問題シニア３　**６面体**

鈴木紀明 (名城大学理工学部)

面の数が６つの多面体を考えてみましょう．例えば，立方体は６つの４角形からできています．５角錐は５角形１つと５つの３角形からできています．

(1) ３角形が１つ，４角形が５つの多面体は存在しないことを説明しなさい．

(2) ３角形が２つ，４角形が４つの多面体は存在することを説明しなさい．

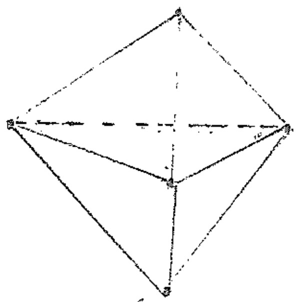
(3) 面の数が６つの多面体をすべて求めなさい．

すぐには分からない場合は，まずは，４面体と５面体について考えてみるとよいでしょう．

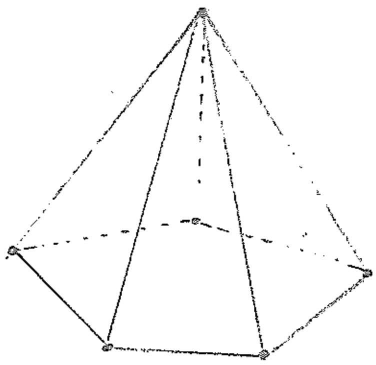
[解説]

§1.　**問題の背景**

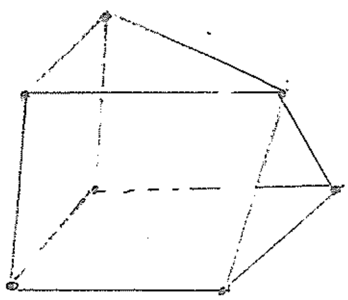
小学生とその父兄を対象に「多面体の秘密を探る」と題した話をしたことがあります．具体的な多面体の面，辺，頂点の個数を調べて，いわゆる「デカルト・オイラーの公式」を “発見” してもらうことが趣旨です．例として下記の４つの６面体の辺と頂点の個数を数えてもらいました．



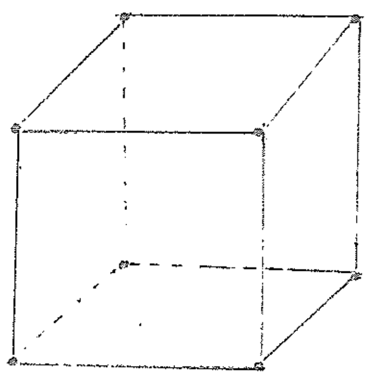
(A)



(B)



(C)



(D)

これらを表にすると

	辺 (E)	頂点 (V)	面 (F)
(A)	9	5	6
(B)	10	6	6
(C)	11	7	6
(D)	12	8	6

この表から $E-V$ の値がいつも 4 になることを "発見" してもらい,

(1) $$E-V=F-2$$

が成り立つことを実感してもらいました．そのとき，ある小学生から質問が出ました．

(2) 「辺が 13 個で頂点が 9 個のものはどんな形をしているのですか？」

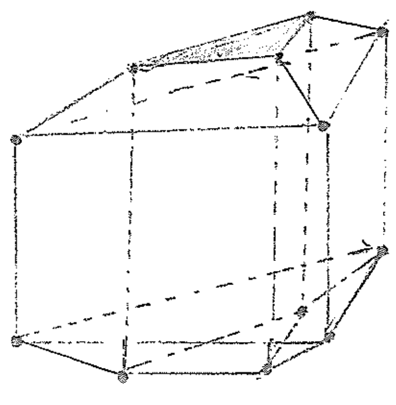
さらに，ある父兄からは

(3) 「(C) の立体は本当に存在するのですか？」

と聞かれました[1]．そのときに何と答えたかよく覚えていませんが，これらの質問に対する解答をはっきりさせようということが今回の問題の発端です．

§2. 6面体は7種類？

多面体の議論においてデカルト・オイラーの公式である $E-V=F-2$ は基本的ですが，この公式は "穴のない" すべての多面体[2]で成り立ちますが，下記のような "穴のある" 多面体では成り立ちません．この多面体では $E=24$, $V=12$, $F=12$ ですから (1) は成り立ちません．



[1]説明を加えます．多面体の 3 つの頂点からは 3 角形が定まりますが，4 つ以上の頂点の場合は，それらの点が 1 つの平面上にないと多角形になりません．質問の意味は (C) 図に書かれた 4 角形が "本当に 1 つの面をなしているか" ということです．

[2]多面体がゴムでできているとして膨らませて球に変形できるようなもの．

以後は,「デカルト・オイラーの公式」が成り立つ多面体を考察することにします.6面体がいくつあるかについて調べるためには,どのように分類するかを決めないといけません.ここでは,6つの面の形で分類することにします[3].まず,

(4) 隣接する各面は1辺を共有している

ことから,

(5) 6面体の各面は3,4,5角形のどれかである

実際,n角形の各辺に対応する面はn個あるので,6面体であるためには6角形以上の面はないことになります.

6面体を3,4,5角形の個数で分類することにします.以下,3角形,4角形,5角形の各個数をa, b, cとして,(a, b, c)の取りうるすべての場合を求めることにします.(a, b, c)の辺の合計は$3a+4b+5c$です.6面体の辺の個数をEとすると,1つの辺には2つの面が対応しますから

(6) $$3a+4b+5c=2E$$

が成り立ちます.また,6面体の各頂点には少なくとも3個の辺が集まっていて,1つの辺には頂点が2つ対応することから

(7) $$3V \leq 2E$$

が成り立ちます.この式とデカルト・オイラーの公式(1)から得られる$E-V=4$を使うと$E \leq 12$となります.これは(2)の質問に対する答えも与えます.すなわち,辺が13個以上の6面体はありません[4].

以上より(a, b, c)が6面体になるための必要条件として

(8) $3a+4b+5c$は24以下の偶数

となります.これをみたす(a, b, c)の組をすべて挙げると

(9) $$\begin{cases} (6,0,0),\ (4,2,0),\ (2,4,0),\ (0,6,0),\ (5,0,1),\ (3,2,1),\ (2,2,2) \\ (4,0,2),\ (3,0,3),\ (1,4,1) \end{cases}$$

となりますが,実は,後段の3つの場合は存在しません.これを説明するために,(4)の帰結として,次を確認します.

(10) 隣接する各面は2頂点を共有している

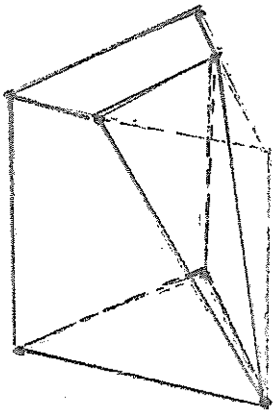
まず,(4,0,2)が存在したとします.このときですが,辺の数が$E=(3\times4+5\times2)/2=11$ですから頂点は$V=E-F+2=7$です.一方,5角形が2つありますが,これらは隣り合い,共有する頂点は2ですから,頂点の個数が$5\times2-2=8$以上となって矛盾する

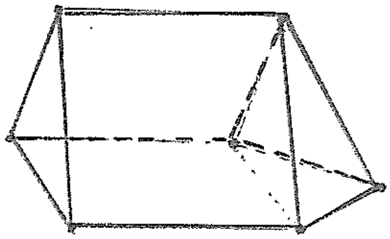
[3]この解説の作成においては,採点委員である岩本隆宏先生(宇治山田高校),奥田真吾先生(津高校),田所秀明先生,堀川浩先生(鈴鹿中高校)にご協力を頂いています.

[4]辺が8個以下の6面体も存在しません.

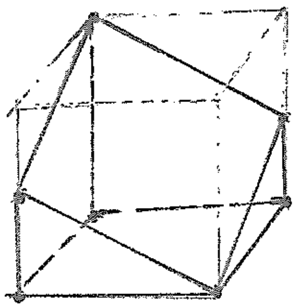
のです．次に (3,0,3) が存在したとします．前述と同様にして，辺の数は $E = 12$ となり $V = 8$ です．一方，1つの5角形の2辺に，5角形が2つ隣接それぞれが共有する頂点は2ですから，頂点の個数は $5 \times 3 - 2 \times 3 = 9$ 以上になり矛盾します．同様に (1,4,1) が存在したとすると，$E = 12$, $V = 8$ です．5角形の各辺に残りの多角形を貼付けます．頂点は全部で8個なので，5角形の頂点以外に3個の頂点があるはずです．(7) の関係からすべての頂点にはちょうど3個の辺が集まっていることになりますが，このためには3角形が2つ以上必要になり矛盾します．

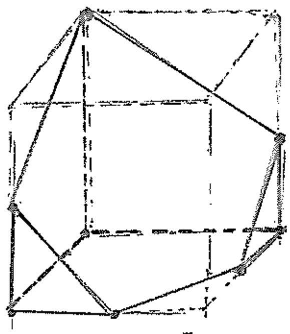
次に (9) の上段の7種類の6面体が実際に存在することを確かめましょう．まず，(6,0,0) は正4面体を2つくっつけた §1 の (A) です．$(5,0,1)$ は (B) の5角錐，$(0,6,0)$ は (D) の立方体として存在します．また $(2,4,0)$ は (C) で与えた6面体です．これは3角柱を切り取ることで作ることができます．従って (3) の質問の答えは YES です．また，3角柱を膨らますことによって (3,2,1) の6面体を作ることができます．





最後に (2,4,0) と (2,2,2) は立方体を切り取ることによって得られます．

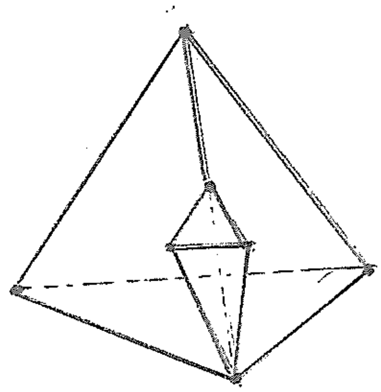




宮川純一さん (鶯谷高校1年)，江尻悠一郎さん (東海高校1年)，小川拓実さん (岐阜東高校1年) は7種類がすべて求めてありました．理論的に不十分な点もありましたが，短時間の間にここまでの考察ができたことは大変すばらしいと思います．

§3.　8番目の6面体！

採点の最中に，採点委員の堀川先生から次のような6面体が示されました．



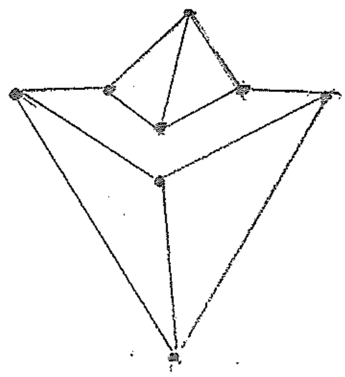
これは3角形4個と5角形2個からなる6面体 $(4,0,2)$ で，§2 では存在しないとしたものです．§2 の考察とどこが違うのでしょうか？ §2 の考察では私たちは (4) の帰結として (10) を仮定して考察していました．この結果として (4,0,2), (3,0,3), (1,4,1) が存在しないことを導きました．しかし，(10) の代わりに

(11)　　隣合う2つ面は1つの辺と (別のもう)1つの頂点を共有してもよい

という条件に緩めると $(4,0,2)$ の6面体を作ることができるのです．ただし，(11) の条件にしても $(3,0,3)$ と (1,4,1) は作ることはできないと思います (考えてみて下さい).

§4.　9番目の6面体！

山本悠時さん (東海高校1年) の解答には次のような図が書かれていました．



これは3角形4個，6角形2個からなる6面体です．§2 の考察で，何故にこれが入らなかったのでしょうか？ §2 の考察の出発点は (5) です．これは (4) からの帰結でした (§3 のようにこれに頂点が加わってもよい)．(4) を

(12)　　隣合う面の共有する辺が2個あってもよい

という条件まで広げると (5) は成り立たず，上記の6面体が新たに加わるのです．

§5. 10番目の6面体？

6面体が何種類あるかということについて，いくつかの条件の下で考察して来ました．実際，大前提として「デカルト・オイラーの公式」をみたす多面体のみを考えています．「何の条件も仮定せず考えた場合に6面体が他にもあるか」という問題が残ります．私は「これまで得られた9種類がすべてであろう，すなわち，10番目の6面体はないだろう」と予想しますが，厳密な証明を得ている分けではありません．面の個数が増えれば，当然「デカルト・オイラーの公式」をみたさない多面体が含まれて，分類は複雑になります．取りあえずは「7面体は何種類？」という問題に挑戦して下さい．