共通問題２「手数の多いじゃんけん」

大学院工学研究科　田地宏一

じゃんけんとは，一般に，グー（石），チョキ（はさみ），パー（紙）の 3 種類の手からなり，同じ手はあいこ，石ははさみに勝ち，はさみは紙に勝ち，紙は石に勝ちという三すくみのルールからなる勝ち負けを決めるゲームです: 世界にもさまざまなタイプのじゃんけんがあるそうで，たとえばフランスには，石，はさみ，紙の 3 手に壷を加えた 4 手からなるじゃんけんがあります．その勝ち負けは

石ははさみに勝ち，壷と紙に負け
はさみは紙に勝ち，壷と石に負け
紙は壷と石に勝ち，はさみに負け
壷は石とはさみに勝ち，紙に負け

となっています．ところが，これをよく見ると，壷と石はともにはさみに勝ち紙に負けるのですが，石は壷に負けるので，石を出す意味がなくなります．このように二つの手ＡとＢがあり，「Ａが勝つ相手にはＢも勝つ．さらにＢはＡに勝ち」となるときＡを「無意味な手」とよぶことにしましょう．
まず，以下の二つのルールをおきます．

条件１．あいこは同じ手のみで，相異なる二つの手には必ず勝ち負けがつく．
条件２．オールマイティ（他のすべての手に勝ち），および逆オールマイティ（他のすべての手に負け）となる手はない．

上のルールの下で，以下のことを証明してください．
１．手数が４のじゃんけんで，無意味な手のないものは存在しない（言い換えると，必ず無意味な手ができてしまう）．
２．手数が５以上なら，無意味な手のないじゃんけんの勝敗表を必ず作ることができる．（ヒント：まず手数が５と６の場合を考えましょう）．

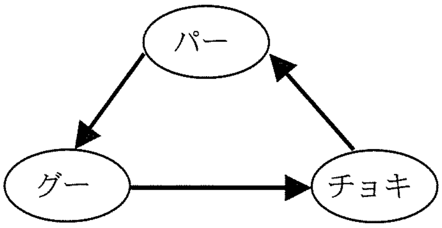
解説と解答

以下では，無意味の手のないじゃんけんを「合理的なじゃんけん」と呼ぶことにします．また，じゃんけんの勝ち負けを表現する方法としては，矢印（有向グラフ）を用いたものや，勝敗表などがあります．グー，チョキ，パーからなる普通のじゃんけんの勝敗表は

	グー	チョキ	パー
グー		○	×
チョキ	×		○
パー	○	×	

となり，「グーはチョキに勝ち」を

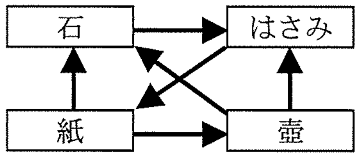
と表すことにすると，グラフ表現では



となります.

問題文にあるフランスの例では，それぞれ以下のようになります.

	石	はさみ	紙	壺
石		○	×	×
はさみ	×		○	×
紙	○	×		○
壺	○	○	×	



問題１：手数が４のじゃんけんでは，必ず無意味な手ができてしまうことの証明.

これは，「できない」ことを示す問題なので，例えば条件を満たすようなすべての勝敗表を作って，そのすべてに無意味な手があることを示せば OK です．ただし，そのままこれを行うと，たくさんの勝敗表が必要になるので，問題の特徴を利用して「効率よくすべての場合を調べ上げる」ことにします.

じゃんけんの勝敗表は引き分けのない 4 チームのリーグ戦の勝敗表と同じと見なすことができます．すると，対戦の組み合わせは（4 つから 2 つを選ぶ組み合わせの数になるので）6 通りとなり，勝ち負けの総和は 6 勝 6 敗です．そこで，勝ち数（負け数）を 4 チームに配分することを考えると，（各チームは最大 3 勝しかできないので）その配分の方法は，(3,3,0,0)，(3,2,1,0)，(3,1,1,1,)，(2,2,2,0)，(2,2,1,1)の 5 つしかないことが分かります．この中で(3,3,0,0)の割り当ては不可能で，また，(3,2,1,0)，(3,1,1,1,)，(2,2,2,0) は全勝または全敗のチームを含んでいるので条件 2 に反します．結果として，割り当ての方法は(2,2,1,1)しかありません.

そこで，一般性を失うことなく，4 つの手 A,B,C,D のうち A,B は 1 勝 2 敗，C,D は 2 勝 1 敗としましょう．さらに，条件 1 より A と B の間，C と D の間にも勝ち負けがつかなければならないので，「A は B に勝ち，C は D に勝ち」としても一般性は失いません．この条件の下で勝敗表を書くと

	A	B	C	D	
A		○			1 勝 2 敗
B	×				1 勝 2 敗
C				○	2 勝 1 敗
D			×		2 勝 1 敗

となりますが，A は 1 勝 2 敗の手であり，B に対して 1 勝しているので，あとの C と D には負けることになります．以下，同様に考えると，残りの空欄は自動的に埋まり，以下の勝敗表ができあがります.

	A	B	C	D	
A		○	×	×	1勝2敗
B	×		○	×	1勝2敗
C	○	×		○	2勝1敗
D	○	○	×		2勝1敗

結果として，上のフランスの例を全く同じ勝敗表ができあがりました．実は，その作り方から，手数が4つのじゃんけんの勝敗表は（手の順序の入れ替えを除いて）この一通りしかないことが分かり，手Cのような無意味な手が必ずできます．

【補足】

こちらで用意した解答はグラフ表現に基づくもので，ここで挙げたのは実際の答案に書かれていたものを書き直したものです．こちらの方がエレガントで参りました．

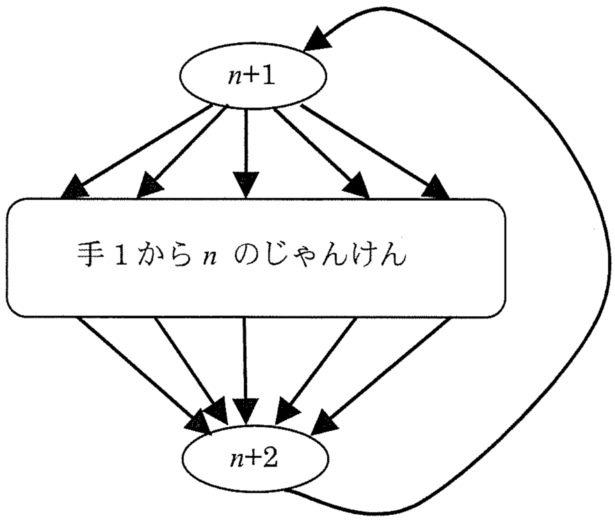
問題2：手数が5以上なら，無意味な手のないじゃんけんの勝敗表を必ず作ることができることの証明．

こちらは，「できること」を示すことなので，たとえば，数学的帰納法のようにn手の合理的なじゃんけんに，うまく$n+1$個目の手の勝ち負けを決めることで合理的なじゃんけんを作ることを示せればよいのですが，これはちょっと難しい．

そこで，参考文献（伊藤「一般化じゃんけん」，オペレーションズ・リサーチ，vol.58, No. 3 (2013)）にあるように少し工夫をして，n手の合理的なじゃんけん（それぞれの手を1〜nとします）に以下のような二つの手$n+1$, $n+2$を追加します．

手$n+1$：既存の手1〜nすべてに勝ち．手$n+2$に負け．
手$n+2$：既存の手1〜nすべてに負け．手$n+1$に勝ち．

これをグラフで表現すると以下のようになります．



こうすると，手数が$n+2$の合理的なじゃんけんを作ることができます（証明は省略）．ただし，この方法では，手が二つずつ増えていくことになり，手数が奇数の場合は普通のじゃんけん（手が三つ）からはじめて再帰的に作れますが，偶数については手数が 6 の合理的なじゃんけんを作っておく必要があります（実際これは可能で，一例をあとで示します）．

次に，別の解法を示します．

手数が３のときは普通のじゃんけんであり，４のときは必ず無意味な手ができることが分かっているので，ここでは，まず手数が奇数$n=2m+1\ (m\geq 2)$のときを考えます．このとき，それぞれの対戦相手の数は$2m$となるので，すべての手がm勝m敗となるような勝敗の配分が考えられます．そこで，例えば手１は２から$m+1$，手２は３から$m+2$，手$k\ (1\leq k\leq n)$は$k+1$から$k+m\ (\mathrm{mod}\,n)$に勝ち，というような巡回的な勝敗表を作成すると，実際にすべての手がm勝m敗となっており，すぐわかるように合理的なじゃんけんとなります．手が７つの例を以下に示します．

	1	2	3	4	5	6	7
1	＼	○	○	○	×	×	×
2	×	＼	○	○	○	×	×
3	×	×	＼	○	○	○	×
4	×	×	×	＼	○	○	○
5	○	×	×	×	＼	○	○
6	○	○	×	×	×	＼	○
7	○	○	○	×	×	×	＼

同じ考え方で，手数が偶数の場合もできそうですが，こちらはちょっと難しい．例えば，$n=6$の場合を考えましょう．このとき３勝２敗の手が３つと２勝３敗の手が３つあるとして，上と同じような巡回的な勝敗表を作ると（例えば，手 1～３が３勝２敗だとします），

	1	2	3	4	5	6
1	＼	○	○	○	×	×
2	×	＼	○	○	○	×
3	×	×	＼	○	○	○
4	×	×	×	＼	○	○
5	○	×	×	×	＼	○
6	○	○	×	×	×	＼

となり，手４が無意味な手となってしまい，この作り方ではうまくいきません．

少し工夫をして，手数が奇数$n\ (n\geq 5)$の巡回的な勝敗表に以下のような手$n+1$を追加すると，無意味な手のないじゃんけんの勝敗表を作ることができます．

手$n+1$はすべての奇数の手に勝ち，すべての偶数の手に負け（またはその逆）

例えば，手が５つの巡回的な勝敗表に，すべての奇数の手(1,3,5)に勝つ手６を追加すると以下のような勝敗表ができます．

	1	2	3	4	5	6
1		○	○	×	×	×
2	×		○	○	×	○
3	×	×		○	○	×
4	○	×	×		○	○
5	○	○	×	×		×
6	○	×	○	×	○	

この作り方で，合理的なじゃんけんとなることは以下のように示すことができます．もともとのn個の手についてはその作り方から無意味な手はありません．新たに追加した手$n+1$は「すべての奇数（または偶数）の手」に勝つのに対し，既存の手 1〜n は連続する「偶数と奇数の手」に勝つので，「既存の手が勝つすべての相手に$n+1$が勝つ」ことはなく，「手$n+1$が勝つすべての相手にに既存の手が勝つ」こともなく，合理的なじゃんけんとなります．なお，この論法は$n \geq 5$ $(m \geq 2)$ でないと成り立たないことに注意しましょう．

以上より，手数が 5 以上であれば合理的なじゃんけんが作れることが示せました．

<u>おまけ</u>

フランスじゃんけんでも「石で勝ったら倍返し」のようなルールを決めておくと石は無意味な手でなくなるかもしれません．