefore\quad S_1(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$　となります。

2.

$$S_2(n)=1^2+2^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

二乗の和の公式です。天才ガウスに対抗して、三角形のお盆を二度、120度回転させます。

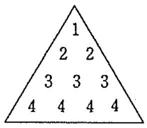
$n=4$の場合で説明します。

$S_2(4)=1^2+2^2+3^2+4^2$が求めるものです。

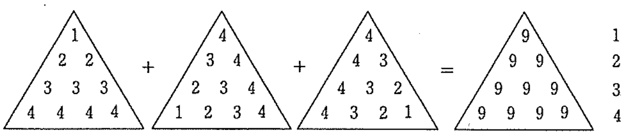
初めに、次のように、各二乗を和に直します。

$1^2=1$
$2^2=2+2$
$3^2=3+3+3$
$4^2=4+4+4+4$

この各数を、三角形のお盆に載せます。



この三角形のお盆一つの上に載った数の合計が、求めるものです。
このお盆を三つ用意しますが、下の図のように反時計回りに120度ずつ回転して置きます。見やすいように、数字は縦になるように表示しています。
同じ位置にある数同士を足して下さい。どの位置でも、合計はすべて9です。
この9が何個あるか、数えると、$(1+2+3+4)$個あります。



従って、$3S_2(4)=(2\times 4+1)\times(1+2+3+4)$

$\therefore\quad S_2(4)=\frac{1}{3}\times 9\times 10=30$　となります。

以上を、一般化すると、

$3S_2(n)=(2n+1)\times(1+2+3+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n)$

$3S_2(n)=(2n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$\therefore\quad S_2(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$となります。

ビジュアル解法が分かると、公式の中の$(2n+1)$の意味もよく理解できます。

3.

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

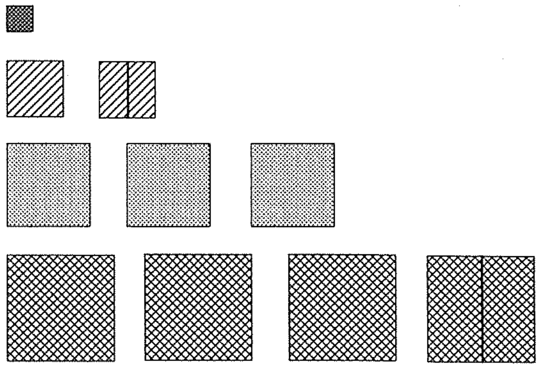
三乗和の公式の証明には、正方形の面積を活用します。

$n=4$の場合で説明します。

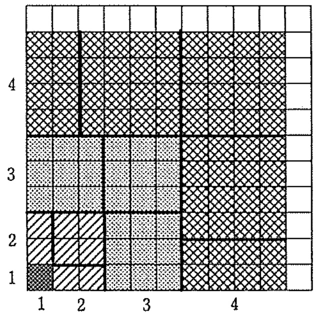
$S_3(4)=1^3+2^3+3^3+4^3$が求めるものです。

$1^3=1^2\times 1$　　面積1の正方形が1枚
$2^3=2^2\times 2$　　面積4の正方形が2枚
$3^3=3^2\times 3$　　面積9の正方形が3枚
$4^3=4^2\times 4$　　面積16の正方形が4枚　とします。

さらに偶数枚ある場合は、1枚を左右対称に、二等分します。
以下に、図示します。



以上を並べ替え、下図のような正方形を作成します。



そうすると、3乗の和、$1^3+2^3+3^3+4^3$、が
一辺の長さ$(1+2+3+4)$の正方形の面積に等しいことが分かります。
従って、

$S_3(4)=1^3+2^3+3^3+4^3$
$=(1+2+3+4)^2$
$=\left\{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1)\right\}^2$
$=100$

$\therefore\quad S_3(4)=100$　となります。

以上を一般化すると、

$S_3(n)=1^3+2^3+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n^3$
$=(1+2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+n)^2$
$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

$\therefore\quad S_3(n)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$となります。

日本数学コンクール作成 (2013年度)

問題解説

(1)　一般的には、次式のような、階差数列を考える。

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

①の両辺で合計をとれば、

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^5-k^5\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(5k^4+10k^3+10k^2+5k\right)$$

$$(n+1)^5-1=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

②と$S_1(n)=\sum_{1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad S_2(n)=\sum_{1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\quad S_3(n)=\sum_{1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$

より、

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)^5-(n+1)$$

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=-10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)^5-(n+1)$$

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=(n+1)\left\{-\frac{5}{2}n^2(n+1)-\frac{5}{3}n(2n+1)-\frac{5}{2}n+(n+1)^4-1\right\}$$

右辺を通分すると、

$$5\sum_{1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{6}$$

さらに、$f(n)=6n^3+9n^2+n-1$とすると、$f(-\frac{1}{2})=-\frac{6}{8}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-1=0$より組み立て除法を用い、

6	9	1	-1	$\left(-\frac{1}{2}\right.$
	-3	-3	1	
6	6	-2	0	

$$5\sum_{1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})(6n^2+6n-2)}{6}$$

$$5\sum_{1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}$$

よって、$S_4(n)=\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$となる。 ■

(2)ビジュアル解法

$S_4(n)=1^4+2^4+\ldots+n^4$ において、$n=4$ の場合を考察する。

各項を次のように立方体に分解する。$S_3(n)$ の場合を参照のこと。

$1^4=1^3\times 1$

$2^4=2^3\times 2=2^3+2^3$

$3^4=3^3\times 3=3^3+3^3+3^3$

$4^4=4^3\times 4=4^3+4^3+4^3+4^3$

ただし、偶数番目の１つの立方体を、立方体の中心を通り、向かい合う面に平行な面で２等分する。こうして出来た各立体を、$S_3(4)$ で作成した正方形平面に、互いの正方形および正方形の半分の長方形の面が一致するように、乗せた立体を作成する。その立体の体積が求めるものである。

以下がその立体図である。

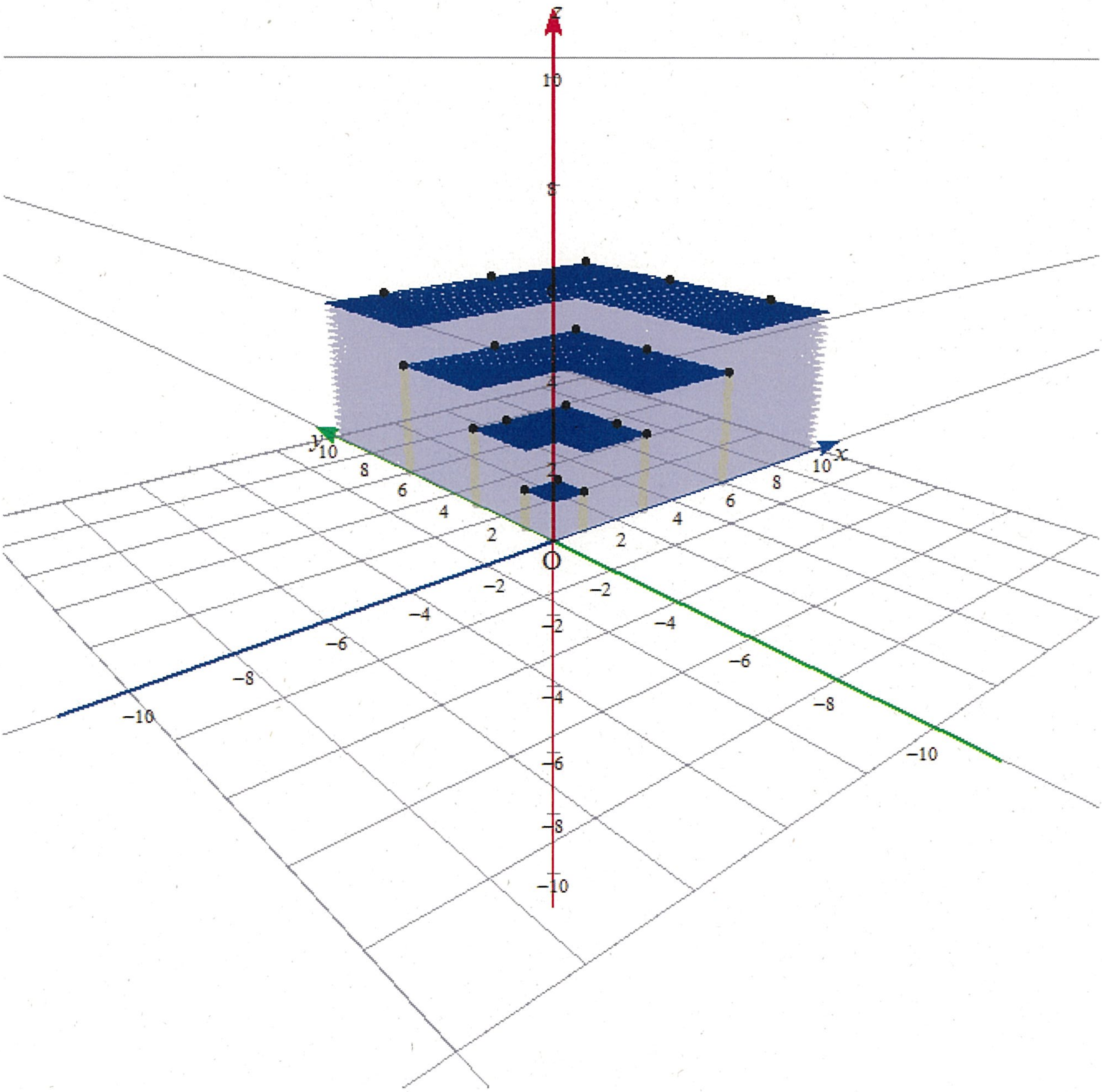


Fig.1

$\therefore$ $S_4(4)$ は、底面の面積が $(1+2+3+4)^2$ 、高さ 4 の直方体の体積から、底面の面積がそれぞれ $1^2, (1+2)^2, (1+2+3)^2$ であって、高さが 1 の直方体の体積を引けば良いことが分かる。

従って、 $S_4(4) = 4 \times (1+2+3+4)^2 - \{1^2 + (1+2)^2 + (1+2+3)^2\}$

取り除く体積は、以下の体積である。

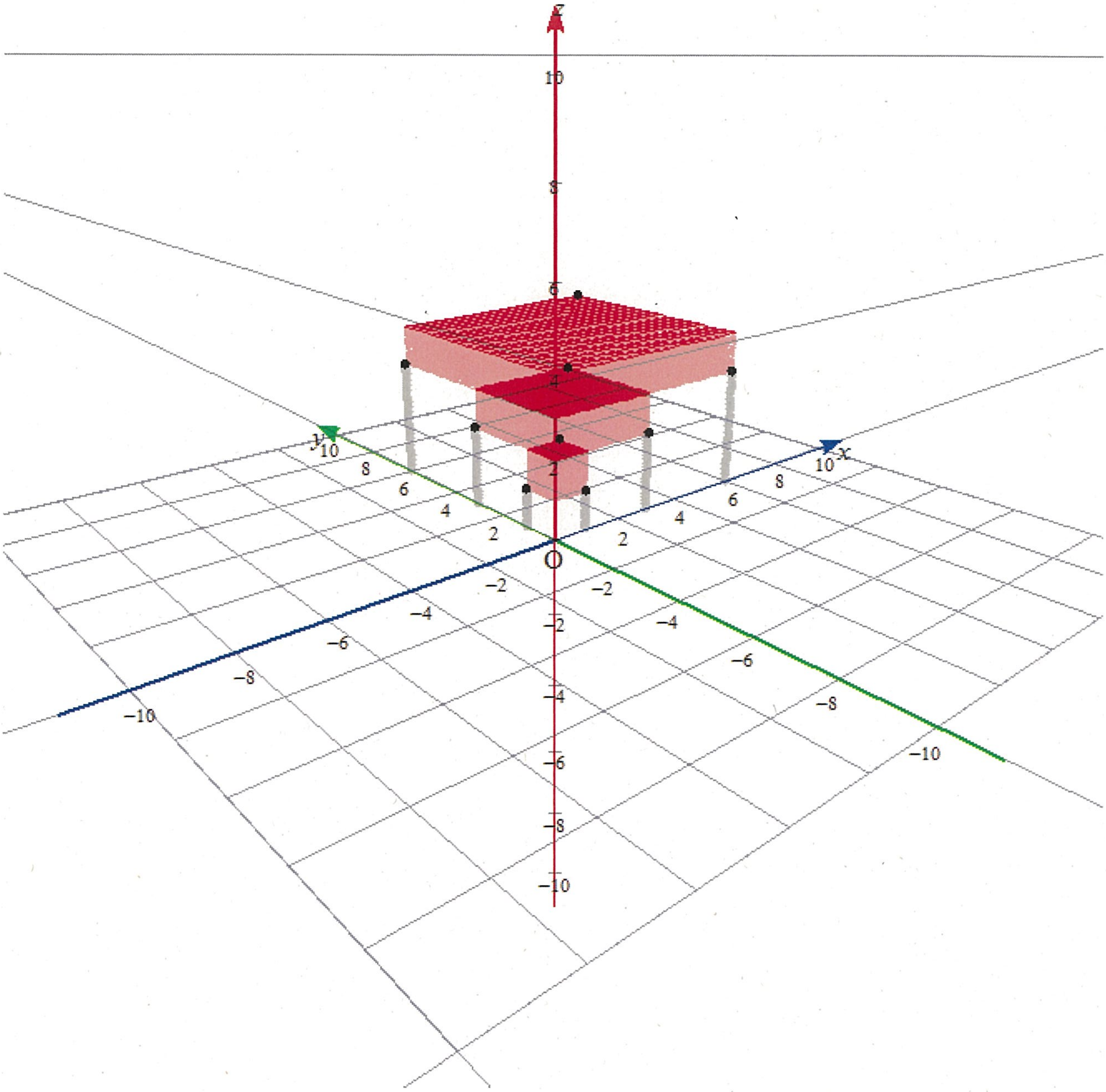


Fig.2

これを一般化して、

$$S_4(n) = n(1+2+\ldots+n)^2 - \{1^2 + (1+2)^2 + \ldots + (1+2+\ldots+n-1)^2\} \quad ・・・・①$$

ここで、①の右辺を、Σを用いて表すと、

$$S_4(n) = n\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4}n^3(n+1) + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}n^3(n+1) + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}(k^4 + 2k^3 + k^2) \quad ・・・・②$$

②の右辺にある$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k^4\left(= -\frac{1}{4}S_4(n)\right)$を左辺に移行すると、②は

$$\frac{5}{4}S_4(n) = \frac{1}{4}n^3(n+1)^2 + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^3 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\frac{5}{4}S_4(n) = \frac{1}{4}n^3(n+1)^2 + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^3 - \frac{1}{4}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\frac{5}{4}S_4(n) = \frac{1}{4}n^3(n+1)^2 + \frac{1}{8}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)$$

$$\frac{5}{4}S_4(n) = \frac{1}{4}n(n+1)\left\{n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}(2n+1)\right\}$$

$$\therefore \quad S_4(n) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

■